Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

09. März 2011

8:30 – 10:00 Uhr

Name: ______________________

Vorname: ______________________

Matrikelnummer: ____________

Bitte beachten Sie:
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punkte	24	22	18	16	10	90
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

Aufgabe 1

(Insgesamt 24 Punkte)

Gegeben ist ein rechtsseitig fest eingespannter Balken der Länge l mit einem kreisförmigen Querschnitt des Radius R. Der Balken wird durch eine dreieckförmige Streckenlast $q(x)$ und durch eine exzentrische Kraft F in negative x-Richtung belastet (siehe Abb. 1.1). Gegeben sind l, R, E, $F > 0$ und $q_0 > 0$.
Verwenden Sie bei allen Berechnungen ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

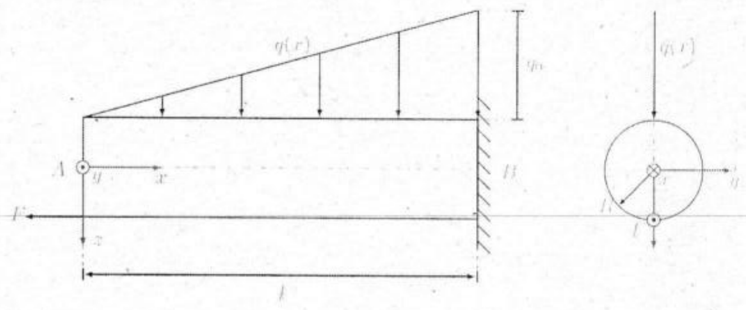

Abbildung 1.1: Fest eingespannter Balken mit kreisförmigem Querschnitt in der x-z-(links) und y-z-Ebene (rechts)

1.1) Welches Versetzungsmoment M_V muss bei Verschiebung der Kraft F in den Flächenmittelpunkt eingeführt werden, damit das äußere Kraftsystem statisch äquivalent bleibt? Zeichnen Sie das Freikörperbild mit der verschobenen Kraft F und dem Versetzungsmoment M_V.

1.2) Berechnen Sie die Funktion $q(x)$, die den Verlauf der dreieckförmigen Steckenlast entlang des Balkens beschreibt.

1.3) Berechnen Sie alle Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$, $M(x)$ mit Hilfe der Schnittgrößendifferentialgleichungen, ohne die Auflagerreaktionen in B zu verwenden.

1.4) Berechnen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment 2. Grades I_y des kreisförmigen Querschnitts und bestimmen Sie die Normalspannungsverteilung $\sigma_{xx}(x,z)$ infolge Biegung und Zug. Geben Sie die Lage der neutralen Faser $z(x)$ an.

1.5) Berechnen Sie die Durchbiegung des Balkens an der Stelle $x = 0$ durch Integration der Biegeliniendifferentialgleichung unter Vernachlässigung des Querkraftschubs. Geben Sie alle benötigten Randbedingungen an.

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 24 Punkte)

1.1) Versetzungsmoment:

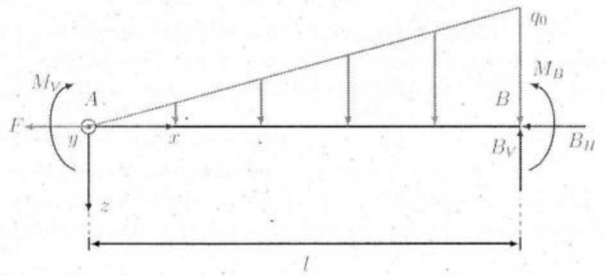

Abbildung 1.2: Versetzungsmoment und verschobene Kraft

$$M_V = FR. \tag{1.1}$$

1.2) Streckenlast:beschrieben:

$$q(x) = \frac{q_0}{l}\, x. \tag{1.2}$$

1.3) Schnittgrößen:

$$N(x) = F, \qquad Q(x) = -\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2, \qquad M(x) = FR - \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3. \tag{1.3}$$

1.4) Flächenträgheitsmoment:

$$I_y = \frac{\pi R^4}{4}. \tag{1.4}$$

Normalspannungsverteilung:

$$\sigma_{xx}(x,z) = \frac{F}{\pi R^2} + \frac{4}{\pi R^4}\left(FR - \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3\right) z. \tag{1.5}$$

