Modulteilprüfung

Technische Mechanik II

23. März 2012

08:30 – 10:00 Uhr

Name: ______________________________

Vorname: ______________________________

Matrikelnummer: ______________

Bitte beachten Sie:
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten. Bitte geben Sie auf dem Deckblatt sowohl Ihren Namen als auch Ihre Matrikelnummer an.

Beginnen Sie die Lösungen der Aufgaben 1 bis 4 jeweils auf einem neuen Blatt. Nummerieren Sie die Blätter und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie die Nummer der Aufgabe.

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in den Bearbeitungsbogen einzutragen. Schreiben Sie deshalb auf die entsprechenden Blätter Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.

Tackern Sie Ihre Zusatzblätter nach Aufgaben sortiert zusammen. Bitte markieren Sie deutlich die Endergebnisse.

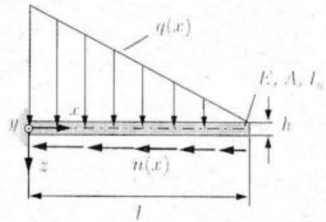
Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Mögliche Punkte	15	17	12	16	6	66
Erreichte Punkte						

Viel Erfolg!

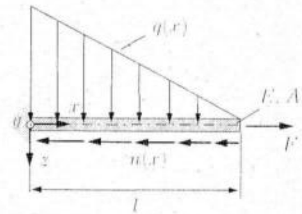
Aufgabe 1

(Insgesamt 15 Punkte)

Der in Abb. 1.1(a) dargestellte Balken ist durch die horizontale Streckenlast $n(x)$ und die vertikale Streckenlast $q(x)$ belastet. Der Balken hat die Länge l, die Querschnittsfläche A und das axiale Flächenträgheitsmoment I_y.
Die Streckenlasten $n(x) = n_0(x/l - 1)$ und $q(x) = q_0(1 - x/l)$, der E-Modul E, die Länge l, die Querschnittsfläche A, die Höhe der Querschnittsfläche h, das Flächenträgheitsmoment I_y sowie die Größen $q_0 > 0$ und $n_0 > 0$ seien gegeben. Die Querschnittsfläche sei symmetrisch zur y-Achse.



(a)



(b)

Abbildung 1.1: (a) Balken, belastet durch zwei Streckenlasten; (b) Balken, belastet durch zwei Steckenlasten und eine Einzelkraft F.

Verwenden Sie bei der Lösung ausschließlich das gegebene x-y-z-Koordinatensystem. Der Schub-Einfluss sei vernachlässigbar.

Betrachten Sie zunächst nur den Fall (a) aus Abb. 1.1.

1.1) Berechnen Sie die Schnittgrößen $N(x)$ und $M(x)$ durch Freischneiden. Zeichnen Sie alle benötigten Freikörperbilder.

1.2) Bestimmen Sie den Verlauf der Normalspannung $\sigma(x, z)$ entlang der Balkenachse infolge Zug/Druck und Biegung.

1.3) Geben Sie die Stelle (x- und z-Koordinate) und den Wert der betragsmäßig maximalen Normalspannung an.

1.4) Berechnen Sie die Verschiebung $u(x)$ in x-Richtung.

Betrachten Sie nun den Fall (b) aus Abb. 1.1.

1.5) Wie groß muss der Betrag der eingeführten Einzelkraft F sein, damit sich das Balkenende in x-Richtung nicht verschiebt?

Aufgabe 1 - Musterlösung

(Insgesamt 15 Punkte)

1.1) Berechnung der Schnittgrößen $N(x)$, $Q(x)$ und $M(x)$:

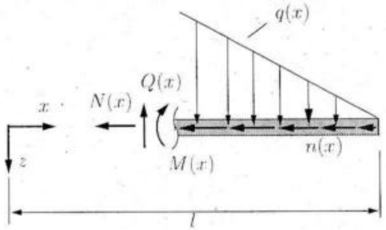


Abbildung 1.2: Freikörperbild.

