

Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

26. August 2010

14:00 – 15:30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	27	21	16	16	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name:

Matrikel-Nr.:

Klausur TM II

Aufgabe 1

(Insgesamt 27 Punkte)

Gegeben ist ein linksseitig fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt mit der Breite b und der Höhe h (Abb. 1.1). Der Balken ist an seinem rechten Ende durch ein Kräftepaar in x -Richtung belastet. Gegeben ist die Kraft $F > 0$, der Elastizitätsmodul E , die Länge l , die Breite b ($b < h$) und die Höhe h .

Verwenden Sie bei allen Berechnungen ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

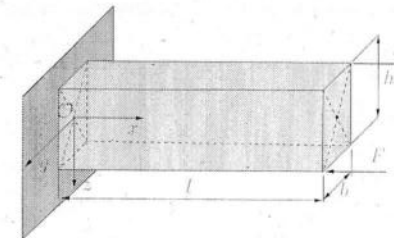


Abbildung 1.1: Fest eingespannter Balken mit rechteckigem Querschnitt

- 1.1) Geben Sie für den Balkenquerschnitt die axialen Flächenmomente 2. Grades (I_y , I_z) bzgl. der y - und z -Achse an.
- 1.2) Welches vektorielle Versetzungsmoment M_V muss am Balkenende im Flächenmittelpunkt als Ersatz für das Kräftepaar eingeführt werden, so dass das äußere Kraftsystem statisch äquivalent bleibt?
- 1.3) Berechnen Sie die Schnittgrößen $N(x)$, $M_y(x)$ und $M_z(x)$ des Balkens. Zeichnen Sie dafür alle nötigen Freikörperbilder und tragen Sie alle Schnittgrößen an.
- 1.4) Berechnen Sie die drei Komponenten des Verschiebungsvektors $\mathbf{u}(x) = \{u(x), v(x), w(x)\}^T$ der Balkenmittellachse.
- 1.5) An welcher Stelle entlang der Balkenachse tritt die maximale Durchbiegung auf? Berechnen Sie für diese Stelle den Betrag der maximalen Durchbiegung.
- 1.6) Bestimmen Sie die Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx}(x, y, z)$ im Querschnitt.
- 1.7) Berechnen Sie die Lage der Spannungsnulllinie.

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 27 Punkte)

1.1) Flächenträgheitsmomente I_y und I_z :

$$I_y = \frac{bh^3}{12}, \quad I_z = \frac{b^3h}{12} \quad (1.1)$$

1.2) Versetzungsmoment M_V :

$$\mathbf{M}_V = (0, -Fh, Fb)^T \quad (1.2)$$

1.3) Schnittgrößen:

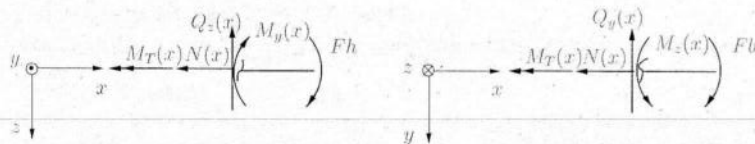


Abbildung 1.2: Freischnitte in der x - z -Ebene (links) und x - y -Ebene (rechts)

$$N(x) = 0, \quad M_y(x) = -Fh = \text{konst.}, \quad M_z(x) = Fb = \text{konst.} \quad (1.3)$$

1.4) Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(x)$:

$$\mathbf{u}(x) = \left(0, \frac{6F}{Eb^2h} x^2, \frac{6F}{Ebh^2} x^2 \right)^T \quad (1.4)$$

1.5) Maximale Durchbiegung:

$$f_{\max} = |\mathbf{u}(l)| = \frac{6Fl^2}{Ebh} \sqrt{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{h^2}} \quad (1.5)$$

1.6) Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx}(y, z)$:

$$\sigma_{xx}(y, z) = -\frac{12F}{bh^2} z - \frac{12F}{b^2h} y \quad (1.6)$$

1.7) Lage der Spannungsnulllinie:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{h}{b}\right) \quad (1.7)$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 21 Punkte)

