

Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

Prüfer: Prof. T. Böhlke, Dr.-Ing. T.-A. Langhoff

09. August 2016

15:30 – 17:00 Uhr

Name: _____

Vorname: MUSTERLÖSUNG

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 2 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgaben 1 und 5 sind in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Beachten Sie auch die Rückseiten der Aufgabenblätter.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert und nummeriert zusammen und heften Sie diese gesammelt hinter die Aufgabenstellung der Klausur. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	18	12	21	10	8	69
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name:

Matrikel-Nr.:

Klausur TM II

Aufgabe 1

(Insgesamt 18 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus 3 Teilen. Die einzelnen Teilaufgaben sind unabhängig voneinander. **Alle Lösungswege und Lösungen sind auf dem Aufgabenblatt in dem jeweiligen freien Lösungsfeld einzutragen.** Angaben, die nicht an den vorgesehenen Stellen gemacht werden, werden nicht gewertet.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

Teil 1

- 1.1) Eine Streckenlast $q(x)$ hat im Bereich $x \in [0, l]$ einen sinusförmigen Verlauf, siehe Abb. 1.1. Geben Sie die Funktion $q(x)$ für den dargestellten, nicht phasenverschobenen sinusförmigen Verlauf explizit an. Gegeben sind folgende Größen: q_0 und l

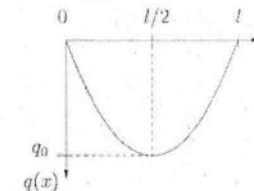


Abbildung 1.1: Streckenlast mit sinusförmigen Verlauf

Lösung:

$$q(x) = q_0 \sin\left(\frac{x}{l}\pi\right)$$

- 1.2) Ein Biegemoment $M_y(x)$ hat im Bereich $x \in [0, l]$ einen quadratischen Verlauf, siehe Abb. 1.2. Geben Sie die dargestellte Funktion $M_y(x)$ explizit an. Gegeben sind folgende Größen: M_0 und l

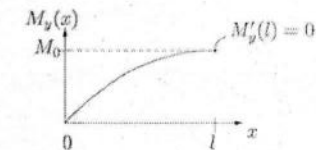


Abbildung 1.2: Biegemoment mit quadratischem Verlauf

Lösung:

Randbedingungen: $M_y(l) = M_0$, $M_y'(l) = 0$, $M_y(0) = 0$

$$\begin{aligned} M_y(x) &= ax^2 + bx + c, & M_y'(x) &= 2ax + b \\ M_y(0) &= c = 0, & M_y(l) &= al^2 + bl = M_0, & M_y'(l) &= 2al + b = 0 \\ \Rightarrow c &= 0, & a &= -\frac{M_0}{l^2}, & b &= \frac{2M_0}{l} \\ \Rightarrow M_y(x) &= -\frac{M_0}{l^2}x^2 + \frac{2M_0}{l}x \end{aligned}$$

1.3) Gegeben ist der Biegemomentenverlauf

$$M_y(x) = M_0 \left(1 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)^{-1} \quad (1.1)$$

Berechnen Sie den zugehörigen Querkraftverlauf $Q_z(x)$.

Gegeben sind folgende Größen: M_0 und l

Lösung:

$$\begin{aligned} Q_z(x) &= \frac{dM_y(x)}{dx} \\ Q_z(x) &= -\frac{2M_0x}{l^2} \left(1 + \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)^{-2} \end{aligned}$$

1.4) Gegeben ist die Biegeliniendifferentialgleichung 2. Ordnung

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{B(x)} \quad (1.2)$$

mit ortsabhängiger Biegesteifigkeit $B(x) = EI_y(x)$. Berechnen Sie die zugehörige Biegeliniendifferentialgleichung 3. Ordnung.

Gegeben sind folgende Größen: $M_y(x)$, $M_y'(x)$, E , $I_y(x)$ und $I_y'(x)$

Lösung:

$$w'''(x) = -\frac{M_y'(x)}{EI_y(x)} + \frac{M_y(x)I_y'(x)}{EI_y^2(x)}$$

1.5) Berechnen Sie in Polarkoordinaten das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des in Abb. 1.3 dargestellten Kreisquerschnittes mit Radius R . Führen Sie die Integration der Integranden schrittweise durch.

Gegeben sind folgende Größen: R und $dA = r dr d\varphi$

Hinweis: $\sin^2(x) = (1 - \cos(2x))/2$

Lösung:

$$\begin{aligned} I_y &= \int_A z^2 dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \sin^2(\varphi) dr d\varphi = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - \cos(2\varphi)) d\varphi \\ &= \frac{R^4}{8} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right]_0^{2\pi} = \frac{R^4}{8} \left(2\pi - \frac{1}{2} \sin(4\pi) + \frac{1}{2} \sin(0) \right) \\ I_y &= \frac{1}{4} R^4 \pi \end{aligned}$$

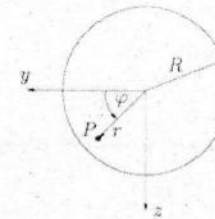


Abbildung 1.3: Kreisquerschnitt und Polarkoordinaten (r, φ)

1.6) Gegeben ist der Verlauf der Streckenlast

$$q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^5 \quad (1.3)$$

Berechnen Sie den Verlauf der zugehörigen Querkraft $Q_z(x)$ durch Integration mit der Randbedingung $Q_z(x=l) = 0$.

