

Grundlagen der Vektorrechnung

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können: Skalar, Vektor, Matrix, Addition von Vektoren, Multiplikation von Vektoren mit einem Skalar, Dimension eines Vektorraumes, Komponentendarstellung von Vektoren, Bezugspunkt, Basisvektoren, Orthonormalbasis, Bezugssystem, Ortsvektor, Komponenten eines Vektors, kartesische Koordinaten eines Punktes, Skalarprodukt zweier Vektoren, Projektion eines Vektors, Betrag eines Vektors, Winkel zwischen zwei Vektoren, Kreuzprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren, Spatprodukt dreier Vektoren, Geradengleichung, explizite/implizite Ebenengleichung, Normaleneinheitsvektor, schiefwinklige Basissysteme, Spaltenvektor, Matrix, lineares Gleichungssystem, Einheitsmatrix, Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems, inhomogenes lineares Gleichungssystem, homogenes Gleichungssystem

Die Kenntnis folgender Begriffe wird empfohlen: Raumkurven, Bogenlänge, Tangenteneinheitsvektor, Krümmungsmittelpunkt, Krümmung einer Raumkurve, Krümmungsradius, Binormalenvektor, begleitendes Dreibein, Torsion und Windung einer Raumkurve, Frenet'sche Formeln, Differentialgleichungssystem, Geschwindigkeitsvektor, Beschleunigungsvektor, Verschiebungsvektor, Bahngeschwindigkeit

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln

- Komponentendarstellung eines Vektors bez. der ONB $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

- Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Anteil eines Vektors \mathbf{a} in Richtung eines Einheitsvektors \mathbf{e}

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{e})) \quad \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} = 1$$

- Betrag eines Vektors

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

- Winkel zwischen zwei Vektoren

$$\cos(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

- Kreuzprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}))$$

- Spatprodukt $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ dreier Vektoren

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

- Geradengleichung

$$\mathbf{r}(\lambda) = \mathbf{r}_P + \lambda(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Ebenengleichung

$$\mathbf{r}(\lambda, \mu) = \mathbf{r}_P + \lambda(\mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P) + \mu(\mathbf{r}_R - \mathbf{r}_P) \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- Inhomogenes lineares Gleichungssystem ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = b_i$$

- Homogenes lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j = 0$$

Beispiele

- Prüfen Sie, ob die drei gegebenen Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x$, $\mathbf{b} = \mathbf{e}_y$ und $\mathbf{c} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y$ linear unabhängig sind.
- Gegeben sind die beiden Vektoren $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{b} = 0\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y + 0\mathbf{e}_z = 5\mathbf{e}_y$. Berechnen Sie die Beträge der Vektoren sowie das Skalarprodukt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.
- Berechnen Sie den Winkel zwischen der Raumdiagonalen und den Basisvektoren in einem kartesischen Koordinatensystem.
- Berechnen Sie das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_y$.
- Berechnen Sie das Spatprodukt der Vektoren $\mathbf{a} = 1\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 3\mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{c} = 3\mathbf{e}_x + 2\mathbf{e}_y + 1\mathbf{e}_z$.
- Gegeben sind die drei Vektoren $\mathbf{r}_A = 4\mathbf{m} \mathbf{e}_z$, $\mathbf{r}_B = 4\mathbf{m} \mathbf{e}_x$ und $\mathbf{r}_C = 4\mathbf{m} \mathbf{e}_x + 2\mathbf{m} \mathbf{e}_y$. Bestimmen Sie die Größe der durch die Punkte $\{\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C\}$ definierten Dreiecksfläche sowie das Volumen des durch $\{\mathcal{O}, \mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C\}$ bestimmten Tetraeders.
- Bestimmen Sie eine explizite und eine implizite Gleichung der Ebene, die die drei Punkte $\mathbf{r}_A = \mathbf{e}_x = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{e}_y = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{r}_C = \mathbf{e}_z = \{0, 0, 1\}$ enthält.
- Gegeben sind die vier Vektoren $\mathbf{a} = \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{b} = -2\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z$, $\mathbf{c} = \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{d} = 2\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y + 8\mathbf{e}_z$. Zerlegen Sie den Vektor \mathbf{d} in die drei Richtungen $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$, d.h. bestimmen Sie die drei Skalare $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ derart, dass $\mathbf{d} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ gilt.

Ausgewählte Fragen

- Nennen Sie Beispiele für vektorielle und skalare Größen in der Mechanik.
- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Diskutieren Sie alle Sonderfälle, bei denen das Skalarprodukt oder Vektorprodukt zweier Vektoren null ist.
- Diskutieren Sie alle Sonderfälle, bei denen das Spatprodukt dreier Vektoren null ist.
- Wann ist das Spatprodukt dreier Vektoren negativ?
- Wie lässt sich das Volumen eines Tetraeders berechnen?
- Erklären Sie, warum die Komponenten des Ortsvektors vom Bezugspunkt abhängen.
- Wie kann der minimale Abstand zweier Geraden bestimmt werden?
- Wie lässt sich prüfen, ob zwei Geraden in einer Ebene liegen?
- Wie kann überprüft werden, ob eine Gerade eine Ebene schneidet?
- Erklären Sie die implizite Form der Ebenengleichung.
- Wie kann ein Vektor bezüglich einer schiefwinkligen Basis dargestellt werden?
- Unter welcher Voraussetzung hat ein homog.(inhomog.) Gleichungssystem nichttriviale Lösungen (eine eindeutige Lösung)?

Kraftsysteme

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können: Kraft, Gewichtskraft, Einzelkraft, Angriffspunkt, Dimension, Einheit, Wirkungslinie, Richtungsvektor, Einheit Newton, Drehmoment, Einzelmoment, Kraftsystem, resultierende Kraft, resultierendes Moment, Bezugspunkt, Reduktion eines Kraftsystems, Äquivalenz von Kraftsystemen, Versetzungsmoment, ebenes Kraftsystem, zentrales Kraftsystem, Kräftepaar, freies Moment, Volumenkraftdichte, Flächenkraftdichte, Flächenlast, Druck, Normalspannung, Schubspannung, Luftdruck, Linienkraftdichte, Streckenlast, Momentendichten, Volumenmittelpunkt, Flächenmittelpunkt, Linienmittelpunkt

Die Kenntnis des folgenden Begriffs wird empfohlen: Spannungsvektor

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln

Kraftvektor

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

Einheit einer Kraft (Newton)

$$1 \cdot \text{N} = 1 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Wirkungslinie einer Einzelkraft

$$\mathbf{r}_W(\lambda) = \mathbf{r} + \lambda m \mathbf{e}_F \quad \mathbf{e}_F = \frac{\mathbf{F}}{|\mathbf{F}|} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Drehmoment einer Einzelkraft bez. Punkt C

$$\mathbf{M}_C = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$$

Einheit eines Drehmoments

$$1 \cdot \text{N} \cdot \text{m} = 1 \cdot \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

Kraftsystem

$$\{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n\} = \{\mathbf{F}_i; \mathbf{r}_i\}$$

Resultierende Kraft eines Kraftsystems

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Resultierendes Moment eines Kraftsystems bez. Punkt C

$$\mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_i$$

Umrechnung von Drehmomentenvektoren für verschiedene Bezugspunkte

$$\mathbf{M}_{C_2} = \mathbf{M}_{C_1} + (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) \times \mathbf{F} \quad \mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Äquivalenzbedingungen für Kraftsysteme

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^* \quad \mathbf{M}_C = \mathbf{M}_C^*$$

Versetzungsmoment bei Verschiebung der Kraft \mathbf{F} von \mathbf{r}_1 nach \mathbf{r}_2