Die in Abb. 2.1 dargestellte Welle ist einseitig eingespannt und abgesetzt. Sie wird mit den Torsionsmomenten M_{T1} und M_{T2} belastet ($M_{T1} > 0, M_{T2} < 0$). Die Radien und Längen der beiden Abschnitte sind r_1 und r_2 bzw. l_1 und l_2 . Die Welle besteht aus Werkstoffen mit den Schubmoduli G_1 und G_2 . Der Kerbradius am Wellenabsatz ist r_K . Verwenden Sie bei allen Berechnungen ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

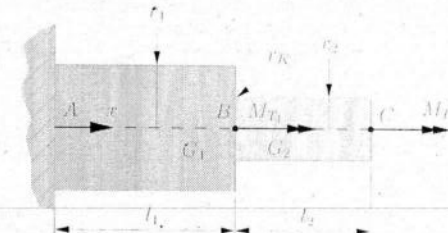


Abbildung 2.1: Einseitig eingespannte, abgesetzte Welle mit Torsionsmomenten

- 2.1) Bestimmen Sie für die abgebildete Welle (Abb. 2.1) die polaren Flächenträgheitsmomente I_{p1} und I_{p2} .
- 2.2) Bestimmen Sie den Verlauf des Torsionsmoments. Zeichnen Sie die notwendigen Freikörperbilder.
- 2.3) Berechnen Sie den Verlauf des Drehwinkels entlang der x -Achse.
- 2.4) Berechnen Sie die Steifigkeiten C_{21} (bzgl. des Drehwinkels $\vartheta_1 = \vartheta(l_1)$ und M_{T2}) und C_{22} (bzgl. des Drehwinkels $\vartheta_2 = \vartheta(l_1 + l_2)$ und M_{T2}) der Welle an der Stelle $x = l_1 + l_2$ bzgl. des Punktes C.
- 2.5) Bestimmen Sie den Kerbspannungsfaktor aus Abb. 2.2 für den Wellenabsatz mit dem Kerbradius $r_K = 3r/10$ und die Radien $r_1 = 2r$ und $r_2 = r$. Geben Sie den Betrag der maximalen Kerbschubspannung am Wellenabsatz an!

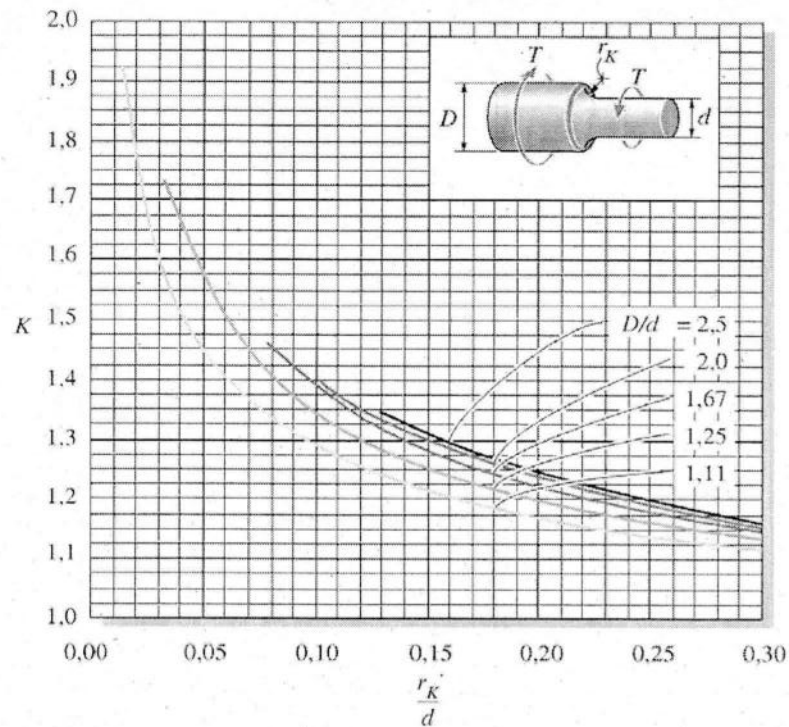


Abbildung 2.2: Kerbspannungsfaktoren für Torsionsbelastung (Quelle: Hibbeler: Technische Mechanik 2 - Festigkeitslehre. Springer 2006)

Aufgabe 2 – Musterlösung

(Insgesamt 21 Punkte)

2.1) Polare Flächenträgheitsmomente:

$$I_{p1} = \frac{\pi}{2} r_1^4, \quad I_{p2} = \frac{\pi}{2} r_2^4 \quad (2.1)$$

2.2) Verlauf des Torsionsmoments $M_T(x)$:

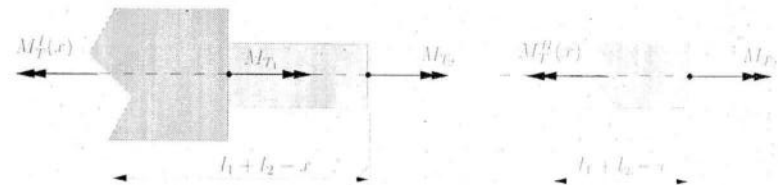


Abbildung 2.3: Freikörperbilder

$$0 \leq x < l_1, \quad M_T^I(x) = M_{T1} = M_{T2} \quad (2.2)$$

$$l_1 \leq x \leq l_1 + l_2, \quad M_T^{II}(x) = M_{T2} \quad (2.3)$$

2.3) Verlauf des Drillwinkels $\vartheta(x)$:

$$\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{2(M_{T1} + M_{T2})}{G_1 \pi r_1^4} x, & 0 \leq x \leq l_1 \\ \frac{2M_{T2}}{G_2 \pi r_2^4} (x - l_1) + \frac{2(M_{T1} + M_{T2})}{G_1 \pi r_1^4} l_1, & l_1 \leq x \leq l_1 + l_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

2.4) Steifigkeiten C_{21} und C_{22} bzgl. Punkt C:

$$C_{21} = -\frac{\pi G_2 r_2^4}{2l_2}, \quad C_{22} = \frac{\pi G_2 r_2^4}{2l_2} \quad (2.5)$$

2.5) Kerbspannung:

$$\frac{r_K}{d} = 0,15, \quad \frac{D}{d} = 2 \quad \Rightarrow \quad K = 1,3 \quad (2.6)$$

$$\tau_K = K \tau_{\max} = 2,6 \frac{M_{T2}}{\pi r^3} \quad (2.7)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben sind der Spannungszustand eines ebenen Bleches (Abb. 3.1) bzgl. der Orthonormalbasis $\{e_x, e_y, e_z\}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 4\sigma_0 & \sqrt{3}\sigma_0 & 0 \\ \sqrt{3}\sigma_0 & 2\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_x, e_y, e_z\}}, \quad \sigma_0 > 0$$

und die elastischen Konstanten E und ν .

Sämtliche Endergebnisse sind ausschließlich in Abhängigkeit von E , ν und σ_0 anzugeben.

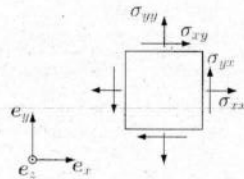


Abbildung 3.1: Spannungszustand eines Blechelements

- 3.1) Liegt ein ebener Dehnungszustand oder ein ebener Spannungszustand vor? Begründen Sie Ihre Antwort.
- 3.2) Berechnen Sie mit Hilfe des dehnungsexpliziten Hooke'schen Gesetzes die zum gegebenen Spannungszustand gehörige Verzerrungsmatrix.
- 3.3) Berechnen Sie die Hauptspannungen σ_1^{II} , σ_2^{II} und σ_3^{II} .
- 3.4) Berechnen Sie (ohne Verwendung der Hauptspannungen) die zum gegebenen Spannungszustand gehörige von Mises'sche Vergleichsspannung σ_V .

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

- 3.1) Ebener Spannungs-/Dehnungszustand:

Es handelt sich um einen ebenen Spannungszustand, da die Spannungskomponenten $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = \sigma_{yz} = \sigma_{yz} = 0$ sind.

- 3.2) Berechnung des Verzerrungstensors:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \frac{2\sigma_0}{E}(2-\nu) & \frac{\sqrt{3}\sigma_0}{E}(1+\nu) & 0 \\ \frac{\sqrt{3}\sigma_0}{E}(1+\nu) & \frac{2\sigma_0}{E}(1-2\nu) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6\sigma_0\nu}{E} \end{pmatrix}_{\{e_x, e_y, e_z\}} \quad (3.1)$$

- 3.3) Berechnung der Hauptspannungen:

$$\sigma_1^{II,ESZ} = 5\sigma_0, \quad \sigma_2^{II,ESZ} = \sigma_0, \quad \sigma_3^{II,ESZ} = 0 \quad (3.2)$$

