

Modulteilprüfung **Technische Mechanik II**

25. August 2009

14.00 – 15.30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	25	20	20	15	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM II

Aufgabe 1

(insgesamt 25 Punkte)

Gegeben ist ein beidseitig fest eingespannter, linear elastischer Balken mit rechteckigem Querschnitt der Breite b und Höhe h (Abb. 1.1, links). Der Balken wird mit der konstanten Streckenlast q_0 belastet. Gegeben sind die konstante Streckenlast $q_0 > 0$, der Elastizitätsmodul E , die Länge l und das Flächenträgheitsmoment $I_y = bh^3/12$.

Hinweis: Verwenden Sie bei allen Berechnungen das angegebene Koordinatensystem.

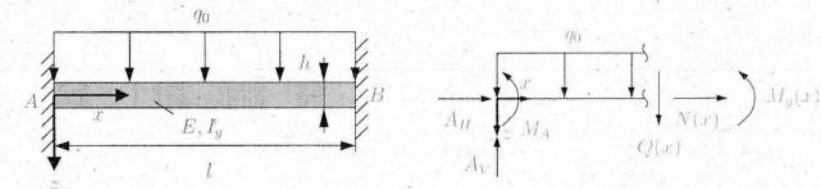


Abbildung 1.1: Links: beidseitig fest eingespannter Balken, rechts: Freikörperbild.

- 1.1) Geben Sie alle Randbedingungen an, die zur Lösung der Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung notwendig sind. Geben Sie jeweils an, ob es sich um geometrische oder physikalische Randbedingungen handelt.
- 1.2) Bestimmen Sie durch Lösen der Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung die Biegelinie $w(x)$, sowie den Wert der maximalen Durchbiegung.
- 1.3) Berechnen Sie den Verlauf des Biegemoments $M_y(x)$ durch Auswerten der Gleichgewichtsbedingungen an dem in Abbildung 1.1(rechts) dargestellten Freikörperbild. Setzen Sie die Größen A_V , A_H und M_A als bekannt voraus, d.h. verwenden Sie die Symbole A_V , A_H und M_A .
- 1.4) Stellen Sie den Verlauf von $M_y(x)$ im Bereich von $x \in [0, l]$ unter Verwendung von $A_V = q_0 l/2$ und $M_A = q_0 l^2/12$ dar.
- 1.5) Berechnen Sie die Spannungsverteilung $\sigma_{xx}(x, z)$ im Balken unter Vernachlässigung des Querkraftschubs. Geben Sie den Wert der betragsmäßig maximalen Spannungen σ_{xx} an. An welchen Stellen tritt diese betragsmäßig maximale Spannung auf?

Lösung zu Aufgabe 1

(Insgesamt 25 Punkte)

1.1) Geometrische Randbedingungen:

$$w(x=0) = 0, \quad w(x=l) = 0, \quad w'(x=0) = 0, \quad w'(x=l) = 0 \quad (1.1)$$

1.2) Integration der Biegeliniendifferentialgleichung 4. Ordnung und Einsetzen der geom. RB:

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI_y} (x^4 - 2lx^3 + l^2x^2) \quad (1.2)$$

Aus Symmetriegründen ist die Durchbiegung an der Stelle $x = l/2$ maximal mit

$$w(x=l/2) = \frac{q_0 l^4}{384EI_y} \quad (1.3)$$

1.3) Biegemomentenverlauf ohne Einsetzen der Lagerreaktionen:

$$M_y(x) = A_V x - \frac{q_0 x^2}{2} - M_A \quad (1.4)$$

1.4) Verlauf des Biegemoments unter Verwendung von $A_V = q_0 l/2$ und $M_A = q_0 l^2/12$:

$$M_y(x) = \frac{q_0}{12} (6lx - 6x^2 - l^2) \quad (1.5)$$

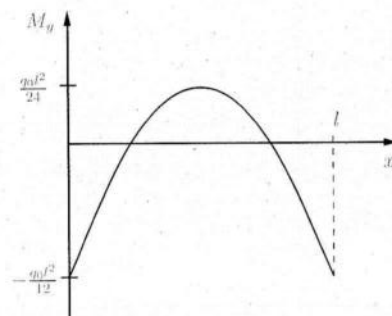


Abbildung 1.2: Verlauf des Biegemoments.

