

Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

Prüfer: Prof. T. Böhlke, Dr.-Ing. T.-A. Langhoff

23. August 2019

11:00 – 12:30 Uhr

Name: _____

Vorname: _____

MUSTERLÖSUNG

Matrikelnummer: _____

Bitte beachten Sie:

Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 2 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösungen der Aufgaben 1 und 5 sind in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Beachten Sie auch die Rückseiten der Aufgabenblätter.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert und nummeriert zusammen und heften Sie diese gesammelt hinter die Aufgabenstellung der Klausur. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Mögliche Punkte	12	13	16	12	6	59
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Name: _____

Matrikel-Nr.: _____

Klausur TM II

Aufgabe 1 – Musterlösung

(Insgesamt 12 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus 7 Teilaufgaben. Die einzelnen Teilaufgaben sind unabhängig voneinander. **Alle Lösungswege und Lösungen sind auf dem Aufgabenblatt in dem jeweiligen freien Lösungsfeld einzutragen.** Angaben, die nicht an den vorgesehenen Stellen gemacht werden, werden nicht gewertet.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

1.1) Gegeben ist die Biegedifferentialgleichung 2. Ordnung

$$w''(x) = -\frac{M_y}{E(x)I_y} \quad (1.1)$$

mit ortsabhängigem Elastizitätsmodul $E(x)$. Das Biegemoment M_y sowie das Flächenträgheitsmoment I_y sind **nicht** ortsabhängig. Berechnen Sie die zugehörige Biegedifferentialgleichung dritter Ordnung und die Biegedifferentialgleichung vierter Ordnung.

Gegeben sind folgende Größen: $E(x)$, $E'(x)$, $E''(x)$, M_y und I_y .

Lösung:

Biegedifferentialgleichung 3. Ordnung

$$w'''(x) = \frac{M_y E'(x)}{I_y E(x)^2}$$

Biegedifferentialgleichung 4. Ordnung

$$w^{(4)}(x) = \frac{M_y}{I_y} \left(\frac{E''(x)}{E(x)^2} - 2 \frac{E'(x)^2}{E(x)^3} \right)$$

1.2) Gegeben ist der Biegemomentenverlauf

$$M_y(x) = M_0 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2l}\right)^2}, \quad x \in [0, 2l]. \quad (1.2)$$

Berechnen Sie den Verlauf der zugehörigen Querkraft $Q_z(x)$ im angegebenen Intervall.

Gegeben sind folgende Größen: M_0 und l .

Lösung:

$$Q_z(x) = \frac{dM_y(x)}{dx} = M_0 \frac{x}{4l^2 \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2l}\right)^2}}$$

1.3) Gegeben ist der Dehnungsverlauf

$$\varepsilon(x) = -\varepsilon_0 \sin\left(\frac{x}{l} + \frac{\pi}{2}\right). \quad (1.3)$$

Berechnen Sie den Verlauf der zugehörigen Verschiebung $u(x)$ unter Verwendung der Randbedingung $u(0) = u_0$.

Gegeben sind folgende Größen: u_0 , ε_0 und l .

Lösung:

$$u(x) = \int \varepsilon(x) dx = \varepsilon_0 l \cos\left(\frac{x}{l} + \frac{\pi}{2}\right) + c$$

Mit $u(0) = u_0$ folgt

$$u(0) = \varepsilon_0 l \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + c \stackrel{!}{=} u_0 \quad \Rightarrow \quad c = u_0$$

Der Verlauf der Verschiebung ergibt sich damit zu

$$u(x) = \varepsilon_0 l \cos\left(\frac{x}{l} + \frac{\pi}{2}\right) + u_0$$

1.4) Eine parametrisierte Streckenlast

$$q(x) = a + bx + cx^3 \quad (1.4)$$

hat im Bereich $x \in [0, 2l]$ den in Abb. 1.1 dargestellten Verlauf. Berechnen Sie einen gültigen Satz von Parametern a , b und c an, sodass $q(x)$ die Funktion aus Abb. 1.1 beschreibt.

Gegeben sind folgende Größen: q_0 und l .

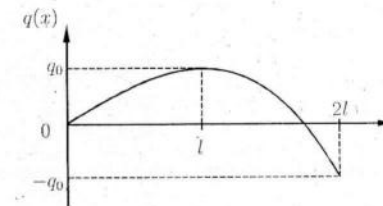


Abbildung 1.1: Parametrisierte Streckenlast.