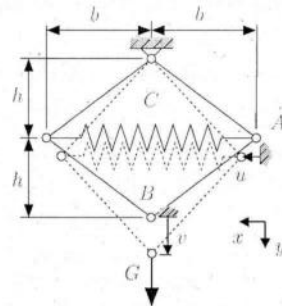
- 3.4) Berechnung der von Mises'schen Vergleichsspannung:

$$\sigma_V = \sqrt{\frac{3}{2} \|\sigma'\|} = \sqrt{21}\sigma_0 \quad (3.3)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben ist das in Abbildung 4.1 dargestellte System, das aus einer Feder der Steifigkeit C und vier starren, masselosen, gelenkig miteinander verbundenen Stäben besteht. Auf das System wirkt die äußere Kraft G . Die horizontale Verschiebung im Punkt A wird mit u , die vertikale Verschiebung im Punkt B mit v bezeichnet. Gegeben sind die Kraft G , die Federsteifigkeit C und die Längen b und h , die auf den undeformierten Zustand des Systems ($G = 0$) bezogen sind.

Abbildung 4.1: Federsystem mit äußerer Last G

4.1) Geben Sie die Länge der Feder l_C als Funktion der horizontalen Verschiebung u an. Berechnen Sie damit die elastische Federenergie $W_C(u)$ und das Potential der äußeren Kräfte $U_{\text{ges}}(v)$. Wie lautet das Gesamtpotential $\Pi_{\text{ges}}(u, v)$ für das dargestellte System?

4.2) Für $G = 0$ seien $u = 0$ und $v = 0$. Geben Sie die horizontale Verschiebung $u = u(v)$ als Funktion von v an. Veranschaulichen Sie Ihre Berechnung mit Hilfe einer Skizze.

4.3) Linearisieren Sie die Funktion $u(v)$ für $v \ll h$. Verwenden Sie im Folgenden die linearisierte Darstellung von u .

Hinweis: Verwenden Sie für die Linearisierung die Taylorreihenentwicklung der Funktion $u(v)$ an der Stelle $v_0 = 0$.

4.4) Geben Sie das Gesamtpotential $\Pi_{\text{ges}}(v)$ unter Verwendung der Linearisierung von $u(v)$ an. Berechnen Sie die erste Variation $\delta \Pi_{\text{ges}}$. Wie groß ist die vertikale Verschiebung v , wenn sich das System für $G \neq 0$ im Gleichgewicht befindet?

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

4.1) Federlänge l_C und Gesamtpotential Π_{ges} :

$$l_C = 2(b - u) \quad (4.1)$$

$$W_C(u) = 2Cu^2, \quad U_{\text{ges}}(v) = -Gv \quad (4.2)$$

$$\Pi_{\text{ges}}(u, v) = 2Cu^2 - Gv \quad (4.3)$$

4.2) Kinematische Beziehung zwischen u und v :

$$u(v) = b - \sqrt{b^2 - h^2} = \left(h - \frac{v}{2}\right)^2 \quad (4.4)$$

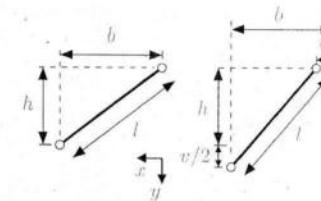


Abbildung 4.2: Stablänge im ursprünglichen und deformierten Zustand

4.3) Linearisierung von $u(v)$ für $v_0 = 0$:

$$u(v) \approx \frac{h}{2b}v \quad (4.5)$$

4.4) Gesamtpotential und erste Variation in Abhängigkeit von v :

$$\Pi_{\text{ges}}(v) = C \frac{h^2}{2b^2} v^2 - Gv, \quad \delta \Pi_{\text{ges}}(v) = \left(C \frac{h^2}{b^2} v - G\right) \delta v \quad (4.6)$$

$$v = \frac{Gb^2}{Ch^2} \quad (4.7)$$

Aufgabe 5 – Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben sei ein T-Profil mit den geometrischen Größen a , b und der Länge l in x -Richtung, das mit einer Streckenlast $q(x) = q_0 \sin(2\pi x/l)$ belastet wird (siehe Abb. 5.1).