$$\mathbf{M}_{V0} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}$$

Resultierende Kraft einer Volumenkraftdichte

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV$$

Resultierendes Moment einer Volumenkraftdichte bez. Pkt. C

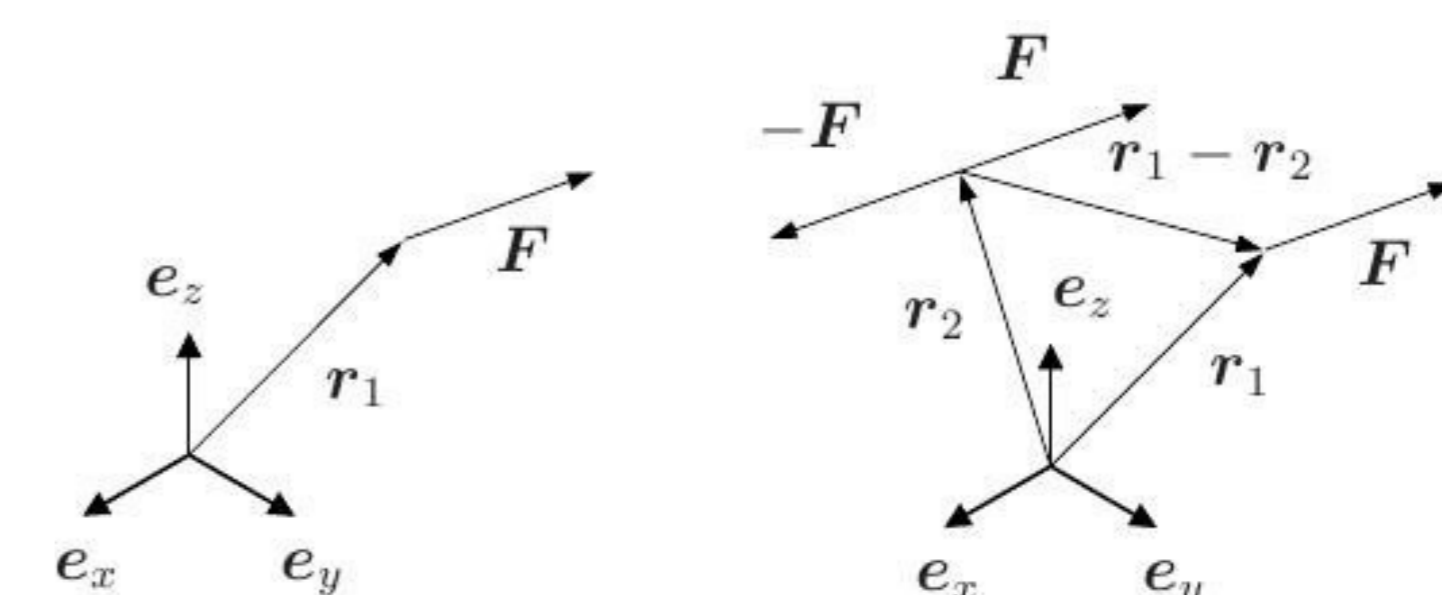
$$\mathbf{M}_C = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V(\mathbf{r}) dV$$

Beispiele

- Gegeben sind die Kraft $\mathbf{F} = 1\text{N} \mathbf{e}_x + 2\text{N} \mathbf{e}_y$ mit dem Angriffspunkt $\mathbf{r} = 3\text{m} \mathbf{e}_x + 2\text{m} \mathbf{e}_y$ sowie der Bezugspunkt $\mathbf{c} = 1\text{m} \mathbf{e}_x + 1\text{m} \mathbf{e}_y$. Berechnen Sie das Moment bezüglich des Punktes C.
- Um eine Vorstellung von der Größenordnung eines Newton zu bekommen, kann man die Gewichtskraft betrachten. Die Gewichtskraft G eines Körpers ist durch $G = mg$ gegeben. Hier ist m die Masse des Körpers. $g \approx 9,81\text{m/s}^2$ ist die Erdbeschleunigung. Der Masse eines Kilogramms entspricht eine Gewichtskraft von ca. 10N.
- Um eine Anschauung von der Größenordnung eines Newtonmeter zu bekommen, kann wiederum die Gewichtskraft herangezogen werden. Der Masse eines Kilogramms entspricht eine Gewichtskraft von ca. 10N. Erzeugt diese Gewichtskraft ein Drehmoment mit einem Hebelarm der Länge 1m, dann hat dieses Moment einen Betrag von ca. 10Nm.
- Der mittlere Luftdruck (Normalspannung) der Atmosphäre beträgt auf Meereshöhe ca. $p = 101325\text{Pa}$ oder äquivalent 1013,25hPa (Hektopascal), 1013,25mbar (Millibar) und 0,1013MPa (Megapascal). Die Tagesschwankungen betragen 0,5 bis 1hPa. Die resultierende Kraft des Luftdrucks auf einen Quadratmeter ist $F = pA = 101325\text{N}$. Diese Gewichtskraft entspricht einer Masse von zehn Tonnen im erdnahen Schwerfeld.
- Eine Streckenlast, allgemein gegeben durch $\mathbf{q}(x) = q(x)\mathbf{e}_z$, wirkt im Bereich $x \in [0, l]$. Berechnen Sie die resultierende Kraft, deren Wirkungslinie und das resultierende Moment bezüglich des Koordinatenursprungs.
- Eine Streckenlast $\mathbf{q}(x) = (q_0 x/l)\mathbf{e}_z$ wirkt im Bereich $x \in [0, l]$. Berechnen Sie die resultierende Kraft, deren Wirkungslinie und das resultierende Moment bezüglich des Koordinatenursprungs.

Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Erklären Sie anhand der Abbildung den Begriff Versetzungsmoment.



- Warum ist das Moment eines Kräftepaars ein freies Moment?
- Was gilt allg. für die resultierenden Kräfte und Momente eines ebenen Kraftsystems?
- Skizzieren Sie zwei verschiedene aber statisch äquivalente Kraftsysteme.
- Nennen Sie Beispiele für Volumen-, Flächen- und Linienkraftdichten.
- Geben Sie die Einheit einer Volumen-, Flächen- und Linienkraftdichte an.
- Wo greift die resultierende Kraft einer konstanten Streckenlast an?
- Wo greift die resultierende Kraft einer dreiecksförmigen Streckenlast an?
- Wie berechnet man den Angriffspunkt einer Streckenlast?

Statik starrer Körper

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können: Gleichgewichtssystem, starre Körper, Gleichgewichtsbedingung, Freischneiden, Schnittprinzip, Freikörperbild, äußere Kraft, innere Kraft, Schnittufer, Reaktionsprinzip, kinematischer Freiheitsgrad, Massenpunkt, Translationsfreiheitsgrad, Rotationsfreiheitsgrad, Zwangsbedingung, Lager, Verbindungselement, Gelenk, Reaktionskraft, Reaktionsmoment, eingeprägte Kraft, eingepprägtes Moment, kinematische Bestimmtheit, statische Bestimmtheit

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln und Symbole

- Definition eines Gleichgewichtssystems von Einzelkräften

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{0}, \quad \mathbf{M}_C = \sum_{i=1}^n (\mathbf{r}_i - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

- Kräftegleichgewicht in Komponentenschreibweise

$$F_x = \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0 \quad F_y = \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0 \quad F_z = \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0$$

- Momentengleichgewicht in Komponentenschreibweise

$$M_{Cx} = \sum_{i=1}^m M_{Cix} = 0 \quad M_{Cy} = \sum_{i=1}^m M_{Ciy} = 0 \quad M_{Cz} = \sum_{i=1}^m M_{Ciz} = 0$$

- Kräfte- und Momentengleichgewicht für ebene Kraftsysteme

$$F_x = \sum_{i=1}^m F_{ix} = 0 \quad F_y = \sum_{i=1}^m F_{iy} = 0 \quad M_{Cz} = \sum_{i=1}^m M_{Ciz} = 0$$

- Bei der Berechnung von Auflager- und Verbindungsreaktionen empfiehlt sich folgende Vorgehensweise:

- Erstellung des Freikörperbildes
 - Definition des Randes des betrachteten Teilsystems
 - Herauslösung des Teilsystems
 - Eintragung der eingepprägten Kräfte und Momente
 - Eintragung der Reaktionskräfte und -momente (Reaktionsprinzip beachten!)
- Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen
- Analyse bzw. Lösung des Gleichungssystems

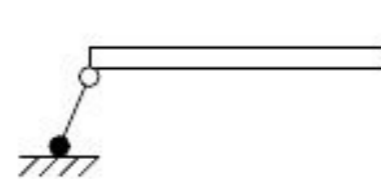
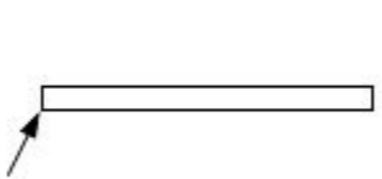