Lösung:

Aus $q(0) = 0$ folgt direkt

$$q(0) = a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0$$

Mit $q(l) = q_0$ und $q(2l) = -q_0$ folgt

$$q(l) = lb + l^3c = q_0$$

$$q(2l) = 2lb + 8l^3c = -q_0$$

Hieraus ergibt sich

$$q(2l) - 2q(l) = 6l^3c = -3q_0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{q_0}{2l^3}$$

Eingesetzt in $q(l) = q_0$ oder $q(2l) = -q_0$ folgt schließlich

$$lb - \frac{q_0}{2} = q_0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3q_0}{2l}$$

- 1.5) Gegeben ist ein rechtseitig fest eingespannter Biegebalken der Länge $2l$, siehe Abb. 1.2a). Im Bereich $[0, l]$ wirkt eine Linienkraftdichte $q(x) = q_0 \left(1 - \frac{x}{l}\right)$. Zeichnen Sie für den in Abb. 1.2b) gegebenen Verlauf der Linienkraftdichte $q(x)$ qualitativ (**ohne Rechnung**) den Verlauf der zugehörigen Querkraft $Q_z(x)$ und den zugehörigen Momentenverlauf $M_y(x)$ in die abgebildeten Diagramme c) und d) ein.

Gegeben sind folgende Größen: q_0 und l .

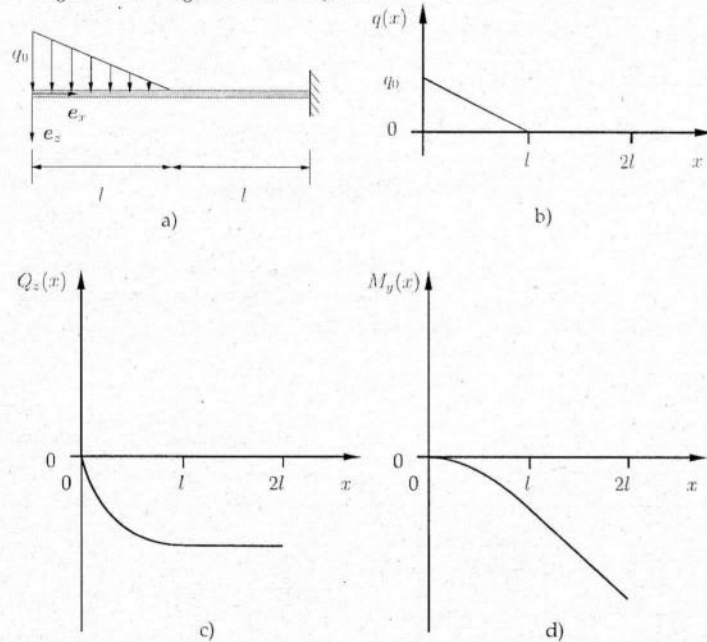


Abbildung 1.2: a) Biegebalken mit linearer Linienkraftdichte $q(x)$, b) Verlauf der Linienkraftdichte, c) Diagramm zum Einzeichnen von $Q_z(x)$, d) Diagramm zum Einzeichnen von $M_y(x)$.

- 1.6) Die Querschnittsgeometrie eines Biegebalkens ist zusammengesetzt aus zwei Rechtecken mit den Seitenlängen a und $3a$, siehe Abb. 1.3. Das $\{e_{y1}, e_{z1}\}$ - und $\{e_{y2}, e_{z2}\}$ -Koordinatensystem liegen im Flächenmittelpunkt des zugehörigen Rechtecks. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Steiner das axiale Flächenträgheitsmoment $I_{\bar{y}}$ des gesamten Querschnitts bezüglich des $\{e_{\bar{y}}, e_{\bar{z}}\}$ -Koordinatensystems. Gegeben ist folgende Größe: a

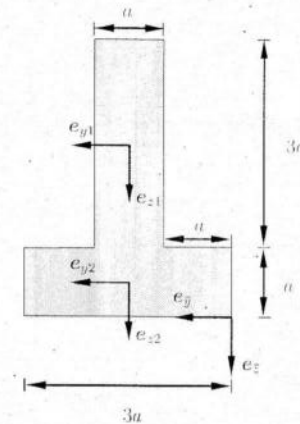


Abbildung 1.3: Querschnittsgeometrie des Biegebalkens.