Berechnung der Normalkraft:

$$-N(x) - \int_x^l n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow N(x) &= \int_x^l n_0\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\mathrm{d}\xi \\
&= n_0\left[\xi - \frac{\xi^2}{2l}\right]_x^l = -n_0\left(l - \frac{l}{2} - x + \frac{x^2}{2l}\right) \\
&= n_0\left(\frac{l}{2} - x + \frac{x^2}{2l}\right) \\
&= \frac{n_0}{2l}(x-l)^2 .
\end{aligned}$$

Berechnung des Schnittmoments:

$$-M(x) - \int_x^l q(\xi)(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow M(x) &= -\int_x^l q_0\left(1-\frac{\xi}{l}\right)(\xi - x)\,\mathrm{d}\xi \\
&= -\int_x^l q_0\left(\xi + \frac{\xi x}{l} - \frac{\xi^2}{l} - x\right)\mathrm{d}\xi \\
&= -q_0\left[\left(\frac{\xi^2}{2} + \frac{x\xi^2}{2l} - \frac{\xi^3}{3l} - x\xi\right)\right]_x^l \\
&= -q_0\left[\frac{l^2}{2} - \frac{xl}{2} - \frac{l^2}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l}\right] \\
&= -\frac{q_0}{6l}\left(l^3 - 3xl^2 + 3x^2 l - x^3\right) = -\frac{q_0}{6l}(l-x)^3 = \frac{q_0}{6l}(x-l)^3 .
\end{aligned}$$

1.2) Berechnung der Normalspannung σ:

$$\begin{aligned}
\sigma(x,z) &= \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{I_y} z \\
&= \frac{n_0}{2lA}(x-l)^2 + \frac{q_0}{6lI_y}(x-l)^3 z .
\end{aligned}$$

1.3) Die Normalkraft ist positiv und parabolisch mit dem Scheitelpunkt bei $x = l$. Betragsmäßig maximal im betrachteten Gebiet wird die Normalkraft bei $x = 0$.

Das Schnittmoment ist für $0 \leq x \leq l$ negativ und fallend. Also ist das Schnittmoment betragsmäßig maximal an der Stelle $x = 0$. Da $N(x=0) > 0$ eine Zugkraft ist, liegt die Stelle betragsmäßig maximaler Spannungen an dem Ort, wo die Zug-Biege-Spannung maximal wird, also bei $\{x = 0, z = -h/2\}$.

Berechnung des Betrags der maximalen Normalspannung:

$$\begin{aligned}
\left|\sigma_{xx}\left(x = 0, z = -\frac{h}{2}\right)\right| &= \left|\frac{n_0 l^2}{2lA} - \frac{q_0 h}{12lI_y}(-l)^3\right| \\
&= \frac{n_0 l}{2A} + \frac{q_0 h l^2}{12 I_y}
\end{aligned}$$

1.4) Berechnung der Verschiebung:

Verschiebung in x-Richtung

$$u'(x) = \frac{N(x)}{EA} = \frac{n_0}{2lEA}(x-l)^2 = \frac{n_0}{2lEA}\left(x^2 - 2lx + l^2\right) .$$

Integration und Bestimmung der Integrationskonstanten:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{n_0}{2lEA}\left(\frac{x^3}{3} - lx^2 + l^2 x\right) + c_1 , \\
u(0) &= 0 \rightarrow c_1 = 0.
\end{aligned}$$

1.5) Berechnung der Kraft F:
Neue Normalkraft $\tilde{N}(x) = N(x) + F$:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(x) &= \frac{\tilde{N}(x)}{EA}, \\
\tilde{u}'(x) &= u'(x) + u'_F(x), \\
\tilde{u}(x) &= u(x) + u_F(x).
\end{aligned}$$