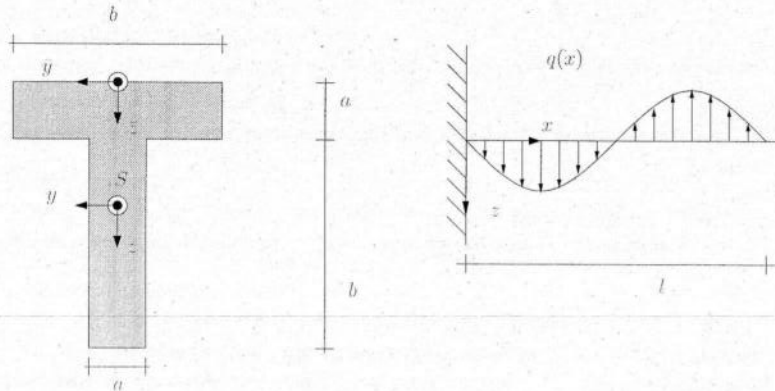


Abbildung 5.1: Querschnitt für das T-Profil (links), Belastung des Trägers (rechts)

5.1) Gegeben sei der folgende MAPLE-Code:

```
[> Groesse1 := int(int(zq,yq=-b/2..b/2),zq=0..a);
```

```
[> Groesse2 := int(int(zq,yq=-a/2..a/2),zq=a..a+b);
```

Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

```
[> Groesse3 := (Groesse1+Groesse2)/(2*a*b);
```

Lösung:

Mit **Groesse3** wird die $\bar{z}$ -Komponente des Schwerpunktes S des Profils bzgl. des xyz -Koordinatensystems berechnet.

5.2) Gegeben sei der folgende MAPLE-Code:

```
[> Groesse4 := int(int(z^2,y=-b/2..b/2),z=0..a);
```

```
[> Groesse5 := int(int(z^2,y=-a/2..a/2),z=a..a+b);
```

Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

Welcher Satz aus der Vorlesung wird verwendet?

```
[> Groesse6 := Groesse4+Groesse5-2*a*b*Groesse3^2;
```

Lösung:

Es wird das axiale Flächenträgheitsmoment I_y bzgl. des xyz -Koordinatensystems berechnet.

Es wird der Satz von Steiner angewendet.

5.3) Gegeben sei der folgende MAPLE-Code:

```
[> Groesse7 := unapply(-b*int(z_tilde,
      z_tilde=-Groesse3..z),z);
```

```
[> Groesse8 := unapply(Groesse7(-Groesse3+a) - a*int(z_tilde,
      z_tilde=-Groesse3+a..z),z);
```

Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code in der Variablen **Groesse9** definiert?

```
[> Groesse9 := unapply(piecewise(-Groesse3<=z and
      z<=-Groesse3+a, Groesse7(z),
      -Groesse3+a<z and z<=-Groesse3+a+b,
      Groesse8(z)),z);
```

Lösung:

Groesse9 berechnet das statische Moment $S_y(z)$ bzgl. des xyz -Koordinatensystems.

5.4) In welchem Querschnitt entlang der Trägerachse in x -Richtung tritt die betragsmäßig maximale Schubspannung auf? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung:

Da die Streckenlast drei Nullstellen hat, besitzt die Querkraft $Q(x)$ drei Extremalstellen bei $x = 0$, $x = l/2$ und $x = l$. Wegen $Q(l) = Q(0) = 0$ tritt die betragsmäßig maximale Schubspannung $\tau_{\max}$ bei $x = l/2$ auf.

5.5) Gegeben sei der nachfolgende MAPLE-Code:

```
[> Groesse10 := unapply(int(q(xq), xq=x..l), x);
[> Groesse11 := unapply(Groesse10(x)*Groesse7(z)/
      (b*Groesse6), x, z);
[> Groesse12 := unapply(Groesse10(x)*Groesse8(z)/
      (a*Groesse6), x, z);
```

Welche mechanische Größe wird in nachfolgendem MAPLE-Code berechnet?

```
[> Groesse13 := abs(Groesse11(1/2, (a-b)/4)
      - Groesse12(1/2, (a-b)/4));
```

Lösung:

Groesse13 stellt den absoluten Betrag des Sprunges der Schubspannung $\tau_{xz}(x, z)$ an der Übergangsstelle bei $x = l/2$, $z = (a - b)/4$ dar.