Lösung:

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{y}} &= \frac{27a^4}{12} + \left(\frac{5}{2}a\right)^2 3a^2 + \frac{3a^4}{12} + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 3a^2 \\
 &= \frac{9a^4}{4} + \frac{75}{4}a^4 + \frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{4}a^4 = 22a^4
 \end{aligned}$$

- 1.7) In der linken Spalte von Tab. 1 sind Materialkonstanten von Aluminium aufgelistet. Geben Sie in der rechten Spalte die Maßzahlen und Maßeinheiten der Größen an, die in der linken Spalte gegeben sind.

Größe	Maßzahl	Maßeinheit
Elastizitätsmodul von Aluminium	70	GPa
Querkontraktionszahl von Aluminium	0.3	-

Tabelle 1: Geben Sie die entsprechende Maßzahl und Maßeinheit an.

Aufgabe 2

(Insgesamt 13 Punkte)

Der in Abb. 2.1a) dargestellte Balken der Länge $2l$ mit dem Elastizitätsmodul E ist einseitig fest eingespannt. Der Balken wird durch die vertikale Einzelkraft $F_V = F$ an der Stelle $x = l$ und die horizontale Einzelkraft $F_H = \frac{1}{2}F$ im Koordinatenursprung belastet. Die Geometrie des Balkenquerschnitts ist in Abb. 2.1b) gegeben. Das $\{e_{\bar{x}}, e_{\bar{y}}, e_{\bar{z}}\}$ -Koordinatensystem ist bezüglich des $\{e_x, e_y, e_z\}$ -Koordinatensystems um den Winkel $\alpha = 45^\circ$ um die x -Achse gedreht. **Querkraftschub wird in der gesamten Aufgabe vernachlässigt.**
Gegeben sind folgende Größen: h, l, α, E und F .

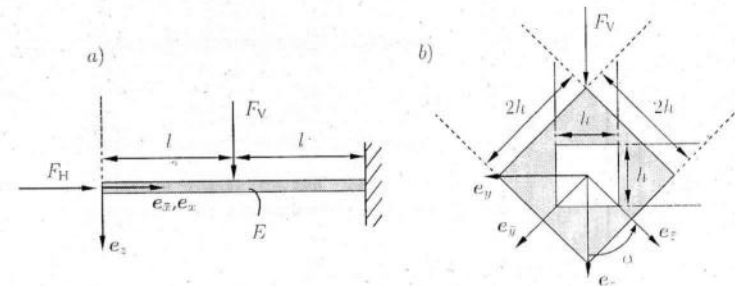


Abbildung 2.1: a) Durch eine vertikale und eine horizontale Einzellast belasteter Balken, b) Querschnitt des Balkens mit Einzelkraft F_V .

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 2.1) Geben Sie die axialen Flächenträgheitsmomente $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{z}}$ und das Deviationsmoment $I_{\bar{y}\bar{z}}$ bezüglich des $\{e_{\bar{x}}, e_{\bar{y}}, e_{\bar{z}}\}$ -Koordinatensystems an.

In den folgenden Teilaufgaben werden die Querschnittsfläche A , die axialen Flächenträgheitsmomente $I_{\bar{y}}$, $I_{\bar{z}}$, I_y , I_z sowie die Deviationsmomente $I_{\bar{y}\bar{z}}$ und I_{yz} als gegebene Größen vorausgesetzt.

- 2.2) Geben Sie den Biegemomentenverlauf M_y im Bereich $x \in [l, 2l]$ im $\{e_x, e_y, e_z\}$ -Koordinatensystem an. Zeichnen Sie das zugehörige Freikörperbild.
2.3) Berechnen Sie den Verlauf der Biegelinie $w(x)$ in z -Richtung im Bereich $x \in [l, 2l]$ unter Verwendung der Differentialgleichung 2. Ordnung. Geben Sie die dabei verwendeten Randbedingungen explizit an.