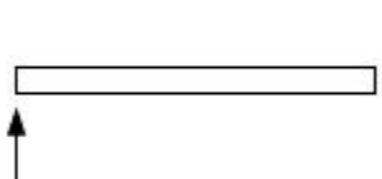





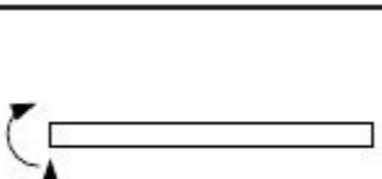

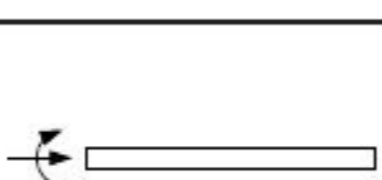
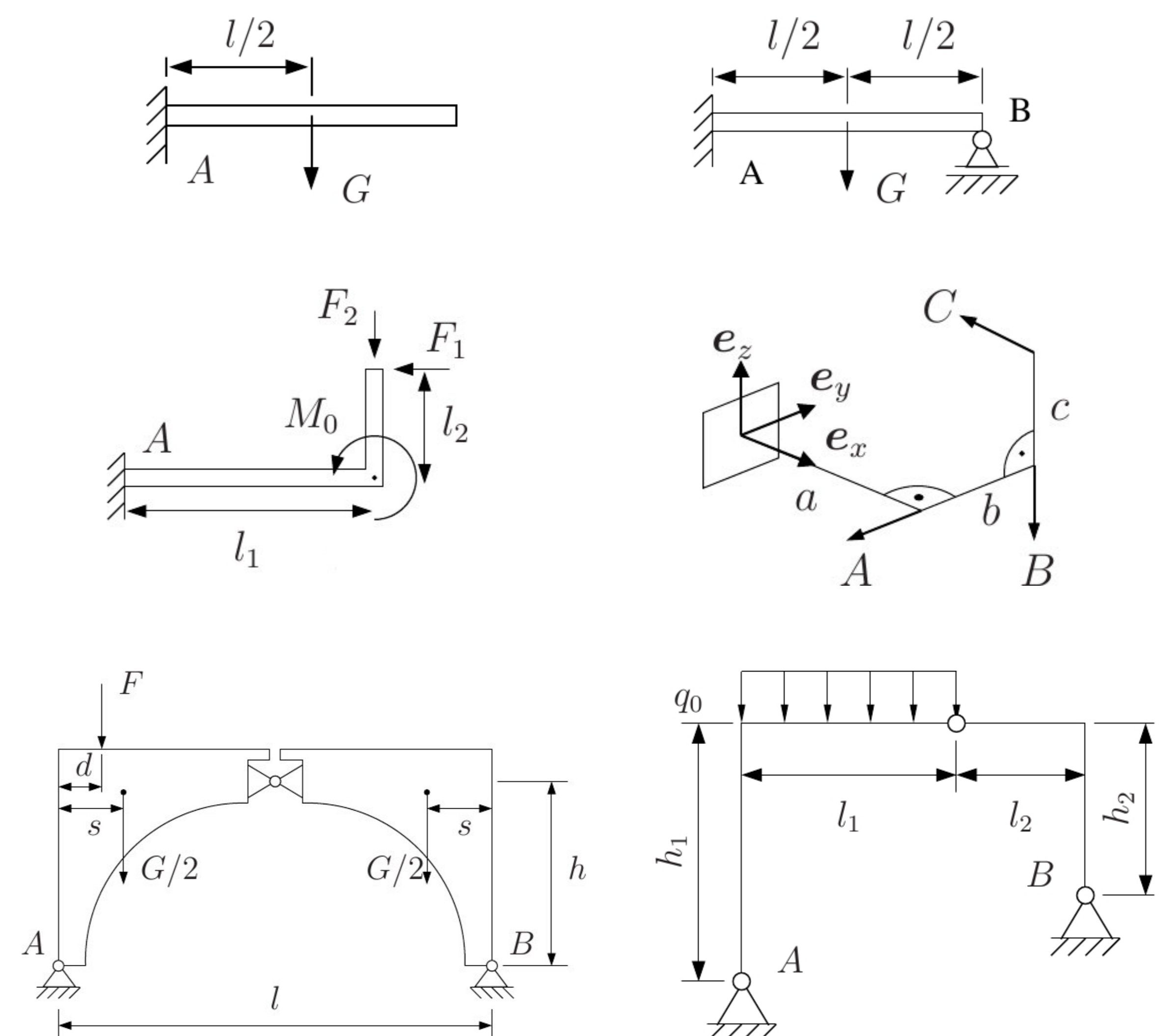
	Symbol	Reaktionskräfte
Pendelstütze		
Gleitlager		
gelenkiges Lager		
Parallelführung		
Schiebehülse		
Einspannung		

Abb.: Lagerungen für ebene Tragwerke (Auswahl)

Beispiele



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Bestimmen Sie für die oben angegebenen Beispiele die Freikörperbilder und die Reaktionsgrößen.
- Gibt es eine Konvention für die Vorzeichen von Reaktionskräften?
- Warum sind die Schnittgrößen an einem positiven und negativen Schnittufer entgegengesetzt gleich?
- Nennen Sie eine notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit eines ebenen und eines räumlichen Systems von Körpern.
- Geben Sie jeweils ein Beispiel für ein einfach, zweifach und dreifach kinematisch unbestimmtes System an.
- Geben Sie jeweils ein Beispiel für ein einfach, zweifach und dreifach statisch unbestimmtes System an.
- Wieviele kinematische Freiheitsgrade hat ein starrer Körper im dreidimensionalen Fall?
- Wieviele kinematische Freiheitsgrade hat ein deformierbarer Körper im dreidimensionalen Fall?
- Was impliziert die statische Unbestimmtheit für die Berechnung der Reaktionsgrößen?
- Deuten Sie die Bestimmung der Reaktionsgrößen durch Gleichgewichtsbedingungen als Lösung eines linearen Gleichungssystems. Was determiniert die Koeffizientenmatrix und was den Unbekanntenvektor des Gleichungssystems?
- Unter welcher Voraussetzung ist die Approximation von Bauteilen durch starre Körper sinnvoll?

Schnittgrößen in Stäben, Balken und Fachwerken

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können: Linientragwerk, Flächentragwerk, Stab, Balken, Schnittkraft, Schnittmoment, Differentialgleichung der Schnittkraft, Differentialgleichung des Schnittmoments, positives/negatives Schnittufer, Normalkraft, Torsionsmoment, Biegemoment, Fachwerk, ideales Fachwerk, Knoten, Knotenschnittverfahren, Stabkraft, Ritter'sches Schnittverfahren

Die Kenntnis der folgenden Begriffe wird empfohlen: Differentialgleichung, gewöhnliche Differentialgleichung, Taylorreihenentwicklung

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln und Symbole

Schnittkraft

$$\mathbf{Q} = N\mathbf{e}_x + Q_y\mathbf{e}_y + Q_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} N \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix}$$

Schnittmoment

$$\mathbf{M} = M_T\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y + M_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} M_T \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

Linienkraftdichte

$$\mathbf{q} = n\mathbf{e}_x + q_y\mathbf{e}_y + q_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} n \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

Linienmomentendichte

$$\mathbf{m} = m_T\mathbf{e}_x + m_y\mathbf{e}_y + m_z\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} m_T \\ m_y \\ m_z \end{pmatrix}$$

Differentialgleichung der Schnittkraft

$$\frac{d\mathbf{Q}(s)}{ds} = -\mathbf{q}(s)$$

Differentialgleichung des Schnittmoments

$$\frac{d\mathbf{M}(s)}{ds} = -\mathbf{m}(s) - \mathbf{e}_T \times \mathbf{Q}(s)$$

Schnittgrößendifferentialgleichungen für den räumlichen Fall

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \quad \frac{dQ_y(x)}{dx} = -q_y(x) \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x)$$

$$\frac{dM_T(x)}{dx} = -m_T(x)$$

$$\frac{dM_y(x)}{dx} = -m_y(x) + Q_z(x) \quad \frac{dM_z(x)}{dx} = -m_z(x) - Q_y(x)$$

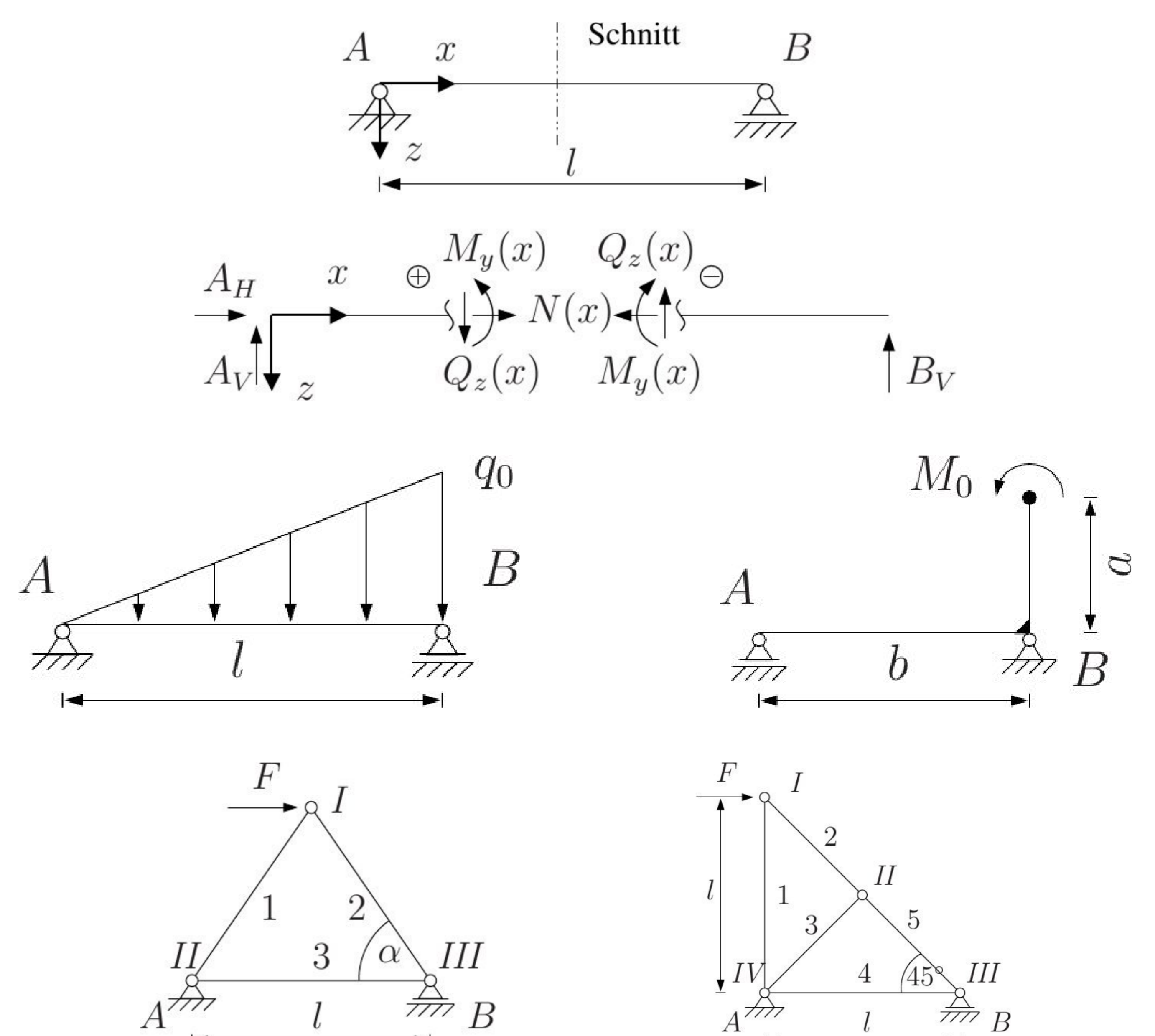
Schnittgrößendifferentialgleichungen für den ebenen Fall