Die Lage der neutralen Faser:

$$\sigma_{xx}(x,z) = \frac{F}{\pi R^2} + \frac{4}{\pi R^4}\left(FR - \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3\right) z = 0 \tag{1.6}$$

$$z = -\frac{FR^2}{4}\left(FR - \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3\right)^{-1}. \tag{1.7}$$

1.5) Biegelinie und Durchbiegung bei $x = 0$:

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{4}{E\pi R^4}\left(FR - \frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3\right). \tag{1.8}$$

(1.9)

$$w'(x{=}l) = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = \frac{4}{E\pi R^4}\left(FRl - \frac{1}{24}q_0 l^3\right). \tag{1.10}$$

$$w(x{=}l) = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = \frac{4}{E\pi R^4}\left(\frac{1}{2}FRl^2 - \frac{1}{120}q_0 l^4\right) - C_1 l.$$

$$= \frac{4}{E\pi R^4}\left(-\frac{1}{2}FRl^2 + \frac{1}{30}q_0 l^4\right). \tag{1.11}$$

Für die Durchbiegung bei $x = 0$ ergibt sich:

$$w(x{=}0) = C_2 = \frac{4}{E\pi R^4}\left(-\frac{1}{2}FRl^2 + \frac{1}{30}q_0 l^4\right). \tag{1.12}$$

Aufgabe 2

(Insgesamt 22 Punkte)

Gegeben ist ein Balken mit einem dickwandigen T-Profil (siehe Abb. 2.1). Das Profil wird durch die Querkraft Q belastet, für die gilt $Q = F$.
Gegeben sind a, $F > 0$.

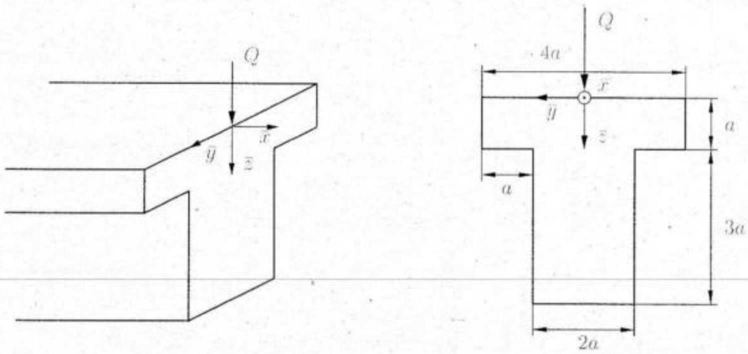

Abbildung 2.1: Balken mit T-Profil (links) und Querschnitt in der $\bar{y}$-$\bar{z}$-Ebene (rechts)

2.1) Berechnen Sie den Flächenmittelpunkt des T-Profils.

2.2) Berechnen Sie das statische Moment $S_y(z)$ bezüglich des xyz-Koordinatensystems im Flächenmittelpunkt und nennen Sie die Bereichsgrenzen.

2.3) Berechnen Sie zunächst das Flächenträgheitsmoment $I_{\bar{y}}$ bezüglich des gegebenen $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$-Koordiantensystems. Verwenden Sie anschließend den Satz von Steiner um das Flächenträgheitsmoment I_y bezüglich des xyz-Koordinatensystems im Flächenmittelpunkt zu berechnen.

2.4) Berechnen Sie die Schubspannungsverteilung $\tau_{zx}(x,z)$ bezüglich des xyz-Koordinatensystems und skizzieren Sie den Verlauf der Schubspannung unter Angabe der z-Koordinaten aller Rand- und Übergangswerte.

Aufgabe 2 – Musterlösung

(Insgesamt 22 Punkte)

2.1) Für die Koordinaten des Flächemittelpunktes folgt

$$\begin{aligned} y_S &= 0, \\ z_S &= \frac{17}{10}a. \end{aligned} \tag{2.1}$$

2.2) Statische Moment:

$$S_y(z) = \begin{cases} \left(\frac{289}{100}a^2 - z^2\right) 2a & \text{für } -\frac{17}{10}a \le z \le -\frac{7}{10}a, \\ \left(\frac{529}{100}a^2 - z^2\right) a & \text{für } -\frac{7}{10}a < z \le \frac{23}{10}a. \end{cases} \tag{2.2}$$

