

Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

25. August 2011

14:00 – 15:30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	25	17	18	23	7	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM II

Aufgabe 1

(Insgesamt 25 Punkte)

Gegeben ist ein Balken der Länge $3l$ mit einem konstanten quadratischen Querschnitt der Seitenlänge a . Der Balken ist durch ein Festlager im Punkt A und ein Loslager im Punkt B gelagert und besteht aus zwei Werkstoffen mit den Elastizitätsmodulen E und $2E$ (siehe Abb. 1.1). Die Belastung erfolgt durch eine vertikale Kraft F bei $x = 2l$ und eine horizontale Kraft F im Punkt B . Querkraftschub wird vernachlässigt. Gegeben sind $F > 0$, E , l und a .

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

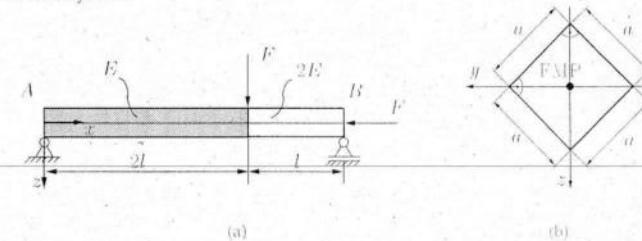


Abbildung 1.1: (a) Inhomogener Balken, belastet durch eine vertikale und eine horizontale Kraft F ; (b) quadratischer Querschnitt des Balkens

1.1) Berechnen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des quadratischen Querschnitts durch Integration oder durch Anwendung des Satzes von Steiner.

Der Verlauf des Biegemoments entlang der x -Achse ist wie folgt gegeben und bei den weiteren Aufgaben direkt anzuwenden:

$$M^I(x) = \frac{Fx}{3}, \quad \forall x \in [0, 2l].$$

$$M^H(x) = \frac{2F}{3}(3l - x), \quad \forall x \in [2l, 3l].$$

Wenn Sie das axiale Flächenträgheitsmoment in 1.1 nicht ausgerechnet haben, setzen Sie für dieses das Formelzeichen I_y ein.

1.2) Bestimmen Sie den Verlauf der Normalspannung $\sigma_{xz}(x, z)$ entlang der Balkenachse infolge Biegung und Druck.

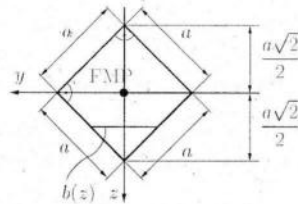
1.3) Geben Sie die Lage (d.h. die x - und die z -Koordinate) und den Betrag der betragsmäßig maximalen Normalspannung an.

1.4) Berechnen Sie die z -Koordinate der Spannungsnulllinie an der Stelle $x = 2l$.

1.5) Berechnen Sie den Verlauf der Biegelinie. Geben Sie alle benötigten Rand- und Übergangsbedingungen an.

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 25 Punkte)

1.1) Flächenträgheitsmoment I_y :Abbildung 1.2: Flächenträgheitsmoment I_y

Die Breite des Profils:

$$b(z) = a\sqrt{2} - 2z, \quad z \in \left[0, \frac{a\sqrt{2}}{2}\right] \quad (1.1)$$

Flächenträgheitsmoment I_y :

$$I_y = 2 \int_0^{\frac{a\sqrt{2}}{2}} z^2 b(z) dz = \frac{a^4}{12} \quad (1.2)$$

1.2) Normalspannung $\sigma_{xx}(x, z)$ infolge Biegung und Druck:

Normalspannung:

$$0 \leq x < 2l, \quad \sigma_{xx}^I(x, z) = \frac{M^I(x)z}{I_y} + \frac{N^I(x)}{A} = \frac{4Fxz}{a^3} - \frac{F}{a^2}, \quad (1.3)$$

$$2l \leq x \leq 3l, \quad \sigma_{xx}^{II}(x, z) = \frac{M^{II}(x)z}{I_y} + \frac{N^{II}(x)}{A} = \frac{8F(3l-x)z}{a^3} - \frac{F}{a^2}. \quad (1.4)$$

1.3) Maximale Normalspannung:

$$\sigma_{max} = \left| \sigma^I \left(2l, -\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) \right| = \frac{4\sqrt{2}Fl}{a^3} + \frac{F}{a^2} \quad (1.5)$$