- 2.4) Geben Sie die Biegelinie $\bar{w}(\bar{x})$ in $\bar{z}$ -Richtung in Abhängigkeit der Biegelinie $w(x)$ im Bereich $\bar{x} \in [l, 2l]$ an.
- 2.5) Berechnen Sie im $\{e_x, e_y, e_z\}$ -Koordinatensystem die Lage und den Wert der betragsmäßig maximalen Spannung an der Stelle $x = 2l$. Berechnen Sie zudem an der Stelle $x = 2l$ die Lage der Spannungsnulllinie und geben Sie die geometrische Bedingung an, welche gelten muss, damit die Spannungsnulllinie innerhalb des Balkens liegt.

Aufgabe 2 – Musterlösung

(Insgesamt 13 Punkte)

- 2.1) Mit $I_{1\bar{y}} = 16h^4/12$ und $I_{2\bar{y}} = h^4/12$ ergibt sich für das axiale Flächenträgheitsmoment

$$I_{\bar{y}} = I_{1\bar{y}} - I_{2\bar{y}} = \frac{5}{4}h^4. \quad (2.1)$$

Wegen der Symmetrie folgt

$$I_{\bar{z}} = I_{\bar{y}} = \frac{5}{4}h^4. \quad (2.2)$$

Da das $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ -Koordinatensystem ein Hauptachsensystem ist, folgt

$$I_{\bar{y}\bar{z}} = 0. \quad (2.3)$$

- 2.2) Freischnitt:

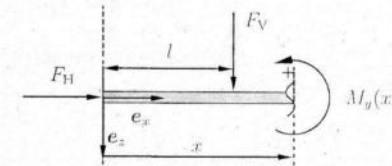


Abbildung 2.2: Freischnitt zur Bestimmung des Biegemomentenverlaufs.

Für den Biegemomentenverlauf im Bereich $x \in [l, 2l]$ ergibt sich

$$M_y(x) = F(l - x). \quad (2.4)$$

- 2.3) Aus der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$w''(x) = -\frac{M_y(x)}{EI_y} \quad (2.5)$$

folgt nach Integration

$$w'(x) = -\frac{F}{EI_y} \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1, \quad (2.6)$$

$$w(x) = -\frac{F}{EI_y} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1x + C_2. \quad (2.7)$$

Mit den Randbedingungen $w(x = 2l) = 0$ und $w'(x = 2l) = 0$ folgt

$$C_1 = 0, \quad (2.8)$$

$$C_2 = \frac{2Fl^3}{3EI_y}. \quad (2.9)$$

Damit ergibt sich die Biegelinie zu

$$w(x) = -\frac{F}{EI_y} \left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{2l^3}{3} \right). \quad (2.10)$$

2.4) Die Biegelinie $\tilde{w}(\bar{x})$ im Bereich ergibt $x \in [l, 2l]$ sich zu

$$\tilde{w}(\bar{x}) = \cos(45^\circ) w(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} w(x). \quad (2.11)$$

2.5) An der Stelle $x = 2l$ gilt

$$\sigma(x = 2l, z) = -\frac{Fl}{I_y} z - \frac{1}{2} \frac{F}{A}. \quad (2.12)$$

Die betragsmäßig maximale Spannung tritt bei $z = \sqrt{2}l$ auf und hat den Wert

$$\sigma_{\max} = \left| -\frac{Fl}{I_y} \sqrt{2}l - \frac{1}{2} \frac{F}{A} \right|. \quad (2.13)$$

Für die Spannungsnulllinie lösen wir $\sigma(x = 2l, z) = 0$ nach z und erhalten

$$z = -\frac{1}{2} \frac{I_y}{lA}. \quad (2.14)$$

Die Spannungsnulllinie existiert folglich nur falls gilt

$$\frac{1}{2} \frac{I_y}{lA} \leq \sqrt{2}l. \quad (2.15)$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben ist ein gerader, linear elastischer Balken der Länge L mit Kreisquerschnitt mit Radius R (siehe Abb. 3.1). Der Balken ist bei $x = 0$ fest eingespannt. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Flächenmittelpunkt des Querschnitts an der festen Einspannung. Der Elastizitätsmodul des Balkens ist E , die Querkontraktionszahl ist ν . Das Flächenträgheitsmoment ist I_y . Die maximal zulässige Schubspannung ist $\tau_{\max}$. Der Sicherheitsfaktor ist S . Am Ende des Balkens bei $x = L$ greift eine Kraft F am äußeren Radius $r = R$ in e_z -Richtung an.