Gegeben sind folgende Größen: q_0 und l

Lösung:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_z(x)}{dx} &= -q_0 \left(1 - \frac{x}{l} \right)^5 \\ Q_z(x) &= \frac{1}{6} q_0 l \left(1 - \frac{x}{l} \right)^6 \end{aligned}$$

Teil 2

Gegeben sind zwei Biegebalken in Abb. 1.4 a) und b). Die Balken haben jeweils die Länge l . Der Balken aus Abb. 1.4 a) wird im Bereich $l/2 \leq x \leq l$ mit einer konstanten Streckenlast belastet. Der Balken aus Abb. 1.4 b) wird im Bereich $0 \leq x \leq l$ mit einer linearen Streckenlast belastet.

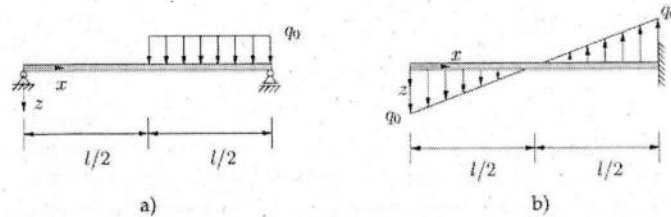


Abbildung 1.4: a) Biegebalken mit einer konstanten Streckenlast, b) Biegebalken mit einer linearen Streckenlast

- 1.7) Zeichnen Sie für die gegebenen Verläufe der Streckenlasten (siehe Abb. 1.5) in die auf der nächsten Seite abgebildeten Diagramme qualitativ (ohne Rechnung) die Verläufe für die jeweilige Querkraft $Q_z(x)$ und das jeweilige Biegemoment $M_y(x)$ ein. Geben Sie für jeden Teilbereich den Polynomgrad p an.

Gegeben sind folgende Größen: q_0 und l

Hinweis: $p = 0$ bezeichnet einen konstanten Verlauf, $p = 1$ einen linearen Verlauf, usw.

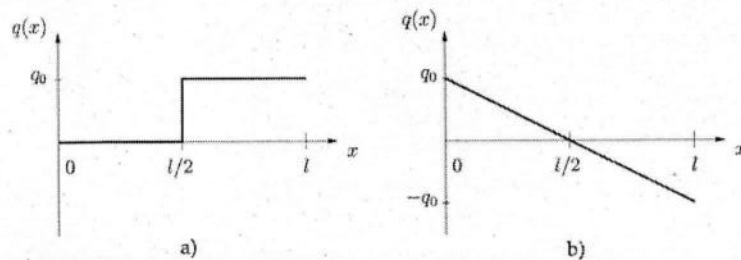
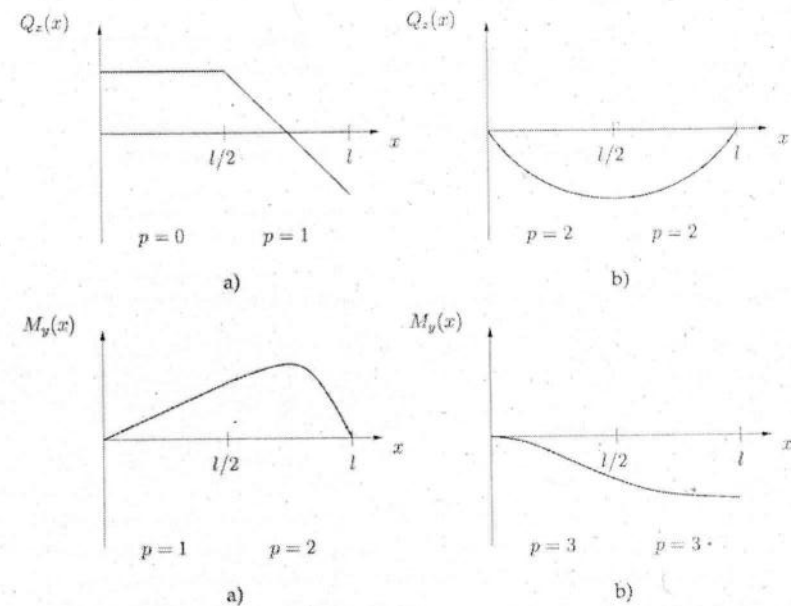


Abbildung 1.5: Verläufe der Streckenlasten aus Abb. 1.4

Lösung:



Teil 3

Die Querschnittsgeometrie eines Biegebalkens ist zusammengesetzt aus einem Quadrat ① und einem gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreieck ② der Seitenlängen bzw. Schenkellängen $3a$, siehe Abb. 1.6. Der Flächeninhalt der Querschnittsteilflächen ① und ② ist gegeben mit $A_1 = 9a^2$ bzw. mit $A_2 = 9/2a^2$. Das axiale Flächenträgheitsmoment der Teilfläche ② ist bezüglich des y_2 - z_2 -Koordinatensystems gegeben mit $I_{y_2} = 8a^4$.