2.3) Flächenträgheitsmomente:

$$I_{\bar{y}} = \frac{130}{3}a^4, \qquad I_y = \frac{433}{30}a^4. \tag{2.3}$$

2.4) Für die Schubspannung folgt mit

$$\tau_{zx}(x,z) = \begin{cases} \frac{15F\left(\frac{289}{100}a^2 - z^2\right)}{433a^4} & \text{für } -\frac{17}{10}a \le z \le -\frac{7}{10}a, \\ \frac{15F\left(\frac{529}{100}a^2 - z^2\right)}{433a^4} & \text{für } -\frac{7}{10}a < z \le \frac{23}{10}a. \end{cases} \tag{2.4}$$

Schubspannungverlauf:

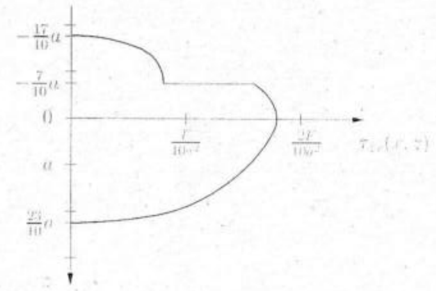

Abbildung 2.2: Verlauf der Schubspannung

Aufgabe 3

(Insgesamt 18 Punkte)

Gegeben sind der Spannungszustand eines ebenen Bleches mit den in Abb. 3.1 dargestellten Abmaßen bzgl. der Orthonormalbasis $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 3\sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ \sigma_0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}} \quad ; \qquad \sigma_0 > 0$$

und die elastischen Konstanten G (Schubmodul) und K (Kompressionsmodul).
Die zugehörigen Hauptspannungen $\sigma_1^H = (2+\sqrt{2})\sigma_0$, $\sigma_2^H = (2-\sqrt{2})\sigma_0$ und $\sigma_3^H = 0$ treten unter einer Drehung $\varphi_0 \in [0; \pi/2]$ um die z-Achse auf.
Sämtliche Endergebnisse sind ausschließlich in Abhängigkeit von l, h, G, K und σ_0 anzugeben.

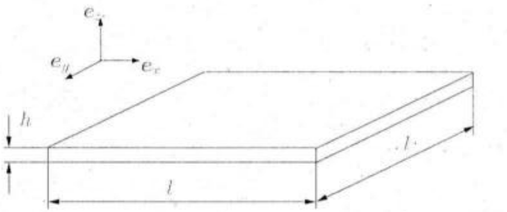

Abbildung 3.1: Ebenes Blech

3.1) Skizzieren Sie den zum gegebenen Spannungszustand gehörigen Mohr'schen Kreis und kennzeichnen Sie die Hauptspannungen und die gegebenen Spannungskomponenten in Ihrer Skizze.

3.2) Berechnen Sie den Winkel $\varphi_0 \in [0; \pi/2]$ zwischen x-Achse und Hauptachse 1. Tragen Sie die zugehörige Drehung im Mohr'schen Kreis ein. Skizzieren Sie das gegebene Koordinatensystem und das dagegen verdrehte Hauptachsensystem.

3.3) Berechnen Sie die zum gegebenen Spannungszustand gehörige Tresca-Vergleichsspannung τ_C.

3.4) Geben Sie den Druckanteil des Spannungstensors und den Spannungsdeviator im Hauptachsensystem an. Berechnen Sie damit die Volumenänderungsenergie, die Gestaltänderungsenergie und die Formänderungsenergie.
Hinweis: Der Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird für die Rechnung nicht benötigt.

3.5) Berechnen Sie die Arbeit, die benötigt wird, um dem Blech den beschriebenen Spannungszustand aufzuprägen (ausgehend vom spannungsfreien Zustand).

Aufgabe 3 – Musterlösung

(Insgesamt 18 Punkte)

3.1) Skizze des Mohr'schen Kreises:

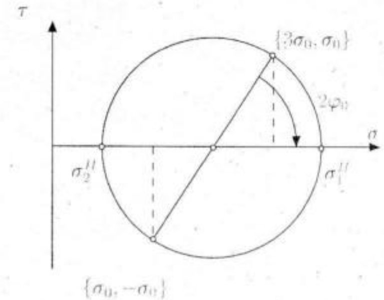

Abbildung 3.2: Mohr'scher Kreis

3.2) Berechnung des Hauptachsenwinkels φ_0:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{8} \tag{3.1}$$