1.5) Spannungsverlauf:

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{q_0}{bh^3} (6lx - 6x^2 - l^2) z \quad (1.6)$$

Beträge der maximalen Spannungen:

$$\begin{aligned} |\sigma_{xx}^{max}| &= |\sigma_{xx}(x=0, z=-h/2)| = |\sigma_{xx}(x=l, z=-h/2)| \\ &= |\sigma_{xx}(x=0, z=h/2)| = |\sigma_{xx}(x=l, z=h/2)| = \frac{q_0 l^2}{2bh^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben ist eine einseitig eingespannte Welle aus Stahl mit dem Schubmodul G . Die Welle hat im Bereich zwischen der Einspannung ($x=0$) und dem Wellenabsatz ($x=l_1$) einen Radius von R_1 . Ab dem Wellenabsatz bei $x=l_1$ schließt sich ein Hohlquerschnitt mit Außenradius R_{2a} und Innenradius R_{2i} an. Der Wellenabsatz hat den Kerbradius r_K .

Hinweis: Verwenden Sie bei allen Berechnungen das angegebene Koordinatensystem.

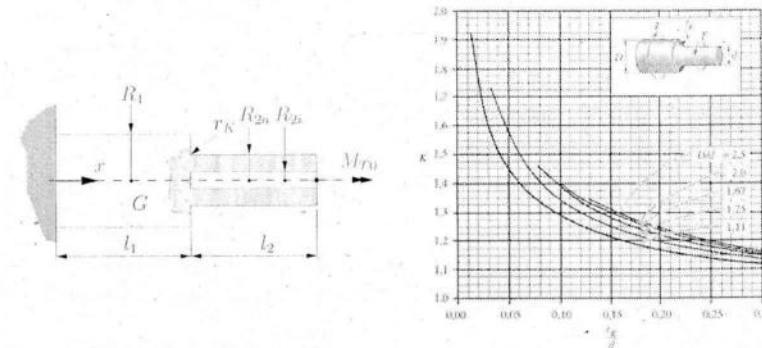


Abbildung 2.1: Links: Einseitig eingespannte, abgesetzte Welle mit Torsionsmoment, rechts: Kerbspannungsfaktoren für Torsionsbelastung

- 2.1) Berechnen Sie für die abgebildete Welle (Abb. 2.1, links) die polaren Flächenträgheitsmomente I_{p1} und I_{p2} der Wellenabschnitte.
- 2.2) Wie lauten die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen?
- 2.3) Bestimmen Sie unter Verwendung der Differentialgleichung für den Drillwinkel den Verlauf des Drillwinkels $\varphi(x)$.
- 2.4) Geben Sie den Schubspannungsverlauf $\tau(r, x)$ als Funktion des Radius und der Längskoordinate der Welle an.
- 2.5) Lesen Sie den Kerbspannungsfaktor K für den Wellenabsatz bei $x=l_1$ aus Abb. 2.1 (rechts) ab. Gehen Sie dabei von $R_1 = 31.25 \text{ mm}$, $R_{2a} = 25 \text{ mm}$ und $R_{2i} = 5 \text{ mm}$ aus. Der Kerbradius sei $r_K = 2.5 \text{ mm}$.
- 2.6) Bestimmen Sie den Betrag und die Lage der maximalen Schubspannung ohne und mit Berücksichtigung der Kerbwirkung.

Hinweis: Setzen Sie keine numerischen Werte für die Radien ein.