Gegeben sind folgende Größen: a , $A_1 = 9a^2$, $A_2 = 9/2a^2$ und $I_{y_2} = 8a^4$.

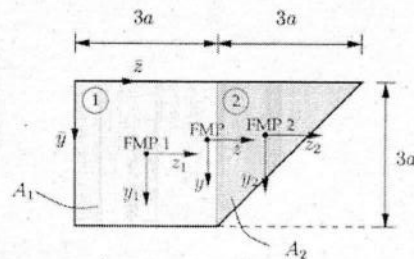


Abbildung 1.6: Querschnittsgeometrie des Biegebalkens

- 1.8) Berechnen Sie die z -Komponente des Flächenmittelpunktes FMP des zusammengesetzten Querschnittes.

Lösung:

$$z_{\text{FMP}} = \frac{A_1 z_{\text{FMP}1} + A_2 z_{\text{FMP}2}}{A_1 + A_2} = \frac{9a^2 \frac{3}{2}a + \frac{9}{2}a^2 4a}{9a^2 + \frac{9}{2}a^2} = \frac{7}{3}a$$

- 1.9) Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Steiner das axiale Flächenträgheitsmoment I_y des zusammengesetzten Querschnittes bezüglich des y - z -Koordinatensystems im Flächenmittelpunkt FMP. Geben Sie das Ergebnis in Abhängigkeit von a an.

Lösung:

$$I_y = I_{y1} + z_{01}^2 A_1 + I_{y2} + z_{02}^2 A_2$$

$$I_{y1} = \frac{81}{12}a^4, \quad |z_{01}| = \frac{5}{6}a, \quad |z_{02}| = \frac{5}{3}a$$

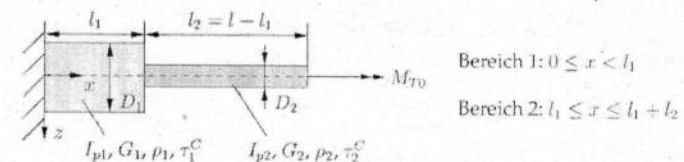
$$I_y = \frac{67}{2}a^4$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 12 Punkte)

Gegeben ist ein einseitig fest eingespannter, abgesetzter Kreiszyylinderstab (siehe Abb. 2.1). Dieser besteht im Bereich 1 aus Stahl mit dem Schubmodul G_1 , der Massendichte ρ_1 und der kritischen Schubspannung τ_1^C . Im Bereich 2 besteht der Stab aus Aluminium mit dem Schubmodul G_2 , der Massendichte ρ_2 und der kritischen Schubspannung τ_2^C . Der Stab hat im Bereich 1 zwischen der Einspannung bei $x = 0$ und dem Absatz bei $x = l_1$ den Durchmesser D_1 sowie das polare Flächenträgheitsmoment I_{p1} , und im Bereich 2 den Durchmesser D_2 sowie das polare Flächenträgheitsmoment I_{p2} . An der Stelle $x = l$ wird ein Torsionsmoment M_{T0} aufgebracht. Der Kerbeinfluss wird im Folgenden vernachlässigt.

Gegeben sind folgende Größen: $D_1, D_2, I_{p1}, I_{p2}, G_1, G_2, \rho_1, \rho_2, \tau_1^C, \tau_2^C, M_{T0}$ und l .

Abbildung 2.1: Einseitig eingespannter Kreiszyylinderstab mit Gesamtlänge $l = l_1 + l_2$, belastet durch das Torsionsmoment M_{T0} .

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 2.1) Berechnen Sie unter der Annahme von identischen Massen der beiden Teilbereiche ($m_1 = m_2$) die Längen l_1 und l_2 .

In den folgenden Teilaufgaben werden die Längen l_1 und l_2 als gegebene und unabhängige Größen vorausgesetzt.

- 2.2) Geben Sie die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen für die Berechnung des Verdrehwinkels $\vartheta(x)$ entlang des Stabs an.
- 2.3) Berechnen Sie unter Verwendung der Differentialgleichung für den Verdrehwinkel $\vartheta(x)$ dessen Verlauf, d.h. $\vartheta_1(x)$ im Bereich 1 und $\vartheta_2(x)$ im Bereich 2.
- 2.4) Geben Sie die Gesamtdrehfedersteifigkeit C des abgesetzten Stabs zunächst allgemein (Definition) und konkret für die gegebene Problemstellung unter Verwendung der gegebenen Größen an.
- 2.5) Berechnen Sie das Verhältnis der maximalen Schubspannungen in den beiden Bereichen. An welchen Stellen treten diese jeweils auf?

- 2.6) Berechnen Sie das maximal zulässige Torsionsmoment $M_{T, \text{zul}}$ für die folgenden Werte der geometrischen Größen: $D_1 = 2 \text{ mm}$, $D_2 = 1 \text{ mm}$, $I_{p1} = \pi/2 \text{ mm}^4$, $I_{p2} = \pi/32 \text{ mm}^4$ und $l = 10 \text{ cm}$. Verwenden Sie für die erforderlichen Materialkennwerte die Werte aus Tabelle 2.1.

	Stahl	Aluminium
Schubmodul G	80 GPa	30 GPa
Massendichte ρ	8000 kg/m ³	3000 kg/m ³
Kritische Schubspannung τ^C	800/π MPa	640/π MPa

Tabelle 2.1: Für die Aufgabe adaptierte Materialkennwerte für Stahl und Aluminium.