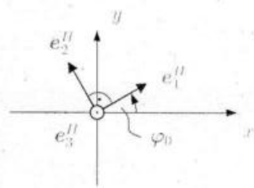

Abbildung 3.3: Drehung des Hauptachsensystems

3.3) Berechnung der Tresca-Vergleichsspannung:

$$\tau_C = \frac{\sqrt{2}+2}{2}\sigma_0. \tag{3.2}$$

3.4) Druckspannungstensor, Spannungsdeviator, Energien:

$$\boldsymbol{\sigma}^\circ = \begin{pmatrix} 4/3\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3\sigma_0 \end{pmatrix}_{\{e_1, e_2, e_3\}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = \begin{pmatrix} (2/3+\sqrt{2})\sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & (2/3-\sqrt{2})\sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3\sigma_0 \end{pmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}}$$

$$W = \underbrace{\frac{3}{6K}\frac{16}{9}\sigma_0^2}_{W^V} + \underbrace{\frac{1}{4G}\left(\frac{8}{9}+4+\frac{16}{9}\right)\sigma_0^2}_{W^G} = \left(\frac{8}{9K}+\frac{5}{3G}\right)\sigma_0^2. \qquad (3.3)$$

3.5) Für die gesamte Arbeit ergibt sich nach dem Arbeitssatz

$$A_a = A_i = WV = \left(\frac{8}{9K}+\frac{5}{3G}\right)\sigma_0^2 l^2 h. \qquad (3.4)$$

5 TM II F_11

Aufgabe 4

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben ist das Feder-Balken-System in Abb. 4.1. Die Balken haben die Länge l, den Elastizitätsmodul E, das axiale Flächenträgheitsmoment $I_y = I$ und sind einseitig fest eingespannt und auf der anderen Seite verschieblich gelagert. Bei $x = l$ sind die Balken durch eine Feder mit der Federsteifigkeit C_F verbunden.
Sämtliche Endergebnisse sind ausschließlich in Abhängigkeit von l, E, I, C_F anzugeben.

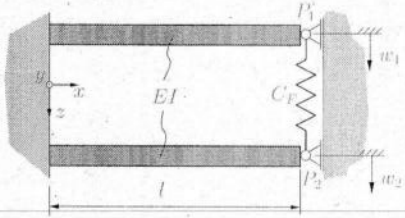

Abbildung 4.1: Feder-Balken-System

4.1) Wie groß ist die Federsteifigkeit C_B jedes einzelnen der beiden einseitig eingespannten Balken unter Wirkung einer Einzelkraft am freien Ende?
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung die Biegelinien-DGL. Geben Sie alle Randbedingungen an.

Im Folgenden wird die Verschiebung w_2 im Punkt P_2 vorgegeben. Im Punkt P_1 wirkt keine äußere Kraft.

4.2) Berechnen Sie die Steifigkeit C_{ges} für das Feder-Balken-System gegen die Verschiebung w_2, d.h. das Verhältnis von äußerer Kraft und Verschiebung im Punkt P_2.

4.3) Berechnen Sie die elastische Formänderungsenergie W_{ges} im Gesamtsystem infolge einer Verschiebung w_2.

4.4) Wie groß ist die Kraft in der Feder für die auf das Gesamtsystem wirkende vorgegebene Verschiebung w_2?

4.5) Wie groß ist die Verschiebung im oberen Balkenende w_1 infolge der Verschiebung des unteren Balkenendes w_2, wenn die Feder halb so steif ist wie die Balken ($C_F = C_B/2$)?

Aufgabe 4 – Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

4.1) Berechnung der Balkensteifigkeit Randbedingungen:

$$w'(0) = w(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = C_2 = 0. \tag{4.1}$$

$$C_B = \frac{F}{w(l)} = \frac{3EI}{l^3} \tag{4.2}$$

4.2) Gesamtsteifigkeit:

$$C_{\text{ges}} = 3EI\left(\frac{1}{l^3} + \frac{C_F}{3EI + C_F l^3}\right). \tag{4.3}$$

4.3) Das Balkensystem unter der Verschiebungs-RB für w_2 hat die Energie

$$W_{\text{ges}} = \frac{1}{2}C_{\text{ges}}w_2^2. \tag{4.4}$$

4.4) Kraft auf die Feder:

$$F_1 = F_{\text{ges}} - F_2 = \frac{3EI\,C_F}{3EI + C_F l^3}w_2. \tag{4.5}$$

4.5) Verschiebung am oberen Balkenende

$$w_1 = \frac{1/2}{1+1/2}w_2 = \frac{1}{3}w_2. \tag{4.6}$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 10 Punkte)

Gegeben ist ein dünnwandiger Stab (Länge L, Schubmodul G), der mit dem Torsionsmoment M_T belastet wird. Es werden zwei unterschiedliche Querschnitte verwendet: ein geschlossenes und ein bei E geschlitztes Profil gleicher Abmessungen. Die Abmessungen des geschlossenen Profils sind der Abb. 5.1 (rechts) zu entnehmen.