Lösung zu Aufgabe 2

(Insgesamt 20 Punkte)

2.1) Polare Flächenträgheitsmomente:

$$I_{p1} = \frac{\pi}{2} R_1^4, \quad I_{p2} = \frac{\pi}{2} (R_{2a}^4 - R_{2i}^4) \quad (2.1)$$

2.2) Geometrische Rand- und Übergangsbedingungen:

$$\vartheta_1(0) = 0, \quad \vartheta_1(l_1) = \vartheta_2(l_1) \quad (2.2)$$

2.3) Drillwinkel:

$$\vartheta_1'(x) = \frac{M_{T0}}{GI_{p1}}, \quad \vartheta_2'(x) = \frac{M_{T0}}{GI_{p2}} \quad (2.3)$$

Durch Integration und Einsetzen der Rand- und Übergangsbedingungen folgt

$$\vartheta_1(x) = \frac{M_{T0}}{GI_{p1}} x = \frac{2}{\pi} \frac{M_{T0}}{GR_1^4} x, \quad (2.4)$$

$$\vartheta_2(x) = \frac{2}{\pi} \frac{M_{T0}}{G} \left(\frac{x - l_1}{R_{2a}^4 - R_{2i}^4} + \frac{l_1}{R_1^4} \right) \quad (2.5)$$

2.4) Schubspannungsverlauf:

$$\tau_1(r, x) = \frac{2}{\pi} \frac{M_{T0}}{R_1^4} r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r \leq R_1 \quad \text{und} \quad 0 \leq x < l_1 \quad (2.6)$$

$$\tau_2(r, x) = \frac{2}{\pi} \frac{M_{T0}}{R_{2a}^4 - R_{2i}^4} r \quad \text{mit} \quad R_{2i} \leq r \leq R_{2a} \quad \text{und} \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \quad (2.7)$$

2.5) Kerbspannungsfaktor:

$$\frac{D}{d} = 1,25, \quad \frac{r_K}{d} = 0,05 \quad \Rightarrow \quad K = 1,575 \quad (2.8)$$

2.6) Der Betrag und die Lage der maximalen Schubspannung

– ohne Berücksichtigung der Kerbwirkung:

$$\tau_{max} = \tau_2(x, R_{2a}) = \frac{2}{\pi} M_{T0} \frac{R_{2a}}{R_{2a}^4 - R_{2i}^4} \quad \text{mit} \quad l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \quad (2.9)$$

– mit Berücksichtigung der Kerbwirkung:

$$\tau_{max,K} = K \tau_2(l_1, R_{2a}) = 1,575 \cdot \frac{2}{\pi} M_{T0} \frac{R_{2a}}{R_{2a}^4 - R_{2i}^4} \quad (2.10)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 20 Punkte)

Gegeben sind der folgende Spannungszustand mit $\sigma_0, \tau_0 > 0$ bzgl. der Orthonormalbasis $\{e_x, e_y, e_z\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \tau_0 & 0 \\ \tau_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_x, e_y, e_z\}} \quad (3.1)$$

und die elastischen Konstanten E und ν .*Hinweis:* Sämtliche Endergebnisse sind ausschließlich in Abhängigkeit von E, ν, σ_0, τ_0 anzugeben.

3.1) Zeichnen Sie qualitativ den zum gegebenen Spannungszustand gehörenden Mohr'schen Spannungskreis und kennzeichnen Sie alle zur Konstruktion nötigen Punkte.

3.2) Berechnen Sie die zum gegebenen Spannungszustand zugehörige Verzerrungsmatrix unter Annahme eines linearen isotropen Materialverhaltens.

3.3) Ermitteln Sie die Hauptspannungen des gegebenen Spannungszustandes. Achten Sie auf die Konvention zur Nummerierung der Hauptspannungen. Berechnen Sie weiterhin den Hauptachsenwinkel φ_0 .3.4) Berechnen Sie, ausgehend von der in der Aufgabenstellung gegebenen Spannungsmatrix (nicht im Hauptachsensystem rechnen), die von Mises'sche Vergleichsspannung.3.5) Berechnen Sie für den gegebenen Spannungszustand die volumenspezifische Ergänzungsenergie W^* .3.6) Berechnen Sie den Spannungsvektor t für die Ebene mit der Normalen $n = \sqrt{2}/2 e_x + \sqrt{2}/2 e_y$. Zerlegen Sie t in einen Anteil parallel und senkrecht zur Normalen n .