Aufgabe 2 – Musterlösung

(Insgesamt 12 Punkte)

- 2.1) Unter der Annahme einer identischen Masse der beiden Materialien ergibt sich

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 \\ \rho_1 l_1 \frac{\pi D_1^2}{4} &= \rho_2 l_2 \frac{\pi D_2^2}{4} \\ \Rightarrow l_1 &= l_2 \frac{\rho_2 D_2^2}{\rho_1 D_1^2} \end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\begin{aligned} l &= l_1 + l_2 = l_2 \left(1 + \frac{\rho_2 D_2^2}{\rho_1 D_1^2} \right) = l_2 \frac{\rho_1 D_1^2 + \rho_2 D_2^2}{\rho_1 D_1^2}, \\ \Rightarrow l_2 &= l \frac{\rho_1 D_1^2}{\rho_1 D_1^2 + \rho_2 D_2^2}, \quad \Rightarrow l_1 = l \frac{\rho_2 D_2^2}{\rho_1 D_1^2 + \rho_2 D_2^2} \end{aligned}$$

- 2.2) Die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen lauten

$$\vartheta_1(0) = 0 \quad \text{und} \quad \vartheta_1(l_1) = \vartheta_2(l_1).$$

- 2.3) Für den vorliegenden Fall eines konstanten Torsionsmoments $M_T(x) = M_{T0}$ gilt in den beiden Bereichen für den Verdrehwinkel

$$\vartheta_1'(x) = \frac{M_{T0}}{G I_{p1}} \quad \text{und} \quad \vartheta_2'(x) = \frac{M_{T0}}{G I_{p2}}.$$

Durch Integration ergibt sich

$$\vartheta_1(x) = \frac{M_{T0}}{G_1 I_{p1}} x + C_1 \quad \text{und} \quad \vartheta_2(x) = \frac{M_{T0}}{G_2 I_{p2}} x + C_2.$$

Durch Einsetzen der Rand- und Übergangsbedingung folgen die Integrationskonstanten

$$\vartheta_1(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = 0.$$

$$\vartheta_2(l_1) = \vartheta_1(l_1) \quad \Rightarrow \quad C_2 = l_1 M_{T0} \left(\frac{1}{G_1 I_{p1}} - \frac{1}{G_2 I_{p2}} \right).$$

Der Verdrehwinkel in den beiden Abschnitten lautet demnach

$$\begin{aligned} \vartheta_1(x) &= \frac{M_{T0}}{G_1 I_{p1}} x, \\ \vartheta_2(x) &= \frac{M_{T0}}{G_2 I_{p2}} x + l_1 M_{T0} \left(\frac{1}{G_1 I_{p1}} - \frac{1}{G_2 I_{p2}} \right) \\ &= \frac{M_{T0}}{G_2 I_{p2}} x + l_1 M_{T0} \left(\frac{G_2 I_{p2} - G_1 I_{p1}}{G_1 I_{p1} G_2 I_{p2}} \right) \end{aligned}$$

2.4) Die Gesamtdrehfedersteifigkeit ist

$$C = \frac{\partial^2 W_{\text{ges}}}{\partial \vartheta_2(l)^2} = \left(\frac{\partial^2 W_{\text{ges}}^*}{\partial M_{T0}^2} \right)^{-1} = \frac{M_{T0}}{\vartheta_2(l)} = \frac{1}{\frac{l_2}{G_2 I_{p2}} + \frac{l_1}{G_1 I_{p1}}} = \frac{G_1 G_2 I_{p1} I_{p2}}{G_1 I_{p1} l_2 + G_2 I_{p2} l_1}.$$

2.5) Die maximalen Schubspannungen ergeben sich jeweils am äußeren Rand ($r = r_{\text{max}}$) und sind bereichsweise konstant

$$\tau_{\text{max},1} = \tau_1(x, D_1/2) = \frac{M_{T0}}{I_{p1}} \frac{D_1}{2}, \quad \text{für } 0 \leq x \leq l_1,$$

$$\tau_{\text{max},2} = \tau_2(x, D_2/2) = \frac{M_{T0}}{I_{p2}} \frac{D_2}{2}, \quad \text{für } l_1 \leq x \leq l.$$

Demnach folgt das Verhältnis zu

$$\frac{\tau_{\text{max},1}}{\tau_{\text{max},2}} = \frac{D_1 I_{p2}}{D_2 I_{p1}}.$$

2.6) In den beiden Bereichen ergibt sich jeweils ein maximal zulässiges Moment $M_{T1,\text{zul}}$, so dass τ_1^C nicht überschritten wird

$$\text{Bereich 1: } M_{T1,\text{zul}} = \frac{2\tau_1^C I_{p1}}{D_1} = \frac{800}{2} \text{ Nmm} = 400 \text{ Nmm},$$

$$\text{Bereich 2: } M_{T2,\text{zul}} = \frac{2\tau_2^C I_{p2}}{D_2} = \frac{640}{16} \text{ Nmm} = 40 \text{ Nmm}.$$

Demnach folgt das maximal zulässige Torsionsmoment als das geringere, $M_{T,\text{zul}} = 40 \text{ Nmm}$.