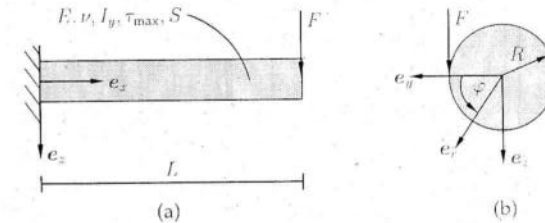


Abbildung 3.1: (a) Linksseitig fest eingespannter Balken mit Belastung F . (b) Kreisquerschnitt des Balkens mit Belastung F am äußeren Radius R .

Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$Q_z = F, \quad M_y(x) = F(x-L), \quad M_T = FR, \quad N = Q_y = M_z = 0.$$

Querkraftschub wird in der gesamten Aufgabe vernachlässigt!

In der gesamten Aufgabe soll das Zylinderkoordinatensystem $\{e_x, e_r, e_\varphi\}$ verwendet werden. Dieses muss daher nicht an jeder Matrix indiziert werden.

Gegeben sind folgende Größen: $E, \nu, L, R, I_y, S, \tau_{\max}$ und F .

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

- 3.1) Geben Sie die Biegespannung $\sigma_B(x, r, \varphi)$ im Balken bezüglich des $\{e_x, e_r, e_\varphi\}$ -Koordinatensystems an.
- 3.2) Geben Sie die Torsionsspannung $\tau_T(x, r, \varphi)$ im Balken bezüglich des $\{e_x, e_r, e_\varphi\}$ -Koordinatensystems an.
- 3.3) Geben Sie die Spannungsmatrix $\sigma(x, r, \varphi)$ im Balken bezüglich des $\{e_x, e_r, e_\varphi\}$ -Koordinatensystems an.
- 3.4) Handelt es bei dem vorliegenden Spannungszustand um einen ebenen Spannungszustand? Begründen Sie ihre Antwort!

Für eine konkrete Anfertigung des Balkens wird nun ein Verhältnis von Balkenlänge zu Radius von $L = 12R$ gewählt. An einem nicht näher bestimmten Punkt P innerhalb dieses Balkens liegt, unter ähnlicher Belastung wie in Abb. 3.1, folgender Spannungszustand vor

$$\sigma(P) = \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_x, e_r, e_\varphi\}}$$

- 3.5) Berechnen Sie den Dehnungszustand $\varepsilon(P)$ am Punkt P mittels des Hooke'schen Gesetzes.
- 3.6) Berechnen Sie den sphärischen $\sigma^\circ(P)$ und den deviatorischen $\sigma'(P)$ Spannungsanteil am Punkt P .
- 3.7) Berechnen Sie die elastische Gestaltänderungsenergiedichte $W^G(P)$ am Punkt P .
- 3.8) Berechnen Sie die drei Hauptspannungen $\sigma_1^H(P)$, $\sigma_2^H(P)$, $\sigma_3^H(P)$ am Punkt P .
- 3.9) Berechnen Sie die maximale Kraft $F_{\max}$, mit welcher der Balken belastet werden darf, ohne dass die maximal zulässige Schubspannung $\tau_{\max}$ am Punkt P überschritten wird. Berücksichtigen Sie hierbei den zusätzlichen Sicherheitsfaktor S bei der Berechnung der maximal zulässigen Kraft $F_{\max}$. Nutzen Sie die Schubspannungshypothese.

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

- 3.1) Die Biegespannung σ_B kann über den Zusammenhang $z = r \sin(\varphi)$ und die gegebenen Größen $M_y(x)$ und I_y folgendermaßen berechnet werden

$$\sigma_B(x, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z = \frac{F(x-L)}{I_y} r \sin(\varphi) = \frac{4F(x-L)}{\pi R^4} r \sin(\varphi) = \sigma_B(x, r, \varphi) \quad (3.1)$$

- 3.2) Für das polare Flächenträgheitsmoment gilt $I_p = 2I_y = \frac{\pi R^4}{2}$. Damit ergibt sich für die Torsionsspannung τ_T des runden Vollprofils

$$\tau_T(r) = \frac{M_T}{I_p} r = \frac{M_T}{2I_y} r = \frac{2F}{\pi R^3} r \quad (3.2)$$