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \quad \frac{dQ_z(x)}{dx} = -q_z(x) \quad \frac{dM_y(x)}{dx} = -m_y(x) + Q_z(x)$$

Schnittgrößendifferentialgleichungen für den ebenen Fall (vereinfachte Notation)

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \quad \frac{dQ(x)}{dx} = -q(x) \quad \frac{dM(x)}{dx} = -m(x) + Q(x)$$

Beispiele



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Bestimmen Sie für die oben angegebenen Beispiele die Freikörperbilder, die Reaktions- und die Schnittgrößen.
- Interpretieren Sie die Komponenten von \mathbf{q} , \mathbf{Q} und \mathbf{M} .
- Formulieren Sie die Schnittgrößendifferentialgleichungen für den ebenen Fall in Worten.
- Unterscheiden Sie zwischen den Begriffen 'Stab' und 'Balken'.
- Nennen Sie zwei Möglichkeiten zur Berechnung von Schnittgrößen.
- Welche Aussagen können zu $Q(x)$ in Abhängigkeit von $q(x)$ gemacht werden?
- Erklären Sie die Vorzeichenkonvention für die Schnittgrößen.
- Wie viele und welche Schnittgrößen gibt es im zweidimensionalen Fall?
- Erklären Sie den Unterschied zwischen dem Knotenschnittverfahren und dem Ritter'schen Schnittverfahren.
- Welche Konvention gilt für das Vorzeichen von Stabkräften?
- Wodurch sind die Stabkräfte an einem Knoten eines idealen Fachwerks charakterisiert?

Arbeit, Energie und Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können:

Leistung, Arbeit, konservative Kraft, Federsteifigkeit, konservatives Moment, Drehfeder, Drehfedersteifigkeit, potentielle Energie, virtuelle Verschiebung, virtuelle Verdrehung, Prinzip der virtuellen Verschiebungen, stabiles Gleichgewicht, instabiles Gleichgewicht, indifferentes Gleichgewicht

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln und Symbole

- Leistung einer Kraft

$$L = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

- Arbeit einer Kraft

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{v}(t) dt$$

- Arbeit eines Drehmoments (vektorielle Form)

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}(t) \cdot \boldsymbol{\omega}(t) dt$$

- Arbeit eines Drehmoments (skalare Form)

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} M(t) \omega(t) dt$$

- Konservative Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{dU_F(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}$$

- Konservatives Moment

$$M = -\frac{dU_M(\varphi)}{d\varphi}$$

- Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV)

$$\delta A_a = \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^n \mathbf{M}_j \cdot \delta \varphi_j = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}_i, \delta \varphi_j$$

- PdvV für den Sonderfall konservativer Kräfte und Momente

$$\delta U = 0 \quad U = \sum_{i=1}^m U_{F_i}(\mathbf{u}_i) + \sum_{j=1}^n U_{M_j}(\varphi_j)$$

- Zusammenhang von virtuellen Verschiebungen und Verdrehungen bei einem starren Körper

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \boldsymbol{\varphi} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

- Hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines Minimums der potentiellen Energie eines starren Körpers