Aufgabe 3

(Insgesamt 21 Punkte)

Gegeben ist ein gerader, linear elastischer Balken mit Rechteckquerschnitt und der Länge L , der Breite B sowie der Höhe H (siehe Abb. 3.1). Der Elastizitätsmodul des Balkens ist E und die Querkontraktionszahl ist ν . Der Balken ist bei $x=0$ fest eingespannt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Flächenmittelpunkt des Querschnitts an der Einspannung. Am freien Ende des Balkens bei $x=L$ greifen im Flächenmittelpunkt zwei Kräfte $F_1 = -F_1 e_x$ und $F_2 = F_2 e_z$ mit $F_1 > 0$ und $F_2 = 2F_1 H/(3L)$ an. Des Weiteren ist ein Punkt P mit den Koordinaten $(L/2, 0, -H/2)^T$ gegeben.

Der Querkraftschub wird in der gesamten Aufgabe vernachlässigt.

Gegeben sind folgende Größen: ν, L, B, H, E und $F_1 > 0$.

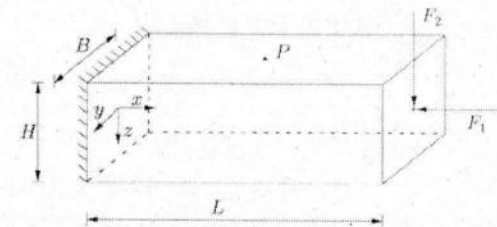


Abbildung 3.1: Einseitig fest eingespannter Balken, belastet durch zwei Kräfte.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 3.1) Berechnen Sie die aus der Zug- und der Biegebeanspruchung resultierenden Normalspannungsanteile $\sigma_{xx}^Z(x)$ und $\sigma_{xx}^B(x, z)$.
- 3.2) Berechnen Sie die Normalspannungskomponente $\sigma_{xx}^{\text{ges}}(x, z)$ für den überlagerten Spannungszustand und geben Sie die dazugehörige Spannungsnulllinie $z(x)$ an.
- 3.3) Berechnen Sie die Koordinate x_0 mit $0 < x_0 < L$, ab der die Spannungsnulllinie nicht mehr innerhalb des Balkenquerschnitts liegt.
- 3.4) Berechnen Sie die von Mises'sche Vergleichsspannung σ_{VM}^B für die Biegespannung $\sigma_{xx}^B(x, z)$ aus 3.1) und σ_{VM}^{ges} für die Gesamtspannung $\sigma_{xx}^{\text{ges}}(x, z)$ aus 3.2). Wo ist die von Mises Spannung jeweils maximal? Welchen Wert nimmt sie an diesen Stellen an?
- 3.5) Geben Sie im Punkt P jeweils separat die Spannungsmatrizen für die Fälle reiner Zug $\sigma^Z(x)$, reine Biegung $\sigma^B(x, z)$ und für den überlagerten Spannungszustand $\sigma^{\text{ges}}(x, z)$ an.

- 3.6) Geben Sie für die Spannungsmatrizen aus 3.5) die Hauptspannungen an. Zeichnen Sie für diese Spannungsmatrizen jeweils qualitativ einen separaten Mohr'schen Spannungskreis. Tragen Sie die zum Zeichnen des Mohr'schen Spannungskreises benötigten Spannungswerte in ihr Diagramm ein.
- 3.7) Berechnen Sie für die Gesamtspannungsmatrix $\sigma^{\text{ges}}(x, z)$ aus 3.5) die Dehnungsmatrix ϵ unter Verwendung des Hooke'schen Gesetzes.
- 3.8) Berechnen Sie für die Dehnung aus 3.7) die Volumenänderungsdehnung ϵ^v und die Gestaltänderungsdehnung ϵ' .

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 21 Punkte)

- 3.1) Die Normalspannungskomponenten aufgrund von Zug- und Biegung berechnen sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^Z(x) &= \frac{N(x)}{BH} = \frac{F_1}{BH} \\ \sigma_{xx}^B(x, z) &= \frac{M_y(x)}{I_y} z = \frac{8F_1(x-L)}{LBH^2} z, \\ \text{mit } I_y &= \frac{BH^3}{12} \quad \text{und} \quad M_y(x) = \frac{2F_1H}{3L}(x-L).\end{aligned}$$

- 3.2) Die Normalspannungskomponente der Gesamtspannung ergibt sich aus der Superposition der beiden Einzelspannungen zu:

$$\sigma_{xx}^{\text{ges}}(x, z) = \sigma_{xx}^Z(x) + \sigma_{xx}^B(x, z) = \frac{F_1}{BH^2} \left(8 \frac{x-L}{L} z - H \right).$$

Die Spannungsnulllinie ergibt sich nach Nullsetzen der Gesamtspannung und Auflösen nach z zu:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\text{ges}}(x, z) &= 0 \Rightarrow 8F_1(x-L)z - F_1HL = 0, \\ \Rightarrow z(x) &= \frac{HL}{8(x-L)}.\end{aligned}$$

Aufgrund der Überlagerung des konstanten Druckspannungsanteils und des Biegespannungsanteils an der Normalspannung liegt die Spannungsnulllinie nicht gänzlich innerhalb des Balkens.