1.4) Neutrale Faser:

$$z = \frac{a^2}{8l} \quad (1.6)$$

1.5) Biegelinie:

Für die Biegelinie im Bereich I gilt $0 \leq x < 2l$:

$$w_I''(x) = -\frac{M^I(x)}{I_y E} = -\frac{4Fx}{a^3 E} \quad (1.7)$$

Für Bereich II gilt $2l \leq x \leq 3l$:

$$w_{II}''(x) = -\frac{M^{II}(x)}{2I_y E} = -\frac{4F(x-3l)}{a^3 E} \quad (1.8)$$

Rand- und Übergangsbedingungen:

$$w_I(0) = 0, \quad w_{II}(3l) = 0, \quad w_I(2l) = w_{II}(2l), \quad w_I'(2l) = w_{II}'(2l) \quad (1.9)$$

Biegelinie

 $0 \leq x < 2l$:

$$w_I(x) = -\frac{2Fx^3}{3a^3 E} + \frac{44Fl^2 x}{9a^3 E} \quad (1.10)$$

 $2l \leq x \leq 3l$:

$$w_{II}(x) = \frac{2F(x-3l)^3}{3a^3 E} - \frac{46Fl^2 x}{9a^3 E} + \frac{46Fl^3}{3a^3 E} \quad (1.11)$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 17 Punkte)

Gegeben sind zwei dünnwandige Profile mit elliptischem Querschnitt. Die Halbachsen der Profile sind a und b mit $a > b$. Profil A ist geschlossen, Profil B ist geschlitzt. Die Wandstärke der Profile sei konstant und wird mit h bezeichnet (siehe Abb. 2.1). Die Profile bestehen aus einem Material mit dem Schubmodul G und werden mit dem Torsionsmoment $M_T = M_T e_x$ mit $M_T > 0$ belastet.

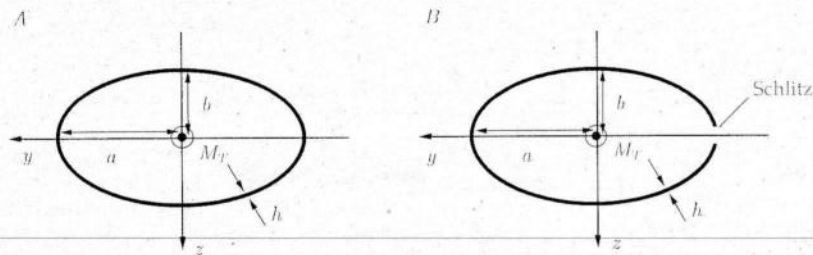


Abbildung 2.1: Geschlossenes Profil A (links) und geschlitztes Profil B (rechts)

- 2.1) Berechnen Sie die jeweils für die Torsion relevanten Flächenträgheitsmomente für die beiden Querschnitte A und B.

Hinweis: Der Umfang einer Ellipse ist näherungsweise durch

$$U \approx \pi \left(\frac{3}{2}(a+b) - \sqrt{ab} \right)$$

gegeben. Der Flächeninhalt ist $A_m = \pi ab$.

- 2.2) Berechnen Sie die maximale Schubspannung τ_{max} für die Profile A und B.
- 2.3) Berechnen Sie die Verdrillung ϑ' der beiden Profile A und B.
- 2.4) Berechnen Sie die Verhältnisse $\tau_{max}^A / \tau_{max}^B$ und $\vartheta'_A / \vartheta'_B$ für die Abmessungen $b = a/4$ und $h = 12a/121$.
- 2.5) Vergleichen Sie die Ergebnisse aus 2.4 bezüglich der Größenordnung des Einflusses des Schlitzes.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 17 Punkte)

- 2.1) Flächenträgheitsmomente:

Profil A:

$$I_T^A = \frac{8\pi a^2 b^2 h}{3(a+b) - 2\sqrt{ab}} \quad (2.1)$$

Profil B:

$$I_T^B = \frac{\pi}{6} h^3 (3(a+b) - 2\sqrt{ab}) \quad (2.2)$$

- 2.2) Maximale Schubspannungen:

Profil A:

$$\tau_{max}^A = \frac{M_T}{2\pi abh} \quad (2.3)$$

Profil B:

$$\tau_{max}^B = \frac{6M_T}{\pi h^2 (3(a+b) - 2\sqrt{ab})} \quad (2.4)$$

- 2.3) Verdrillung der Profile:

Profil A:

$$\vartheta'_A = \frac{M_T}{G} \cdot \frac{3(a+b) - 2\sqrt{ab}}{8\pi a^2 b^2 h} \quad (2.5)$$

Profil B:

$$\vartheta'_B = \frac{6M_T}{G\pi h^3 (3(a+b) - 2\sqrt{ab})} \quad (2.6)$$

- 2.4) Verhältnisse $\tau_{max}^A / \tau_{max}^B$ und $\vartheta'_A / \vartheta'_B$

$$\frac{\tau_{max}^A}{\tau_{max}^B} = \frac{1}{11} \quad (2.7)$$

$$\frac{\vartheta'_A}{\vartheta'_B} = \frac{3}{121} \quad (2.8)$$

- 2.5) Vergleich der Ergebnisse aus 2.4:

Der Schlitz hat eine größere Auswirkung auf die Verdrillung als auf die maximale Schubspannung.

Aufgabe 3

(Insgesamt 18 Punkte)

Gegeben sei der in Abb. 3.1 dargestellte Balken, welcher durch die Einzelkräfte F_1 und F_2 belastet ist.

Gegeben seien E , l , b , h , F_1 , F_2 und $I_y = bh^3/12$ sowie $S_y(z) = b/2 \left[(h/2)^2 - z^2 \right]$.

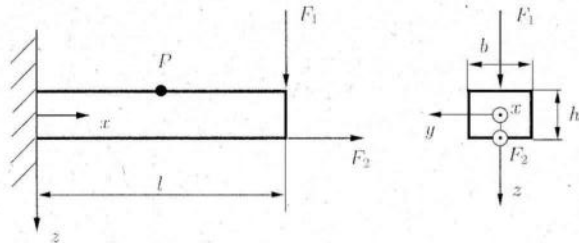


Abbildung 3.1: Balken mit Kräften F_1 und F_2

- 3.1) Ersetzen Sie das gegebene Kraftsystem durch ein äquivalentes Kraftsystem, indem Sie die Kraft F_2 in den Flächenmittelpunkt des Balkenquerschnitts verschieben und das zugehörige Versetzungsmoment einführen. Zeichnen Sie das neue System.
- 3.2) Berechnen Sie die Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$ mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen. Geben Sie das benötigte Freikörperbild vollständig an.
- 3.3) Berechnen Sie alle Komponenten der Spannungsmatrix $\sigma(x, y, z)$ bezüglich des gegebenen Koordinatensystems.
- 3.4) Ermitteln Sie den Betrag der maximalen Schubspannung im Punkt P mit den Koordinaten $(l/2, 0, -h/2)$. Unter welchem Winkel bezüglich der x -Achse treten diese auf (ohne Rechnung)?
- 3.5) Berechnen Sie den Spannungsvektor auf der freien Oberfläche in Punkt P mit dem Lemma von Cauchy und dem Ergebnis aus 3.3.

Aufgabe 3 - Musterlösung

(Insgesamt 18 Punkte)

- 3.1) Einführung des Versetzungsmoments infolge Verschiebung von F_2

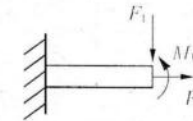


Abbildung 3.2: Versetzungsmoment

$$M_V = \frac{h}{2} F_2 \quad (3.1)$$

- 3.2) Schnittgrößen:

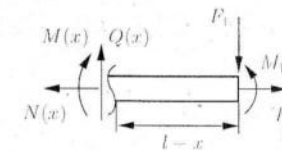


Abbildung 3.3: Schnittgrößen

Schnittgrößen:

$$N(x) = F_2, \quad Q(x) = F_1, \quad M(x) = \frac{h}{2} F_2 + (x-l) F_1 \quad (3.2)$$

- 3.3) Spannungen:

Normalspannungen in x -Richtung:

$$\sigma_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{lb} + \frac{M(x)}{I_y} z = \frac{F_2}{lb} + \frac{12z}{bh^3} \left(\frac{h}{2} F_2 + (x-l) F_1 \right) \quad (3.3)$$

Schubspannungen $\sigma_{xz}(z)$:

$$\sigma_{xz}(z) = \frac{QS_y(z)}{I_y b} = \frac{12F_1 b}{2b^2 h^3} \left[\left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right] = \frac{6F_1}{bh} \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] = \sigma_{xz}(z) \quad (3.4)$$

Andere Spannungskomponenten:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.5)$$