$$\delta^2 U > 0$$

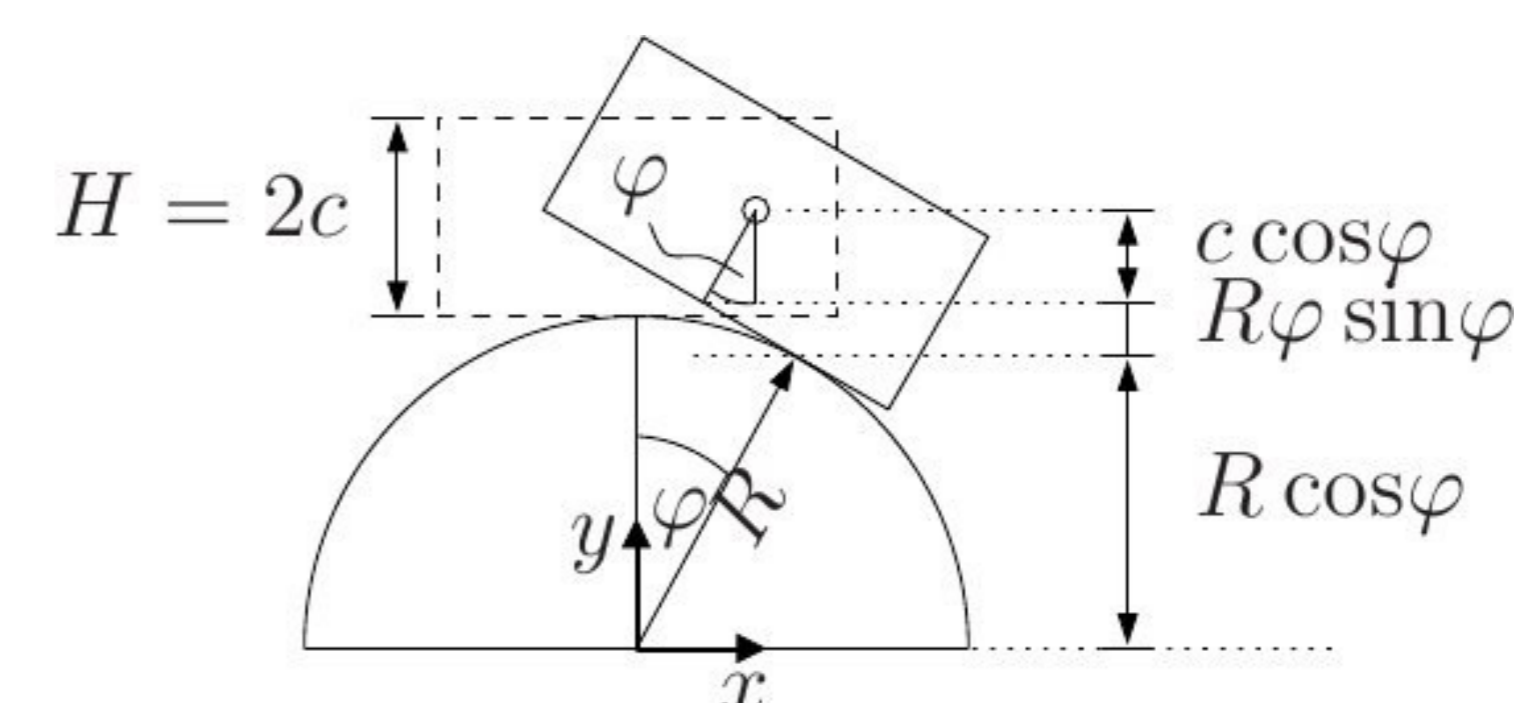
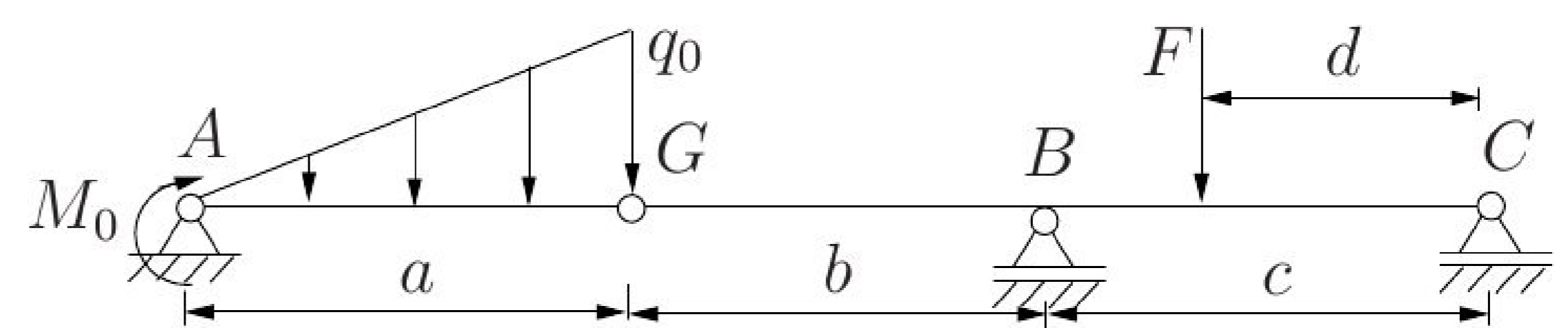
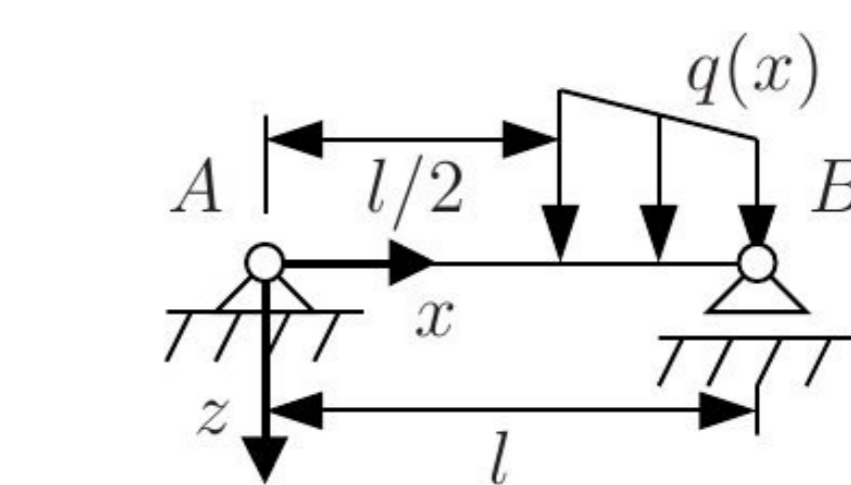
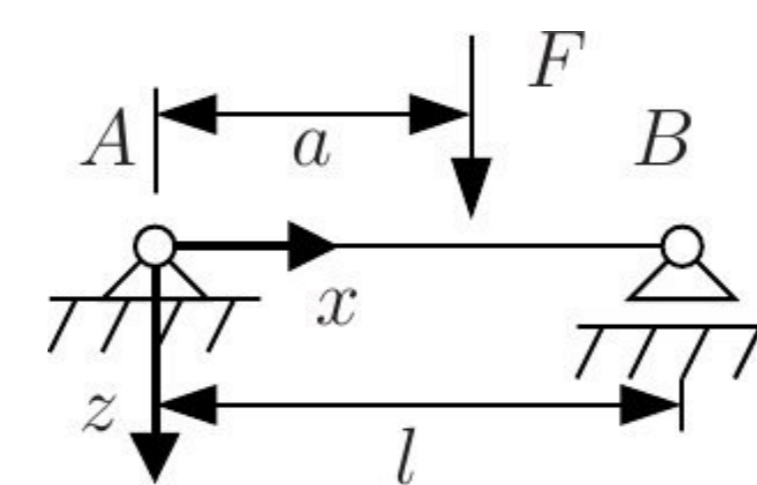
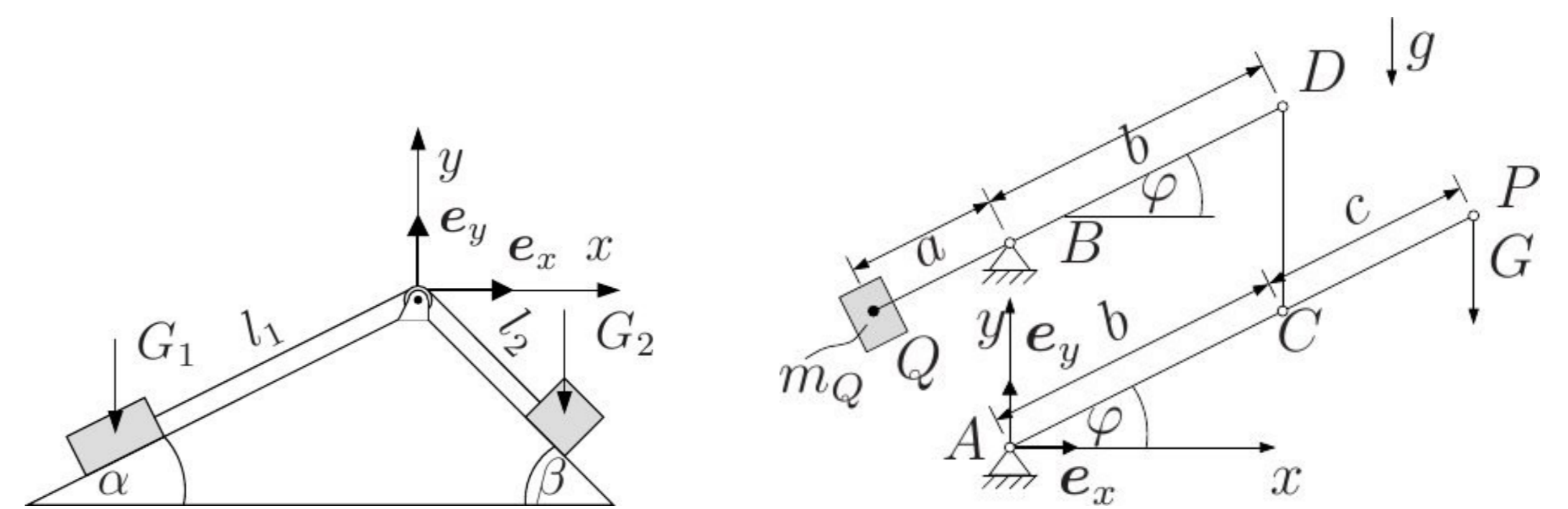
- Variation

Auf eine umfassende Definition des Variationsbegriffs wird hier verzichtet. Für die Lösung der in diesem Kapitel diskutierten Problemstellungen sind die folgenden Rechenvorschriften für Skalarfunktionen f einer oder mehrerer Variablen ausreichend:

$$\delta f(u) = \frac{df(u)}{du} \delta u;$$

$$\delta f(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial u_i} \delta u_i$$

Beispiele



Anmerkung zur Berechnung von Lagerreaktionen mit dem PdvV: Es wird immer genau ein Freiheitsgrad gelöst, um eine Lagerreaktion zu berechnen. Soll beispielsweise eine vertikale Auflagerreaktion bestimmt werden, so wird eine virtuelle Verschiebung in dem betrachteten Lagerpunkt in vertikaler Richtung zugelassen. Alle anderen Lagerungen müssen erhalten bleiben. Die zu berechnende Lagerkraft wird dann als äußere Kraft aufgefasst. Es ist zu beachten, dass zu jeder Berechnung einer Lagerkraft eine eigene Skizze gehört, in der die virtuelle Verschiebung dargestellt wird. Auf ähnliche Weise wird bei der Berechnung von Schnittgrößen und äußeren Lasten vorgegangen.

Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie die oben genannte Fachbegriffe.
- Diskutieren Sie die Einheiten der unter Ausgewählte Formeln und Symbole angegebenen Größen.
- Welche Eigenschaften haben virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen?
- Formulieren Sie das PdvV in Worten.
- Interpretieren Sie mechanisch das PdvV für konservative Systeme.
- Wenden Sie das PdvV für die Auswertung der oben dargestellten Beispiele an.

Zug-Druck-Stäbe

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können:

Elastisches Materialverhalten, einachsiger Spannungszustand, Flächenkraftdichte, Spannung, Normalspannung, Verschiebung, Verzerrung (Dehnung), Verschiebungs-Verzerrungs-Relation, relative Längenänderung, inhomogenes Materialverhalten, Hooke'sches Gesetz, Spannungs-Dehnungs-Relation, Materialgesetz, Elastizitätsmodul, Querkontraktionszahl, Poissonzahl, Festigkeitsgrenze, Dimensionierung, zulässige Spannung, Zug-Druck-Feder, Federsteifigkeit, Drehfeder, Federsystem, Federschaltung, Parallelschaltung, Reihenschaltung, effektive Steifigkeit, Zug-Druck-Steifigkeit, Verschiebungsdifferentialgleichung, Spannungskonzentration, Kerbe, Kerbspannungsfaktor (Formzahl), statisch unbestimmtes Problem, Thermoelastizität, Temperaturdehnung, thermischer Ausdehnungskoeffizient

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln und Symbole

■ Normalkraft

$$N(x) = \int \int \sigma(x) dy dz = \sigma(x) \int \int dy dz = \sigma(x)A(x)$$

■ Verzerrung oder Dehnung

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx}$$

■ Hooke'sches Gesetz (homogener und inhomogener Fall)

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) \quad \sigma(x) = E(x)\varepsilon(x)$$

■ Querkontraktions- oder Poissonzahl

$$\nu = -\frac{\varepsilon_q}{\varepsilon_l}$$

■ Zulässige Spannungen

$$-\sigma_{zul}^- \leq \sigma \leq \sigma_{zul}^+$$

■ Federsteifigkeiten (Zug-Druck-Feder, Drehfeder)

$$F = C_u \Delta l \quad M = C_\varphi \Delta \varphi$$

■ Effektive Federsteifigkeit (Parallelschaltung, Reihenschaltung)

$$C = \sum_{i=1}^n C_i \quad C = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