- 3.3) Die Spannungsmatrix hat für den vorliegenden Fall die folgende Form

$$\sigma(x, r, \varphi) = \begin{pmatrix} \sigma_B(x, r, \varphi) & 0 & \tau_T(r) \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_T(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_x, e_r, e_\varphi\}} = \frac{2F}{\pi R^3} \begin{pmatrix} \frac{2(x-L)\sin(\varphi)r}{R} & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 \\ r & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{e_x, e_r, e_\varphi\}} \quad (3.3)$$

- 3.4) Für den betrachteten Lastfall liegen im Balken lediglich die Spannungskomponenten $\sigma_B = \sigma_{xx}$ und $\tau_T = \sigma_{x\varphi} = \sigma_{\varphi x}$ vor. Es existieren keine radialen Spannungskomponenten. Allerdings hängt der allgemeine Spannungszustand $\sigma(x, r, \varphi)$ im betrachteten Balken von allen drei Koordinaten $\{x, r, \varphi\}$ ab, und es liegt daher kein allgemeiner ebener Spannungszustand vor.

- 3.5) Mit Hilfe des (inversen) Hooke'schen Gesetzes lässt sich die Dehnungsmatrix am Punkt P berechnen

$$\varepsilon(P) = \frac{1}{2G} \left(\sigma(P) - \frac{\nu}{1+\nu} \text{sp}(\sigma(P)) \mathbf{I} \right) \quad (3.4)$$

$$= \frac{1}{2G} \left(\frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{12F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{E} \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & (1+\nu) \\ 0 & -12\nu & 0 \\ (1+\nu) & 0 & -12\nu \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

- 3.6) Der sphärische Spannungsanteil des betrachteten Spannungszustand am Punkt P kann wie folgt berechnet werden

$$\sigma^\circ(P) = \frac{1}{3} \text{sp}(\sigma(P)) \mathbf{I} = \frac{4F}{\pi R^2} \mathbf{I} \quad (3.7)$$

Für den deviatorischen Spannungsanteil gilt

$$\sigma'(P) = \sigma - \sigma^0 = \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{4F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.7) Die Gestaltänderungsenergiegedichte $W^G(P)$ am Punkt P berechnet sich über

$$W^G(P) = \frac{1}{4G} \sigma'(P) \cdot \sigma'(P) = \frac{2(1+\nu)}{4E} \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \frac{F}{\pi R^2} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$= \frac{(1+\nu)}{2E} \frac{F^2}{\pi^2 R^4} (8^2 + 2(-4)^2 + 2(1)^2) = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{49F^2}{\pi^2 R^4} \quad (3.10)$$

3.8) Am konkreten Punkt P liegt ein ebener Spannungszustand vor. Daher gilt für eine Hauptspannung

$$\sigma_2^H = 0 \quad (3.11)$$

Für die beiden weiteren Hauptspannungen gilt dann

$$\sigma_{1,3}^H = \frac{\sigma_{xx}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}}{2}\right)^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2} = \frac{12F}{2\pi R^2} \pm \sqrt{\left(\frac{12F}{2\pi R^2}\right)^2 + \left(\frac{F}{\pi R^2}\right)^2} \quad (3.12)$$

$$= \frac{F}{\pi R^2} (6 \pm \sqrt{6^2 + 1^2}) = \frac{F}{\pi R^2} (6 \pm \sqrt{37}) \quad (3.13)$$

3.9) Die Berechnung der maximal zulässigen Kraft $F_{\max}$ auf Basis der Schubspannungshypothese, unter Berücksichtigung des Sicherheitsfaktors S , erfolgt über das Kriterium

$$\tau_V S = \frac{1}{2} |\sigma_1^H - \sigma_3^H| S \leq \tau_{\max} \quad (3.14)$$

Hierbei gilt für die Vergleichsspannung

$$\tau_V = \frac{1}{2} |\sigma_1^H - \sigma_3^H| = \frac{1}{2} \left| \frac{F}{\pi R^2} (6 + \sqrt{37}) - \frac{F}{\pi R^2} (6 - \sqrt{37}) \right| = \frac{\sqrt{37}F}{\pi R^2} \quad (3.15)$$

Einsetzen und umstellen nach F ergibt dann

$$\frac{\sqrt{37}F}{\pi R^2} S \leq \tau_{\max} \quad (3.16)$$

$$F \leq \frac{\tau_{\max} \pi R^2}{\sqrt{37} S} \quad (3.17)$$

Für die maximal zulässige Kraft gilt demnach

$$F_{\max} = \frac{\tau_{\max} \pi R^2}{\sqrt{37} S} \quad (3.18)$$

Aufgabe 4

(Insgesamt 12 Punkte)

Gegeben ist ein Zugstab der Länge l mit der Zugsteifigkeit EA , siehe Abb. 4.1. Der Stab ist bei $x = l$ fest eingespannt. Zudem wirkt eine konstante Längskraftdichte n_0 entlang des Stabes.