3.4) Maximale Schubspannungen:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{3F_1}{bh^2} - \frac{2F_2}{bh} \right) \quad (3.6)$$

3.5) Berechnung des Spannungsvektors:

$$\mathbf{t}_P = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_P, \mathbf{z}_P) \mathbf{n}_P = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 23 Punkte)

Ein linksseitig eingespannter Balken ③ der Länge l mit konstantem Flächenträgheitsmoment I_y und Elastizitätsmodul E ist rechtsseitig im Punkt P mit zwei Stäben gleicher Länge l gelenkig verbunden. Die Stäbe ① und ② haben den gleichen Elastizitätsmodul E und die Querschnittsfläche A . Der Stab ② mit thermischem Ausdehnungskoeffizienten α wird durch äußere Einflüsse um die Temperaturdifferenz $\Delta\theta > 0$ erwärmt, während die anderen Komponenten des Tragwerks isotherm sind. Die Verschiebung des Punktes P wird mit u bezeichnet.

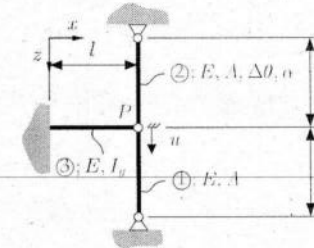


Abbildung 4.1: Elastisches Balkentragwerk unter thermischer Beanspruchung

4.1) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Castigliano die Federsteifigkeit C_3 des Balkens ③ bezüglich der Verschiebung u . Geben Sie unter Verwendung von C_3 die in ③ gespeicherte Energie $W_3(u)$ an.

4.2) Geben Sie die Dehnung im Stab ① in Abhängigkeit von u an. Berechnen Sie durch Integration die in ① gespeicherte elastische Verzerrungsenergie $W_1(u)$.

Hinweis: Für Zug-Druck-Stäbe gilt für die elastische Verzerrungsenergie

$$W = \frac{1}{2} \int_V E \varepsilon_{xx}^2 dV = \frac{1}{2} \int_0^l E (\varepsilon - \varepsilon_{th})^2 dV.$$

4.3) Der Stab ② wird ausgehend von der als spannungsfrei angenommenen Ausgangslage um die Temperaturdifferenz $\Delta\theta > 0$ erwärmt. Geben Sie für ② separat die Gesamtdehnung $\varepsilon = du/dx$, die thermische Dehnung ε_{th} und die elastische Dehnung $\varepsilon_{el} = \varepsilon - \varepsilon_{th}$ in Abhängigkeit von u und $\Delta\theta$ an.

4.4) Berechnen Sie durch Integration die im Stab ② gespeicherte Verzerrungsenergie $W_2(u, \Delta\theta)$.

4.5) Ermitteln Sie nun die Gesamtenergie $W_{ges}(u, \Delta\theta)$ des Systems, und bestimmen Sie mit einer Energiemethode die temperaturabhängige Verschiebung $u(\Delta\theta)$ im Punkt P , für die sich das System ohne die Einwirkung äußerer Kräfte im statischen Gleichgewicht befindet.

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 23 Punkte)

4.1) Bestimmung der Federsteifigkeit C_3 :

$$C_3 = \frac{3EI_y}{l^3} \quad (4.1)$$

Gespeicherte Energie:

$$W_3(u) = \frac{1}{2} C_3 u^3 = \frac{3EI_y}{2l^3} u^3. \quad (4.2)$$

4.2) Dehnung in Stab ①

$$\varepsilon = \frac{u}{l} \quad (4.3)$$

Elastische Verzerrungsenergie:

$$W_1(u) = \frac{1}{2} \int_0^l E \varepsilon^2 A \, ds = \frac{EAu^2}{2l} \quad (4.4)$$

4.3) Gesamtdehnung ε :

$$\varepsilon = \frac{u}{l} \quad (4.5)$$

Thermische Dehnung:

$$\varepsilon_{th} = \Delta\theta\alpha \quad (4.6)$$

Elastische Dehnung:

$$\varepsilon_{el} = \varepsilon - \varepsilon_{th} = \frac{u}{l} - \Delta\theta\alpha \quad (4.7)$$

4.4) Energie $W_2(u, \Delta\theta)$:

$$W_2(u, \Delta\theta) = \frac{EA}{2l} (u - \Delta\theta\alpha l)^2 \quad (4.8)$$