■ Verschiebungsdifferentialgleichung

$$\frac{d}{dx} \left(E(x)A(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = -n(x)$$

■ Kerbspannungsfaktor

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{mittel}}$$

■ Zerlegung der Dehnung bei thermoelastischen Problemen

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_\sigma(x) + \varepsilon_\theta(x) \quad \varepsilon_\sigma(x) = \frac{\sigma(x)}{E(x)} \quad \varepsilon_\theta(x) = \alpha(x)\Delta\theta(x)$$

■ Thermoelastisches Hooke'sches Gesetz (spannungsexplizit)

$$\sigma(x) = E(x)(\varepsilon(x) - \varepsilon_\theta(x)) = E(x)(\varepsilon(x) - \alpha(x)\Delta\theta(x))$$

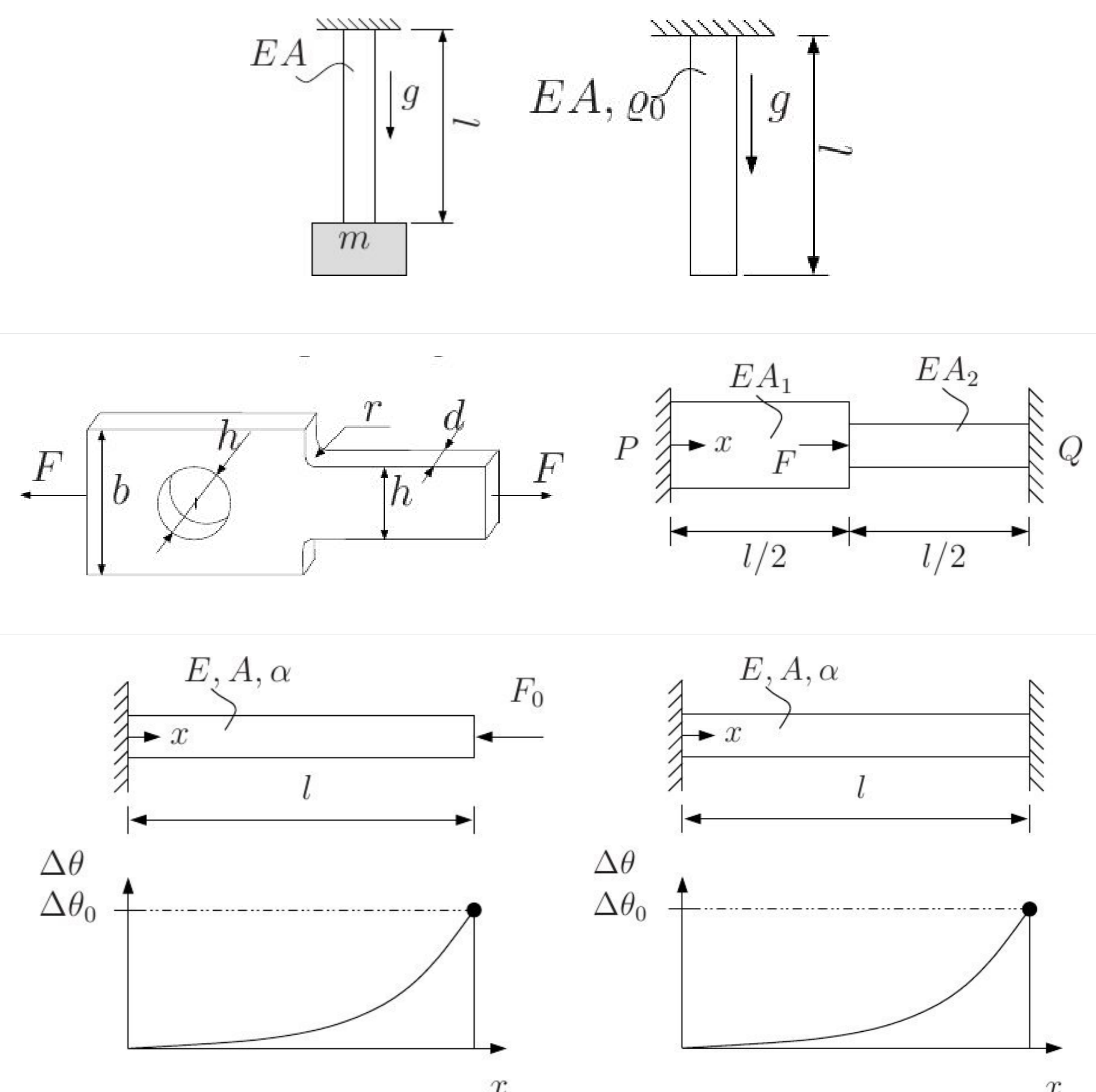
■ Verschiebungsdifferentialgleichung (thermoelastischer Fall)

$$\frac{du(x)}{dx} = \frac{N(x)}{E(x)A(x)} + \alpha(x)\Delta\theta(x)$$

Typische Materialparameter

Material	E [MPa]	ν [-]	α [$10^{-6}K^{-1}$]	σ_{zul}^\pm [MPa]
Stahl	210000	0,3 ... 0,34	12	140 ... 270
Aluminium	70000	0,32 ... 0,34	23	100
Kupfer	120000	0,33 ... 0,36	17	40
Beton	30000	0,2	10	$\sigma_{zul}^- = 8 \dots 15$

Beispiele



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Diskutieren Sie für die unter Beispielen angegebenen Lastfälle die Bestimmung von Lagergrößen, Spannungen, Dehnungen und Verschiebungen
- Erklären Sie das Hooke'sche Gesetz für den rein elastischen und den thermoelastischen Fall.
- Diskutieren Sie die Bedeutung und die Einheiten der folgenden Begriffe: Elastizitätsmodul, Zug-Druck-Steifigkeit, Federsteifigkeit, Querkontraktionszahl, Ausdehnungskoeffizienten, zulässige Spannungen.
- Erläutern Sie die Vorgehensweise bei statisch unbestimmten Problemen.
- Erklären Sie die Abschätzung von Spannungskonzentrationen bei Kerben.

Statik der undehnbaren Seile

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können:

Seilcurve, Seilkraft, ideales Seil, Differentialgleichung der Seilkraft, Horizontalkraft, Vertikalkraft, Differentialgleichung der Seilcurve, Seilparameter, Hyperbolicus-Funktionen

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Ausgewählte Formeln und Symbole

Beispiele für Belastungstypen



Differentialgleichung der Seilkraft

$$\frac{dS(s)}{ds} = -q(s)$$

Differentialgleichung der Seilkraft in Komponenten

$$\frac{dH(s)}{ds} = -q_H(s) \quad \frac{dV(s)}{ds} = -q_V(s)$$

Sonderfall reiner Vertikallasten (Parametrisierung mit s)

$$\frac{dH(s)}{ds} = 0 \quad \frac{dV(s)}{ds} = -q_V(s) = q(s)$$

Sonderfall reiner Vertikallasten (Parametrisierung mit x)

$$\frac{dH(x)}{dx} = 0 \quad \frac{dV(x)}{dx} = q(x)$$

Differential der Bogenlänge

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'(x)^2} dx$$

Zusammenhang zwischen den Streckenlasten $q(x)$ und $q(s)$

$$q(x) dx = q(s) ds \quad q(x) = q(s) \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Differentialgleichung der Seilcurve (Typen 1 und 2)

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{H_0}$$

Differentialgleichung der Seilcurve (Typ 3)

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = \frac{q_0}{H_0} \sqrt{1 + y'(x)^2}$$

Lösung der Differentialgleichung für Typ 3

$$y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + y_0 \quad y_0 = y(0) - a$$

Bogenlänge für Typ 3

$$s(x) = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Hyperbolicus-Funktionen

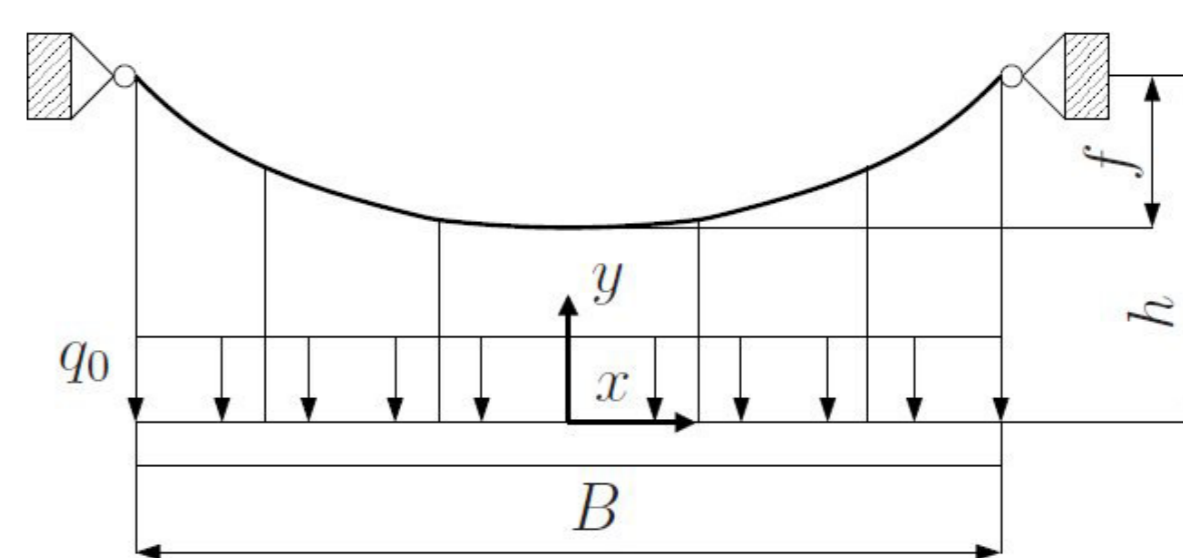
$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x))$$