Gegeben sind folgende Größen: E , A , n_0 und l .

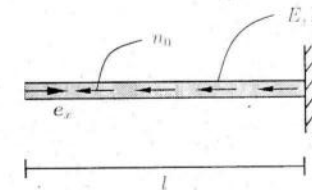


Abbildung 4.1: Rechtsseitig fest eingespannter Zugstab, belastet durch n_0 entlang der Längsachse.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

Für das Verfahren von Galerkin ist die Ansatzfunktion

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

mit den unbekannten Konstanten α_0 , α_1 und α_2 gegeben.

- 4.1) Geben Sie die geometrischen und physikalischen Randbedingungen an.
- 4.2) Geben Sie die oben beschriebene Ansatzfunktion mit Hilfe der Randbedingungen aus Teilaufgabe 4.1 in Abhängigkeit von α_2 an.
- 4.3) Berechnen Sie unter Verwendung des Verfahrens von Galerkin α_2 und geben Sie $u(x)$ explizit an.
- 4.4) Berechnen Sie mit dem 1. Satz von Castigliano die Verschiebung bei $x = l/2$.

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 12 Punkte)

4.1) Die geometrische und physikalische Randbedingungen lauten

$$u(l) = 0, \quad (4.1)$$

$$u'(0) = 0. \quad (4.2)$$

4.2) Mit den Randbedingungen aus den Gleichungen (4.1) und (4.2) ergibt sich

$$u'(0) = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0 \quad (4.3)$$

$$u(l) = 0 \rightarrow \alpha_0 = -\alpha_2 l^2 \quad (4.4)$$

$$u(x) = \alpha_2 (x^2 - l^2) \quad (4.5)$$

4.3) Für das Verfahren von Galerkin gilt zunächst

$$\int_0^l (EA u'' - n) \delta u(x) dx = 0. \quad (4.6)$$

Mit

$$\delta u(x) = (x^2 - l^2) \delta \alpha_2 \quad (4.7)$$

erhält man das PdvV nach Einsetzen der Testfunktion

$$\int_0^l (2EA \alpha_2 - n_0)(x^2 - l^2) \delta \alpha_2 dx = 0. \quad (4.8)$$

Für beliebige $\delta \alpha_2 \neq 0$ erhält man für die Unbekannte α_2

$$\alpha_2 = \frac{n_0}{2EA} \quad (4.9)$$

und somit

$$u(x) = \frac{n_0}{2EA} (x^2 - l^2). \quad (4.10)$$

4.4) Zunächst wird eine Hilfskraft F_0 eingeführt, siehe Abbildung 4.2. Die Schnittgrößen $N_1(x)$ und $N_2(x)$ sind dann gegeben über

$$N_1(x) = n_0 x, \quad 0 \leq x \leq l/2 \quad (4.11)$$

$$N_2(x) = n_0 x + F_0, \quad l/2 < x \leq l \quad (4.12)$$

Für das System mit der Hilfskraft F_0 gilt für die Gesamtenergie

$$W_{\text{ges}}^* = \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \frac{N_1^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_{l/2}^l \frac{N_2^2}{EA} dx \quad (4.13)$$

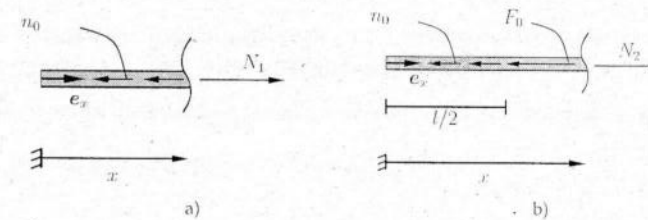
$$= \frac{1}{2} \int_0^{l/2} \frac{n_0^2 x^2}{EA} dx + \frac{1}{2} \int_{l/2}^l \frac{(F_0 + n_0 x)^2}{EA} dx. \quad (4.14)$$