Lösung zu Aufgabe 3

(Insgesamt 20 Punkte)

3.1) Mohr'scher Kreis:

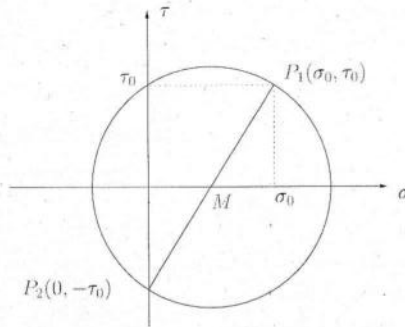


Abbildung 3.1: Mohr'scher Spannungskreis

3.2) Verzerrungsmatrix:

$$\epsilon = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \sigma_0 & (1+\nu)\tau_0 & 0 \\ (1+\nu)\tau_0 & -\nu\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\sigma_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

3.3) Hauptspannungen und Hauptachsenwinkel:

$$\sigma_1'' = \frac{1}{2} \left(\sigma_0 + \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2} \right), \quad \sigma_2'' = 0, \quad \sigma_3'' = \frac{1}{2} \left(\sigma_0 - \sqrt{\sigma_0^2 + 4\tau_0^2} \right) \quad (3.3)$$

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2\tau_0}{\sigma_0} \right) \quad (3.4)$$

3.4) v. Mises'sche Vergleichsspannung:

Unter Verwendung von

$$\sigma_v = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma'\| \quad (3.5)$$

folgt

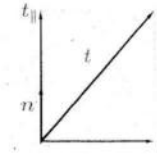
$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_0^2 + 3\tau_0^2} \quad (3.6)$$

3.5) volumenspezifische Ergänzungsenergie:

$$W^* = \frac{1}{2E} \sigma_0^2 + \frac{1+\nu}{E} \tau_0^2 \quad (3.7)$$

3.6) Spannungsvektor:

$$t = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} \sigma_0 & \tau_0 \\ \tau_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

Abbildung 3.2: Zerlegung des Spannungsvektors t Anteile von t :

$$t_{\parallel} = (t \cdot n)n = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{2}\sigma_0 + \tau_0 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$t_{\perp} = t - t_{\parallel} = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} \sigma_0 \\ -\sigma_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 15 Punkte)

Gegeben ist ein Balken (siehe Abb. 4.1) mit dem Flächenträgheitsmoment I_y , dem Elastizitätsmodul E und der Länge l , der bei $x = l$ mit der Einzelkraft F belastet wird. Bei $x = 0$ ist der Balken fest eingespannt, bei $x = l$ soll die Balkenmittellachse auch bei Verformung parallel zur x -Achse sein.

Anmerkung: Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

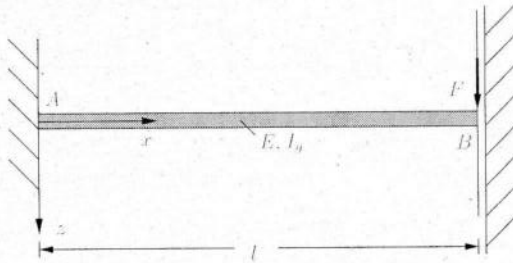


Abbildung 4.1: Balken belastet durch eine Einzelkraft

4.1) Zeichnen Sie das Freikörperbild des Balkens.

4.2) Geben Sie die geometrischen und physikalischen Randbedingungen für das Randwertproblem an, ohne Lagerreaktionen zu verwenden.

4.3) Welche der Ansatzfunktionen

$$w_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad w_3(x) = w_2(x) + a_3x^3$$

sind für

- (a) das Ritz'sche Verfahren,
- (b) das Galerkin'sche Verfahren

geeignet? Begründen Sie Ihre Antwort.