Identität

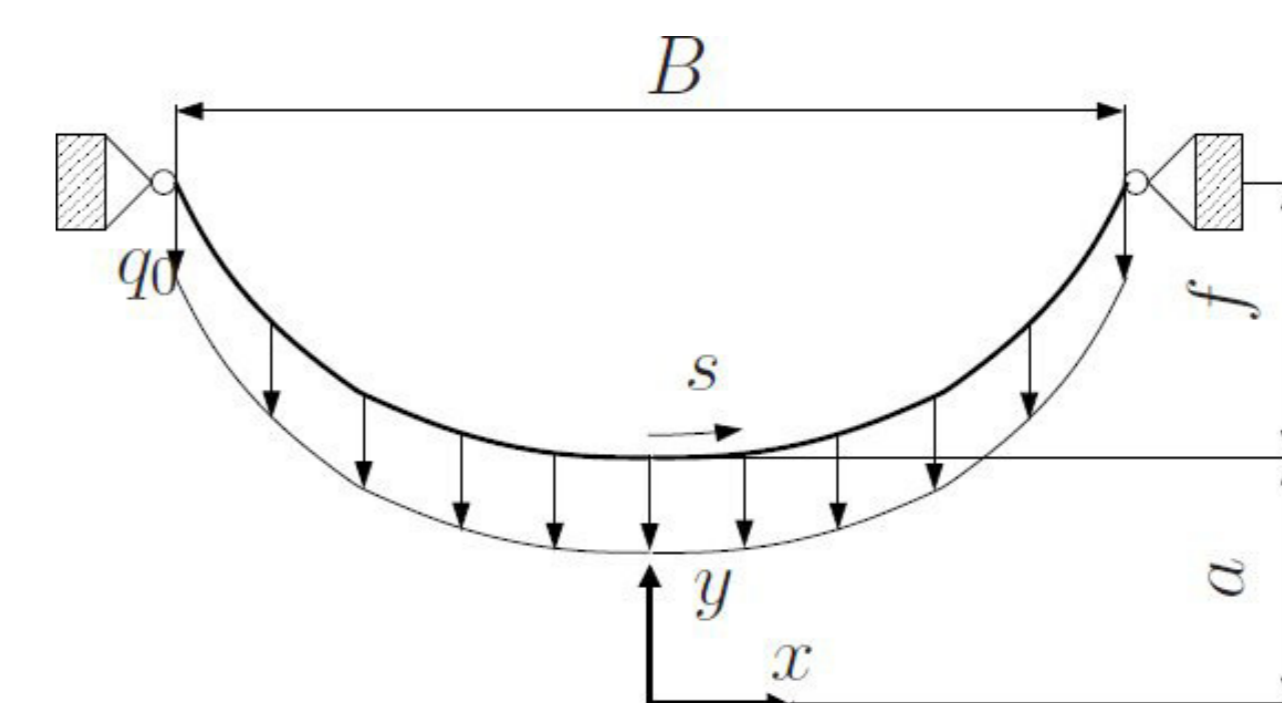
$$\sinh^2(x) + 1 = \cosh^2(x)$$

Beispiele

- Eine Brücke der Länge $B = 2b$ sei an einem Seil befestigt, dessen Eigengewicht vernachlässigbar sei. Der Durchhang f des Seils, die Höhe h und die Streckenlast $q(x) = q_0$ sind gegeben. Man bestimme die Seilcurve $y(x)$ und die Seilkräfte H_0 und $V(x)$.

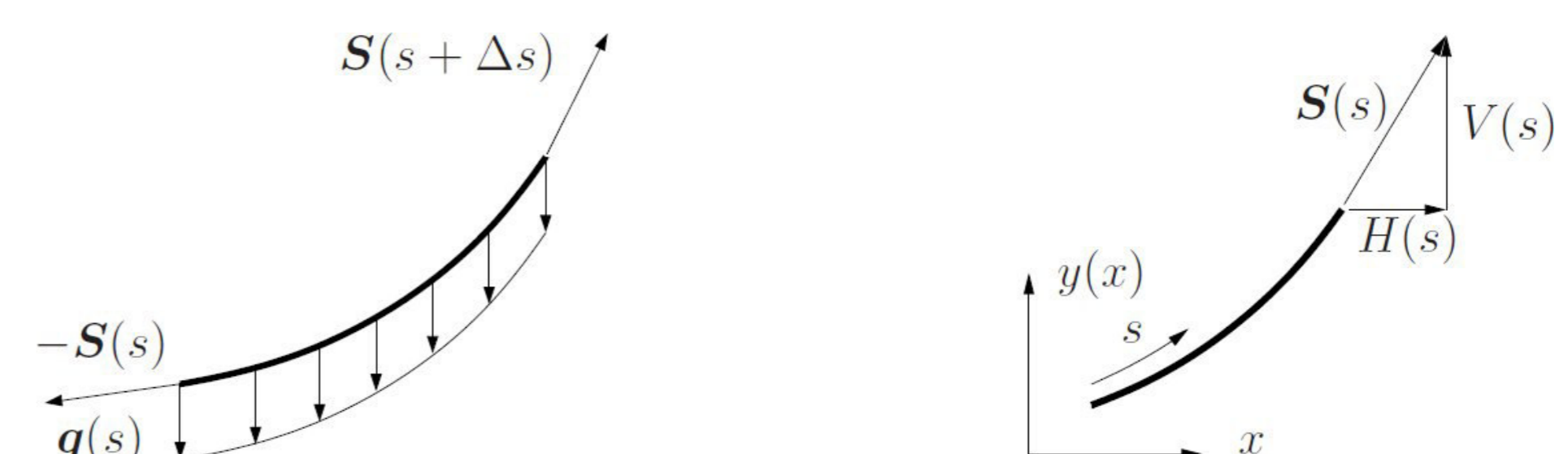


- Ein Seil der Länge $L = 2l$ ist zwischen zwei Lagern mit dem Abstand $B = 2b$ gespannt. Die Streckenlast infolge des Eigengewichts des Seils ist $q(s) = q_0$. Man gebe die Gleichung für den Seilparameter $a = H_0/q_0$ an und bestimme den Durchhang f , die Horizontalkraft H_0 , die Vertikalkraft $V(x)$ und den Betrag der Seilkraft S als Funktion des Seilparameters a .



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Skizzieren Sie die angegebenen Hyperbolicus-Funktionen.
- Diskutieren Sie das Kräftegleichgewicht an einem Seilstück und den Zusammenhang zwischen $y'(x)$ sowie V und H .



- Erklären Sie die mechanischen Besonderheiten der drei behandelten Belastungsfälle.
- Erklären Sie den Unterschied zwischen den Streckenlasten $q(x)$ und $q(s)$.
- Diskutieren Sie die oben angegebenen Beispiele.
- Gegeben ist ein homogenes Seil der Massendichte ρ_0 und dem Durchmesser $2R_0$. Bestimmen Sie die Streckenlast $q(s) = q_0$ infolge des Eigengewichts des Seils.