- 3.3) Die Biegespannung wird von einer konstanten Druckspannung überlagert. Ab der Stelle x_0 , ab der die superponierte Gesamtspannung im gesamten Querschnitt negativ ist, liegt die Spannungsnulllinie nicht mehr im Querschnitt des Balkens. Dazu wird die Randkoordinate $z = -H/2$ im Querschnitt betrachtet, bei der die (Zug-) Biegespannung maximal ist.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{\text{ges}}(x_0, z = -H/2) &< 0 \Rightarrow 8F_1(x_0-L)(-H/2) - F_1HL < 0 \\ x_0 &> \frac{-F_1L}{4F_1} + L = \frac{3}{4}L\end{aligned}$$

Alternative Lösungsmöglichkeit: Verwenden der Lösung aus 3.2) mit $z = -H/2$. Die Ungleichung folgt dann mit der Begründung, dass die konstante Druckspannung größer als die Zugspannung der Biegung sein muss damit im gesamten Querschnitt ein Druckspannungszustand vorliegt.

- 3.4) Für den vorliegenden uniaxialen Spannungszustand ergibt sich die v.Mises Spannung als Betrag der entsprechenden Normalspannung

$$\begin{aligned}\sigma_{vM} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma'\| = |\sigma_{xx}|, \\ \sigma_{vM}^B &= \left| \frac{8F_1(x-L)}{LBH^2} z \right|, \\ \sigma_{vM}^{ges} &= \left| \frac{F_1}{BH^2} \left(8 \frac{x-L}{L} z - H \right) \right|.\end{aligned}$$

Die Biegespannung ist bei $x = 0$ am oberen und am unteren Rand maximal

$$\sigma_{vM}^{B, \max} = |\sigma_{xx}^B(x=0, z = \pm H/2)| = \frac{4F_1}{BH}.$$

Aufgrund der Überlagerung mit der konstanten Druckspannung ist die Gesamtspannung bei $x = 0$ und $z = H/2$ maximal

$$\sigma_{vM}^{ges, \max} = |\sigma_{xx}^{ges}(x=0, z = H/2)| = \frac{5F_1}{BH}.$$

- 3.5) Die Spannungsmatrix im Punkt P hat für jeden der betrachteten Fälle nur eine von Null verschiedene Komponente. Diese Normalspannungskomponente in x -Richtung ergibt sich jeweils zu

$$\sigma_{xx}^Z = \frac{-F_1}{BH}, \quad \sigma_{xx}^B = \frac{2F_1}{BH}, \quad \sigma_{xx}^{ges} = \frac{F_1}{BH},$$

und damit lautet die Spannungsmatrix im Punkt P jeweils

$$\sigma^Z = \begin{pmatrix} -\frac{F_1}{BH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^B = \begin{pmatrix} \frac{2F_1}{BH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{ges} = \begin{pmatrix} \frac{F_1}{BH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 3.6) Die Hauptspannungen ergeben sich zu

$$\sigma_3^Z = \frac{-F_1}{BH}, \quad \sigma_{1,2}^Z = 0, \quad \sigma_1^B = \frac{2F_1}{BH}, \quad \sigma_{2,3}^B = 0, \quad \sigma_1^{ges} = \frac{F_1}{BH}, \quad \sigma_{2,3}^{ges} = 0$$

Die Mohr'schen Spannungskreise werden jeweils durch eine Normalspannungskomponente und eine Nullspannung aufgespannt, siehe Abb 3.2.

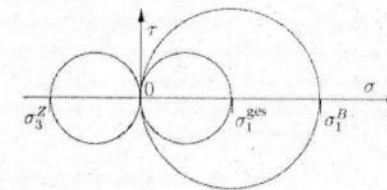


Abbildung 3.2: Mohr'sche Spannungskreise im Punkt P für Zugspannungs-, Biegespannungs- und Gesamtspannungszustand

- 3.7) Berechnung der Dehnung für einen einachsigen Spannungszustand:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{2G} (\sigma^{ges} - \frac{\nu}{1+\nu} \text{sp}(\sigma^{ges}) \mathbf{I}) = \frac{1}{2G} \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{xx}^{ges}}{1+\nu} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu \sigma_{xx}^{ges}}{1+\nu} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu \sigma_{xx}^{ges}}{1+\nu} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sigma_{xx}^{ges}}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} = \frac{F_1}{BHE} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

- 3.8) Berechnung der Volumen- und Gestaltänderungsdehnung:

$$\begin{aligned}\epsilon^o &= \frac{1}{3} \text{sp}(\epsilon) \mathbf{I} = \frac{\sigma_{xx}^{ges}}{3E} (1-2\nu) \mathbf{I} = \frac{F_1}{3BHE} (1-2\nu) \mathbf{I}, \\ \epsilon' &= \epsilon - \epsilon^o = \frac{\sigma_{xx}^{ges}}{3E} \begin{pmatrix} 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & -1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\nu \end{pmatrix} = \frac{F_1}{3BHE} \begin{pmatrix} 2+2\nu & 0 & 0 \\ 0 & -1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & -1-\nu \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist ein abgewinkelter Balken mit der Biegesteifigkeit EI_y , der einseitig fest eingespannt ist (siehe Abb. 4.1). Der Balken wird im Punkt P_1 durch die Kraft F_0 und im Punkt P_2 durch das Moment M_0 belastet. Die Schnittgrößen $N^I(x) = -F_0$ und $M_y^I(x) = M_0$ sind im Bereich $x \in [0, l_1]$ gegeben. Im Bereich $\bar{x} \in [0, l_2]$ ist die Schnittgröße $M_y^{II}(\bar{x}) = M_0$ gegeben. Der Einfluss des Querkraftschubs wird vernachlässigt.