4.4) Berechnen Sie für das oben dargestellte Randwertproblem mittels der Ansatzfunktion $w_3(x) = a(\cos(\pi x/l) - 1)$ eine Näherungslösung nach dem Verfahren von Ritz. Zeigen Sie dazu zunächst, dass die notwendigen Randbedingungen erfüllt sind.

Hinweis:

$$\int_a^b \cos^2(\alpha x) dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4\alpha} \sin(2\alpha x) \right) \Big|_a^b$$

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

4.1) Freikörperbild:



Abbildung 4.2: Freikörperbild des Balkens

4.2) Randbedingungen:

- Geometrische Randbedingungen: $w(0) = 0$, $w'(0) = 0$, $w'(l) = 0$
- Physikalische Randbedingung: $w'''(l) = -F/EI_y$

4.3) -Verfahren von Ritz: Die Ansatzfunktionen $w_2(x)$ und $w_3(x)$ müssen die geometrischen Randbedingungen erfüllen.

- $w_2(x)$: Aus den geometrischen Randbedingungen folgt $w_2(x) \equiv 0$. Also ist $w_2(x)$ für das Verfahren von Ritz **nicht** geeignet.
- $w_3(x)$: Aus den geometrischen Randbedingungen folgt $w_3(x) = (-\frac{3}{2}a_3)x^2 + a_3x^3$. Die Ansatzfunktion ist für das Ritz'sche Verfahren geeignet.

-Verfahren von Galerkin: Die Ansatzfunktionen $w_2(x)$ und $w_3(x)$ müssen neben den geometrischen Randbedingungen auch die physikalischen Randbedingungen erfüllen.

- $w_2(x)$ ist auch für das Verfahren von Galerkin **nicht** anwendbar, da schon die geometrischen Randbedingungen $w_2(x) \equiv 0$ liefern.
- $w_3(x)$: Für das Verfahren von Galerkin darf die vierte Ableitung von $w_3(x)$ nicht verschwinden. Hier ist aber $w_3^{(4)} \equiv 0$. Die Funktion $w_3(x)$ kann also **nicht** als Ansatzfunktion für das Verfahren von Galerkin verwendet werden.

4.4) Anwendung des Verfahrens von Ritz:

- Überprüfung der geometrischen Randbedingungen: $w_3(0) = 0$, $w_3'(0) = 0 = w_3'(l)$ sind erfüllt.
- Bestimmung von Π_{ges} :

$$\Pi_{\text{ges}}(a) = \frac{1}{4}EI_y \frac{\pi^4}{l^3} a^2 + 2Fa$$

- Endgültige Form von $w_3(x)$:

$$\delta \Pi_{\text{ges}} = \frac{\partial \Pi_{\text{ges}}}{\partial a} \delta a = 0 \Rightarrow a = -\frac{4F^2}{EI_y \pi^4} \Rightarrow w_3(x) = \frac{4F^2}{EI_y \pi^4} \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right)$$

Aufgabe 5 – Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist der folgende Querschnitt eines Balkens mit den Koordinatensystemen $\{y, z\}$ im Schwerpunkt, und $\{\bar{y}, \bar{z}\}$ (siehe Abb. 5.1). Die im betrachteten Querschnitt wirkende Querkraft sei Q .

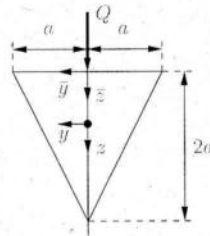


Abbildung 5.1: Querschnitt des Balkens mit Belastung

- 5.1) Schreiben Sie die im nachfolgenden MAPLE-Code definierten Größen in mathematischer Notation ohne Umformungen oder Änderungen. Um welche mechanischen Größen handelt es sich?
- ```
[> Groesse1 := -int(int(yq*zq, yq=-a+zq/2..a-zq/2), zq=0..2*a);
```
- ```
[> Groesse2 := 2*int(int(zq^2, zq=0..2*(a-yq)), yq=0..a);
```