Haftung und Gleitreibung, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

Arbeitsmaterial zur Lehrveranstaltung **Technische Mechanik 1** (Prof. Böhlke)

Fachbegriffe*

Die folgenden Begriffe müssen sicher angewendet werden können:

Haftung und Gleitreibung: Haften, Gleiten, Haftbedingung, Haftgrenzwinkel, Haftgrenzzahl, Selbsthemmung, Haftkegel, Haften von Seilen, ideales Seil, Seilkraft, Bogenlänge, Seilkurve, Differentialgleichung der Seilkraft, Coulomb'sches Gleitreibungsgesetz, Normalkraft, Reibungszahl

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt: Massendichte, Masse, Volumen, mittlere Massendichte, Mehrfachintegral, Volumenmittelpunkt, Symmetrieebene, Symmetrieachse, Zylinderkoordinaten, Massenmittelpunkt zusammengesetzter Körper, Newtonsches Gravitationsgesetz, Gravitationskonstante, Gewichtskraft, Erdbeschleunigung, Massenkraftdichte, Volumenkraftdichte, Schwerpunkt

*: alle genannten Begriffe finden sich im Index des Skriptes Technische Mechanik 1 (Böhlke, ITM)

Haftung und Gleitreibung

Ausgewählte Formeln und Symbole

- Haftbedingung

$$|\phi| \leq \phi_0$$

- Haftbedingung

$$|H| \leq \mu_0 N \quad N \geq 0$$

- Haftgrenzzahl für unterschiedliche Materialpaarungen

Materialpaarung	Haftgrenzzahl μ_0 [-]
Stahl auf Stahl	0,15 ... 0,5
Holz auf Holz	0,4 ... 0,6
Gummi auf Asphalt	0,7 ... 0,8
Al auf Al	1,1 ... 1,7

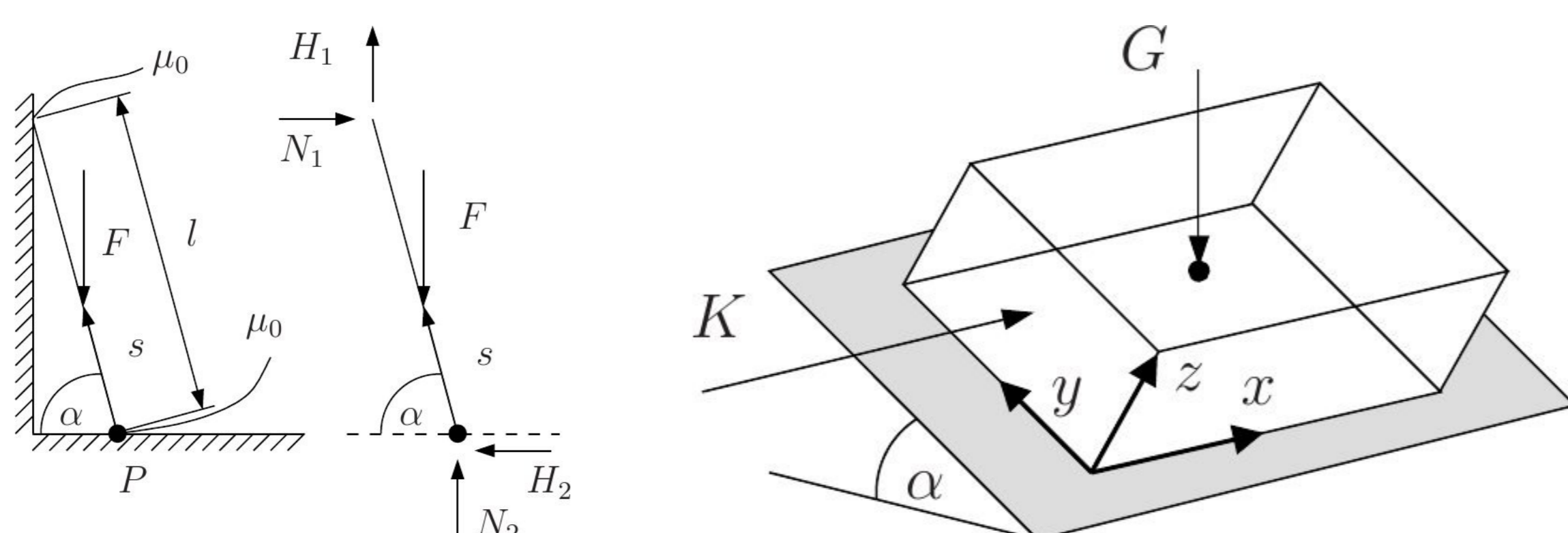
- Seilkraft

$$S = \exp(\mu_0 \Delta\varphi) S_0$$

- Coulomb'sches Reibungsgesetz

$$\mathbf{R} = -N(\mu \mathbf{e}_T + \mathbf{e}_N)$$

Beispiele



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Diskutieren Sie die oben angegebenen Beispiele.
- Ist die Haftkraft eine Reaktionskraft?
- Ist die Reibkraft eine Reaktionskraft?
- Diskutieren Sie die Anwendung der Formel für die Seilkraft für die Fälle a) $S > S_0$ und b) $S < S_0$ an einem Beispiel.

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

Ausgewählte Formeln und Symbole

- Volumen und Volumenmittelpunkt

$$V = \int_V dV \quad \mathbf{r}_V = \frac{1}{V} \int_V \mathbf{r} dV$$

- Masse und Massenmittelpunkt

$$m = \int_m dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) dV \quad \mathbf{r}_m = \frac{1}{m} \int_m \mathbf{r} dm$$

- Volumen- und Massenmittelpunkt zusammengesetzter Körper

$$\mathbf{r}_V = \sum_{i=1}^n \frac{V_i}{V} \mathbf{r}_{V_i} \quad \mathbf{r}_m = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{m} \mathbf{r}_{m_i}$$

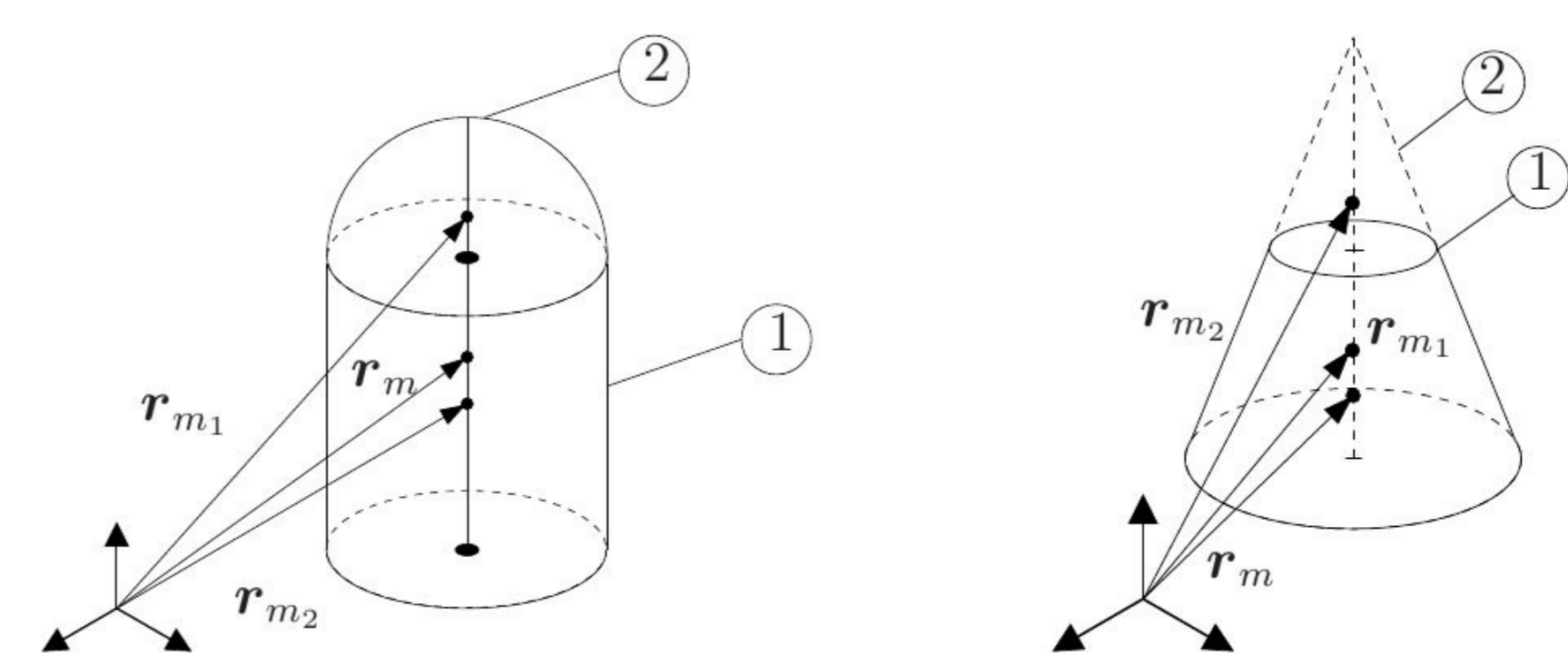
- Gravitationsgesetz

$$F = |\mathbf{F}| = \Gamma \frac{m_1 m_2}{\Delta r^2}$$

- Gewichtskraft

$$\mathbf{G} = \int_m \mathbf{g}(\mathbf{r}) dm = \int_V \rho(\mathbf{r}) \mathbf{g}(\mathbf{r}) dV$$

Beispiele



Ausgewählte Fragen

- Erklären Sie oben genannte Fachbegriffe.
- Diskutieren Sie die oben angegebenen Beispiele.
- Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Lösung von Mehrfachintegralen jeweils an einem Beispiel mit konstanten und variablen Integrationsgrenzen.
- Erklären Sie unter Verwendung einer Skizze die Interpretation von Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten.
- Geben Sie das infinitesimale Volumenelement in den folgenden Koordinatensystemen an: kartesische Koordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten.
- Erläutern Sie die Vorgehensweise bei der Bestimmung des Volumen- oder des Massenmittelpunkts zusammengesetzter Körper.
- Unter welcher Voraussetzung stimmen der Schwerpunkt und der Massenmittelpunkt eines Körpers überein?