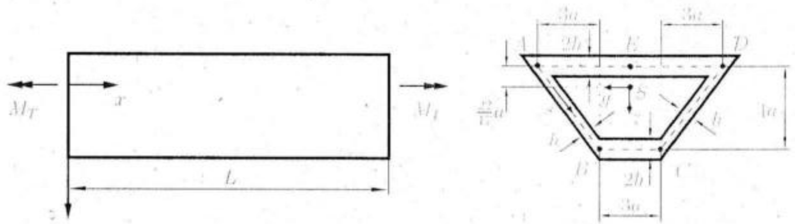

Abbildung 5.1: Geometrie des Stabes: Belastung durch Torsionsmoment M_T (links) und Querschnitt (rechts)

Es wird das geschlossene Profil betrachtet.

5.1) Welche mechanische Größe wird in dem nachfolgenden MAPLE-Code mit `var3` berechnet?

```
[> var1:=(9*a+3*a)/2*4*a:
[> var2:=sqrt((3*a)^2+(4*a)^2):
[> var3:=4*var1^2/(2*(var2/h)+3*a/(2*h)+9*a/(2*h)):
```

Lösung:
Es wird das Torsionsträgheitsmoment nach der Formel

$$I_T = \frac{4A_m^2}{\int \frac{ds}{h(s)}} \tag{5.1}$$

berechnet.

5.2) Geben Sie in mathematischer Notation den Ausdruck für das Problem an, die in `asd` gelöst wird. Welche mechanische Größe wird mit `tmax` berechnet?

```
[> asd:=dsolve({diff(theta(x),x)=M_T/(G*I_T),
                theta(0)=0},theta(x)):assign(%):
[> t_fun:=unapply(theta(x),x):
[> tmax:=t_fun(L):
```

Lösung:
Das Problem (DGL der Verdrehung) lautet:

$$\vartheta'(x) = \frac{M_T}{GI_T}\ ,\ \vartheta(0) = 0\ . \tag{5.2}$$

Mit `tmax` wird die relative Verdrehung am Stabende bei $x = L$ ausgerechnet.

5.3) Welche zwei mechanischen Größen werden in folgendem MAPLE-Code berechnet?

```
[> var4:=M_T/(2*var1*h):
[> var5:=M_T/(2*var1*2*h):
```

Lösung:
Es wird die Schubspannung

$$\tau(s) = \frac{M_T}{2h(s)A_m} \tag{5.3}$$

- in den schrägen Stegen des Profils (Dicke h) in `var4` und
- in den waagrechten Stegen des Profils (Dicke $2h$) in `var5`

berechnet.

5.4) Welche mechanische Größe wird im nachfolgenden MAPLE-Code mit `var8` berechnet?

```
[> var6:=sqrt((3*a/(4*a)*(4*a-22/17*a))^2+(4*a-22/17*a)^2):
[> var7:=1/2*3/2*a*(4*a-22/17*a) +
          1/2*3*a/(4*a)*(4*a-22/17*a)^2:
[> var8:=M_T/(2*G*var1)*int(1/h,s=0..var6)
          - 2*M_T*var7/(G*var3):
```

Lösung:
Im MAPLE-Code wird die Verwölbung von Punkt B nach der Gleichung

$$u^B = \frac{M_T}{2GA_m}\int_0^{s_B}\frac{\mathrm{d}\bar{s}}{h} - \frac{2M_T a_m(s_B)}{GI_T} \tag{5.4}$$

berechnet.

Von nun an wird ein geschlitztes Profil mit denselben Abmessungen betrachtet.

5.5) Was ist die mechanische Bedeutung von `var9` im nachfolgenden MAPLE-Code?

```
[> var9:=1/3*(2*var2*h^3+3*a*(2*h)^3+9*a*(2*h)^3):
```

Lösung:
Im MAPLE-Code wird das Torsionsträgheitsmoment für ein geschlitztes Profil gemäß

$$I_T^{ges} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N} L_i h_i^3 \tag{5.5}$$

berechnet.