4.5) Die Gesamtenergie $W_{ges}(u, \Delta\theta)$:

$$W_{ges}(u, \Delta\theta) = \frac{1}{2} EA \frac{u^2}{l} + \frac{1}{2} \frac{EA}{l} (u - \Delta\theta\alpha l)^2 + \frac{3EI_y}{2l} \left(\frac{u}{l}\right)^2 \quad (4.9)$$

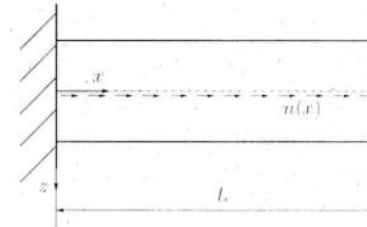
Temperaturabhängige Verschiebung:

$$u(\Delta\theta) = \Delta\theta \frac{\alpha Al^3}{2Al^2 + 3I_y} \quad (4.10)$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 7 Punkte)

Gegeben ist ein Zugstab (Länge L , Querschnittsfläche A und Elastizitäts-Modul E) wie in Abb. 5.1 dargestellt, der bei $x = 0$ fest eingespannt ist und mit einer verteilten Last $n(x)$ belastet wird.

Abbildung 5.1: Einseitig eingespannter Stab mit Streckenlast $n(x)$

Es soll eine Näherungslösung für die Horizontalverschiebung $u(x)$ mit dem Verfahren von Ritz berechnet werden.

5.1) Gegeben sei der folgende MAPLE-Code:

```
[> groesse1 := int (1/2 * E * A * diff (u(x), x) ^ 2, x = 0 .. L)
      - int (n(x) * u(x), x = 0 .. L);
```

a) Geben Sie den Ausdruck für **groesse1** in mathematischer Notation ohne Umformungen und Vereinfachungen an.

Lösung:

$$\int_0^L \frac{1}{2} EA (u'(x))^2 \, dx - \int_0^L n(x) u(x) \, dx. \quad (5.1)$$

b) Welche mechanische Bedeutung hat der Ausdruck **groesse1**?

Lösung:

Der gesuchte Ausdruck **groesse1** ist das Gesamtpotential des Dehnstabs.

Im Folgenden soll die Ansatzfunktion $u(x) = u_0 + u_1 x$ verwendet werden. Die Streckenlast soll $n(x) = n_0$ betragen.

5.2) Wie lautet die geometrische Randbedingung für den in Abb. 5.1 dargestellten Zugstab und was folgt damit für die Ansatzfunktion $u(x)$?

Lösung:

Die geometrische Randbedingung für den linksseitig eingespannten Dehnstab ist

$$u(x=0) = 0 \Rightarrow u_0 = 0. \quad (5.2)$$

Die Ansatzfunktion ist damit

$$u(x) = u_1 x. \quad (5.3)$$

5.3) Welche mechanische Größe wird mit `groesse5` im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

Hinweis: Die Approximation des Gesamtpotentials Π_{ges} des Dehnstabes mittels der Ansatzfunktion $u(x)$ ist nachfolgend mit `Pi_ges` definiert.

```
[> groesse2:= unapply(u1*x,x);
[> groesse3:= diff(Pi_ges,u1);
[> groesse4:= solve({groesse3=0},{u1});assign(%);
[> groesse5:= groesse2(L);
```

Lösung:

Es wird die Verschiebung am Stabende $u(x=L)$ ausgerechnet.

5.4) Welche mechanische Größe wird mit `groesse6` im nachfolgenden MAPLE-Code berechnet?

Hinweis: Der Elastizitäts-Modul wird nachfolgend mit `E` bezeichnet, die Definition von `groesse2` finden Sie im MAPLE-Code Auszug der Teilaufgabe 3).

Wie ist die Abhängigkeit dieser mechanischen Größe von x längs des Stabes? Begründen Sie Ihre Antwort.

```
[> groesse6:= E*diff(groesse2(x),x);
```

Lösung:

- Es wird die mechanische Spannung im Dehnstab berechnet.
- Die Spannung ist konstant längs des Stabes, da

$$\sigma = E\varepsilon = Eu' = Eu_1 = \text{konst.} \quad (5.4)$$

ist.

5.5) Ist es sinnvoll $u(x) = u_0$ mit $u_0 \neq 0$ als Ansatzfunktion im Rahmen des Ritz-Verfahrens zu verwenden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

Nein, da die Ansatzfunktion die geometrische Randbedingung erfüllen muss.