Die Verschiebung bei $x = l/2$ ergibt sich dann nach dem 1. Satz von Castigliano zu

$$u(l/2) = \frac{\partial W_{\text{ges}}^*}{\partial F_0} \bigg|_{F_0=0} \quad (4.15)$$

$$= \int_{l/2}^l \frac{F_0 + n_0 x}{EA} \bigg|_{F_0=0} dx \quad (4.16)$$

$$= \frac{3n_0 l^2}{8EA}. \quad (4.17)$$

Abbildung 4.2: Freischnitte mit eingeführter Hilfskraft F_0 .

Aufgabe 5

(Insgesamt 6 Punkte)

Gegeben ist das in Abb. 5.1 schematisch dargestellte System aus einem linear elastischen Träger mit kreisförmigem Querschnitt und entsprechendem Zylinderkoordinatensystem. Die Länge des Trägers ist L , der Radius R . Der Schubmodul wird mit G bezeichnet, das polare Flächenträgheitsmoment mit I_p und die maximal zulässige Schubspannung mit τ_{zul} .

Die entsprechenden, in MAPLE definierten Variablen lauten: L , R , G , I_p und τ_{zul} .

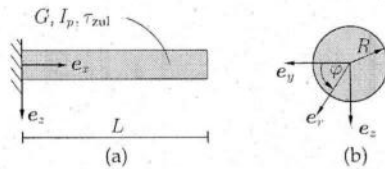


Abbildung 5.1: (a) Eingespannter Träger. (b) Kreisquerschnitt.

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben und achten Sie dabei auf eine präzise Beantwortung aller Fragen und Aufgabenstellungen.

- 5.1) Welche konstante Last würde **ausschließlich** (ohne Vernachlässigung von Querkraftschub) eine Schubspannung $\sigma_{\varphi x}$ in der $r - \varphi$ -Ebene hervorrufen? Zeichnen Sie eine mögliche Last am Träger in Abb. 5.2 ein.

Lösung:

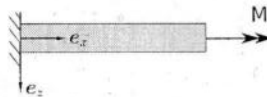


Abbildung 5.2: Eingespannter Träger.

- 5.2) In dieser Teilaufgabe greift ein konstantes Torsionsmoment M_{T0} am rechten Ende des Trägers an. Übersetzen Sie den durch `ausdruck1` in MAPLE definierten Ausdruck in eine mathematische Notation und geben Sie deren mechanische Bedeutung an.

```
[> ausdruck1 := dsolve({diff(vartheta(x), x) = M_T0/G/I_p,
                           vartheta(0) = 0}, vartheta):
```

Lösung:

`ausdruck1` ist die DGL der Verdrehung bei einer Torsionsbelastung.

$$\vartheta' = \frac{M_T}{GI_p}, \quad \vartheta(0) = 0. \quad (5.1)$$

- 5.3) In dieser Teilaufgabe greift ein konstantes Torsionsmoment M_{T0} am rechten Ende des Trägers an. Geben Sie die Torsionsfedersteifigkeit C_T am rechten Ende anhand der gegebenen Größen an.

Lösung:

$$C_T = \frac{GI_p}{L}$$

- 5.4) In dieser Teilaufgabe greift ein konstantes Torsionsmoment M_{T0} am rechten Ende des Trägers an. Welche mechanische Interpretation besitzt die in nachfolgendem MAPLE-Code berechnete Größe `groesse2`?

```
[> groesse1 := M_T0 * R / I_p:
[> groesse2 := groesse1 / tau_zul:
```

Lösung:

`groesse2` ist der Sicherheitsfaktor gegen Versagen.

- 5.5) In dieser Teilaufgabe wird der Träger durch eine konstante Torsionsmomentendichte $m_T(x) = m_{T0}$ auf seiner gesamten Länge belastet. Geben Sie die Differentialgleichung für den Verdrehungswinkel ϑ für dieses Problem sowie die Randbedingung am freien Ende des Trägers an.

Lösung:

$$\text{DGL: } \vartheta'' = -\frac{m_{T0}}{GI_p}.$$

$$\text{RB: } \vartheta'(L) = 0.$$