Gegeben sind folgende Größen: $E, I_y, A, l_1, l_2, F_0 > 0$ und $M_0 > 0$.

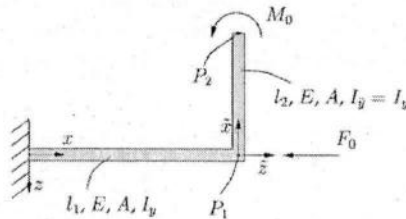


Abbildung 4.1: Abgewinkelter Balken, belastet durch F_0 und M_0 .

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 4.1) Geben Sie die Komplementärenergie W_{ges}^* des gesamten abgewinkelten Balkens in Abhängigkeit von F_0 und M_0 als Integralausdruck an. Führen Sie noch keine Integration durch.
- 4.2) Berechnen Sie die Komplementärenergie W_{ges}^* . Führen Sie hierfür die Integration des Ausdrucks durch, den Sie in der vorherigen Teilaufgabe angegeben haben.
- 4.3) Berechnen Sie die Verschiebung im Punkt P_1 in Richtung der Kraft F_0 und die Verdrehung im Punkt P_2 um die $\bar{y}$ -Achse mithilfe des 1. Satzes von Castigliano.
- 4.4) Berechnen Sie am Punkt P_2 die Drehfedersteifigkeit des abgewinkelten Balkens für den Sonderfall $F_0 = 0$ unter Verwendung des 1. Satzes von Castigliano.
- 4.5) Berechnen Sie am Punkt P_1 die Federsteifigkeit des abgewinkelten Balkens für den Sonderfall $M_0 = 0$ unter Verwendung des 1. Satzes von Castigliano.

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 10 Punkte)

- 4.1) Die Komplementärenergie für den gesamten abgewinkelten Balken lautet

$$W_{\text{ges}}^* = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \frac{F_0^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \frac{M_0^2}{EI_y} dx + \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \frac{M_0^2}{EI_y} d\bar{x}.$$

- 4.2) Nach der Integration ergibt sich die Komplementärenergie zu

$$W_{\text{ges}}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{F_0^2}{EA} + \frac{M_0^2}{EI_y} \right) l_1 + \frac{1}{2} \frac{M_0^2}{EI_y} l_2.$$

$$u_{P_1} = \frac{\partial W_{\text{ges}}^*}{\partial F_0} = \frac{F_0 l_1}{EA}.$$

Die Verdrehung im Punkt P_2 ergibt sich analog

$$\varphi_{P_2} = \frac{\partial W_{\text{ges}}^*}{\partial M_0} = \frac{M_0}{EI_y} (l_1 + l_2).$$

- 4.3) Für den Sonderfall $F_0 = 0$ berechnet sich die Drehfedersteifigkeit im Punkt P_2 mit Hilfe des 1. Satzes von Castigliano zu

$$\frac{\partial^2 W_{\text{ges}}^*}{\partial M_0^2} = \frac{l_1 + l_2}{EI_y} = S_M \quad \Rightarrow \quad C_M = \frac{EI_y}{l_1 + l_2}.$$

Alternativ:

$$C_M = \frac{M_0}{\varphi_{P_2}} = \frac{M_0 EI_y}{M_0 (l_1 + l_2)} = \frac{EI_y}{l_1 + l_2}.$$

- 4.4) Für den Sonderfall $M_0 = 0$ berechnet sich die Federsteifigkeit im Punkt P_1 mithilfe des 1. Satzes von Castigliano zu

$$\frac{\partial^2 W_{\text{ges}}^*}{\partial F_0^2} = \frac{l_1}{EA} = S_F \quad \Rightarrow \quad C_F = \frac{EA}{l_1}.$$

Alternativ:

$$C_F = \frac{F_0}{u_{P_1}} = \frac{F_0 EA}{F_0 l_1} = \frac{EA}{l_1}.$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 8 Punkte)

Gegeben ist der in Abb. 5.1a) dargestellte, bei $x=0$ fest eingespannte, linear elastische Balken der Länge L mit kreisförmigem Hohlquerschnitt, dessen äußerer ortsabhängiger Radius $R(x)$ durch folgende Funktion gegeben ist

$$R(x) = R_0 \left(1 - \frac{x}{5L}\right), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (5.1)$$

Der innere Radius ist konstant und hat den Wert $2R_0/3$. Das Querschnittsprofil an einer beliebigen Stelle x ist in Abb. 5.1b) dargestellt. Bei $x=L$ greift eine in z -Richtung vertikal wirkende Einzelkraft F an. In der Mitte des Balkens wirkt zusätzlich ein bzgl. der y -Achse positives Einzelmoment M . Das System wird als eindimensional betrachtet, und das homogene Materialverhalten wird durch den konstanten Elastizitätsmodul E beschrieben. Das ortsabhängige Flächenträgheitsmoment bzgl. der y -Achse ist $I_y(x)$. Der Verlauf des inneren Biegemomentes ist $M_y(x)$. Die Durchbiegung des Balkens in z -Richtung wird mit $w(x)$ bezeichnet.