Lösung:

2 Punkte

Deviationsmoment im $\bar{y}$ - $\bar{z}$ -System (Groesse1) und Flächenträgheitsmoment bzgl. $\bar{y}$ -Achse (Groesse2):

$$I_{yz} = - \int_0^{2a} \int_{-a+z/2}^{a-z/2} \bar{y}\bar{z} d\bar{y} d\bar{z}, \quad I_{\bar{y}} = 2 \int_0^a \int_0^{2(a-y)} \bar{z}^2 d\bar{z} d\bar{y},$$

- 5.2) Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code als Funktion2 definiert?

```
[> Funktion1 := unapply(4*a/3-z, z);
```

```
[> Funktion2 := unapply(-int(ztilde*Kfunktion1(ztilde),
```

```
ztilde=-2*a/3..z), z);
```

Lösung:

2 Punkte

Das statische Moment bzgl. der y -Achse, $S_y(z)$.

- 5.3) Im Folgenden seien I_y das Flächenträgheitsmoment bzgl. der y -Achse, Q die Querkraft, $S_y(z)$ die Funktion des statischen Moments bzgl. der y -Achse und $b(z)$ die Funktion der Querschnittsbreite. Welche zwei Aussagen bzgl. der maximalen Schubspannungen im gegebenen Querschnitt kann aus nachfolgendem MAPLE-Code gefolgert werden?

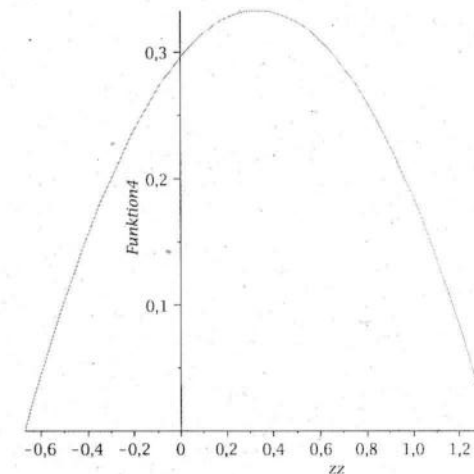
```
[> Funktion3 := unapply((Q*S_y(z))/(I_y*b(z)), z);
```

$$\text{Funktion3} := z \rightarrow \frac{1}{27} \frac{(8a^2 + 6za - 9z^2)Q}{I_y}$$

```
[> Funktion4 := unapply(I_y/Q*Kfunktion3(a+zz)/a^2, zz);
```

$$\text{Funktion4} := zz \rightarrow \frac{8}{27} + \frac{2}{9}zz - \frac{1}{3}zz^2$$

```
[> plot(Funktion4(zz), zz=-2/3..4/3);
```



```
[> D(Funktion4);
```

$$zz \rightarrow \frac{2}{9} - \frac{2}{3}zz$$

```
[> Groesse3 := Funktion3(a/3);
```

$$\text{Groesse3} := \frac{1}{3} \frac{a^2 Q}{I_y}$$

Lösung:

4 Punkte

1) Die maximalen Schubspannungen werden bei $z = a/3$ angenommen.

2) Der Wert der maximalen Schubspannung ist $\tau_{max} = \frac{1}{3} \frac{a^2 Q}{I_y}$.

5.4) Im Folgenden bezeichne `zul_spannung` eine gegebene zulässige Schubspannung für das verwendete Material. Was wird mit folgendem MAPLE-Code berechnet? Beachten Sie, dass die Funktion `Funktion3` im MAPLE-Code unter 5.3) definiert ist.

```
[> Groesse4 := solve(Funktion3(a/3)=zul_spannung, a):
```

Lösung:

2 Punkte

Die minimale Geometrieabmessung a_{min} des Querschnitts wird berechnet, unter der Bedingung, dass die maximale Schubspannung gerade den gegebenen Wert der zulässigen Spannung erreicht.