Die entsprechenden, in MAPLE definierten Variablen bzw. Funktionen lauten: $L, M, R_0, E, F, I_y(x)$ und $M_y(x)$.

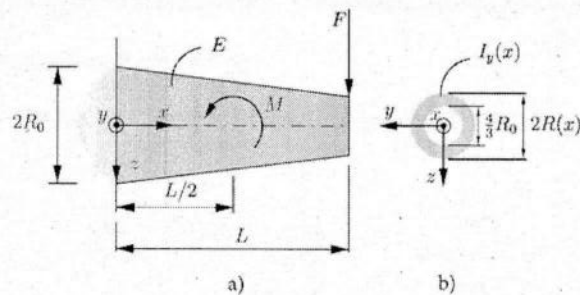


Abbildung 5.1: a) Balken mit Einzelkraft; b) Querschnittsprofil mit ortsabhängigem äußerem Radius $R(x)$, konstantem inneren Radius $2R_0/3$ und ortsabhängigem Flächenträgheitsmoment $I_y(x)$ bzgl. der y -Achse

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und achten Sie dabei auf eine präzise Beantwortung aller Fragen und Aufgabenstellungen.

- 5.1) Die Durchbiegung des Balkens in z -Richtung wird mit $w(x)$ bezeichnet. Schreiben Sie die in nachfolgendem MAPLE-Code angegebene Gleichung `gleichung1` in mathematischer Notation auf (ohne jegliche Umformungen). Welche mechanische Interpretation besitzt diese Gleichung?

```
(> gleichung1 := E*I_y(x)*diff(w(x), x, x) + M_y(x) = 0;
```

Lösung:

Die mathematische Notation lautet:

$$EI_y(x)w''(x) + M_y(x) = 0.$$

Die Differentialgleichung 2.Ordnung beschreibt die Biegelinie einer geraden Balkenbiegung.

- 5.2) Geben Sie den Ausdruck für das Gesamtpotential des in Abb. 5.1 a) dargestellten Balkens an.

Lösung:

Das Gesamtpotential beträgt:

$$\Pi_{\text{ges}} = \int_0^L \left(\frac{1}{2} EI_y(x) w''(x)^2 \right) dx - F w(L) + M w'(L/2).$$

- 5.3) Zur Berechnung des Verschiebungsfeldes $w(x)$ soll das Näherungsverfahren nach Ritz verwendet werden. Welche Art von Randbedingungen wird für dieses Verfahren benötigt? Geben Sie die Randbedingungen an, die eine geeignete Ansatzfunktion $\hat{w}(x)$ für das in Abbildung 5.1a) dargestellte System erfüllen muss.

Lösung:

Bei der Verwendung des Näherungsverfahrens nach Ritz müssen die Ansatzfunktionen die geometrischen Randbedingungen erfüllen:

$$\hat{w}(x=0) = 0, \quad \hat{w}'(x=0) = 0.$$

- 5.4) Im folgenden Sonderfall wird das Einzelmoment M zu Null gesetzt. Welche mechanische Interpretation hat die im nachfolgenden MAPLE-Code definierte funktion2? Was wird im nachfolgenden MAPLE-Code ermittelt?

```
[> funktion2 := unapply(
  c_0 + c_1*x + c_2*x^2 + c_3*x^3
, x):
[> solve({
  funktion2(0)=0,
  D(funktion2)(0)=0
}, {c_0, c_1}):
  assign(%):
[> funktion3 := unapply(
  int(1/2*E*I_y(x)*diff(funktion2(x), x, x)^2, x=0..L)
  - F*funktion2(L)
, c_2, c_3):
[> solve({
  diff(funktion3(c_2, c_3), c_2)=0,
  diff(funktion3(c_2, c_3), c_3)=0
}, {c_2, c_3}):
  assign(%):
```

Lösung:

funktion2 stellt eine Näherungslösung nach Ritz dar. Es werden die Koeffizienten dieser Näherungslösung bestimmt.

- 5.5) Welche mechanische Interpretation besitzt die im nachfolgenden MAPLE-Code berechnete Funktion funktion4? Verwenden Sie dazu auch funktion2, die bereits in Aufgabenteil 5.4) eingeführt wurde.

```
[> dgl := E*I_y(x)*diff(w(x), x, x) + M_y(x) = 0:
  rb := w(0)=0, D(w)(0)=0:
  dsolve({dgl, rb}, {w(x)}):
  lsg_ex := unapply(rhs(%), x):
[> funktion4 := unapply(abs(lsg_ex(x)-funktion2(x)), x):
```

Lösung:

Funktion funktion4 gibt an jedem Punkt x den Betrag der Differenz zwischen der exakten Lösung und der in Aufgabenteil 5.5) berechneten Näherungslösung an.