Für die Verschiebung $u_F(x)$ durch die Einzelkraft folgt:

$$u_F(x) = \frac{F}{EA}x + c_1,$$
$$u_F(0) = 0 \rightarrow c_1 = 0.$$

Also folgt für die Gesamtverschiebung $\tilde{u}(x)$:

$$\tilde{u}(x) = u(x) + \frac{Fx}{EA},$$
$$\tilde{u}(l) = \frac{n_0 l^2}{6EA} + \frac{Fl}{EA} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\rightarrow F = -\frac{n_0 l}{6}.$$

3 TM II F_12

Aufgabe 2

(Insgesamt 17 Punkte)

Gegeben ist ein einseitig eingespannter, zusammengeklebter Rohrverbund aus zwei dickwandigen Rohren (siehe Abb. 2.1). Die Rohre bestehen aus dem gleichen elastischen Material und besitzen damit den gleichen Schubmodul G. Der Verbund wird durch zwei gegebene Einzeltorsionsmomente M_{T_1} und M_{T_2} belastet (siehe Abb. 2.1). Die geometrischen Abmessungen R, l_1 und l_2 seien auch gegeben.

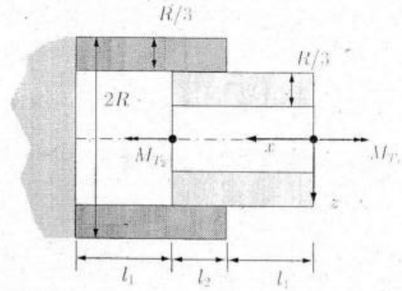


Abbildung 2.1: Ein zusammengeklebter Rohrverbund.

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das angegebene Koordinatensystem.

2.1) Geben Sie den Verlauf der Innen- und Außenradien des Rohrverbunds entlang der x-Achse explizit an und berechnen Sie die polaren Flächenträgheitsmomente des Rohrverbunds für alle Bereiche, $x \in [0, 2l_1 + l_2]$.

2.2) Berechnen Sie den Verlauf des inneren Torsionsmoments $M_T(x)$ (Schnittmoment). Zeichnen Sie die dafür notwendigen Freikörperbilder.

2.3) Geben Sie die Schubspannungen $\tau(r)$ für jeden Bereich $x \in [0, 2l_1 + l_2]$ an. Berechnen Sie zusätzlich die Schubspannungen für jeden Punkt der Außenkontur des Rohrverbunds.

2.4) Geben Sie die Komplementärenergie W^*_{i} des Rohrverbunds an. Berechnen Sie mit dem ersten Satz von Castigliano die Verdrehung bei $x = 0$. Beachten Sie dabei besonderes die Richtung der Verdrehungen.

Aufgabe 2 - Musterlösung

(Insgesamt 17 Punkte)

2.1) Das polare Flächenträgkeitsmoment:

Außenradius:

$$r_a = \begin{cases} \frac{2}{3}R, & 0 \le x < l_1 \\ R, & l_1 \le x < l_1 + l_2 \\ R, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{cases}$$

Innenradius:

$$r_i = \begin{cases} \frac{1}{3}R, & 0 \le x < l_1 \\ \frac{1}{3}R, & l_1 \le x < l_1 + l_2 \\ \frac{2}{3}R, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{cases}$$

Das polare Flächenträgkeitsmoment ist: $I_P = \frac{\pi}{2}\left(r_a^4 - r_i^4\right)$

$$I_P = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\left(\frac{16}{81}R^4 - \frac{1}{81}R^4\right) = \frac{5}{54}\pi R^4, & 0 \le x < l_1 \\ \frac{\pi}{2}\left(R^4 - \frac{1}{81}R^4\right) = \frac{40}{81}\pi R^4, & l_1 \le x < l_1 + l_2 \\ \frac{\pi}{2}\left(R^4 - \frac{16}{81}R^4\right) = \frac{65}{162}\pi R^4, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{cases}$$

2.2) Das innere Torsionsmoment:

Abbildung 2.2: Freikörperbild für M_{T_1}.

$$\begin{aligned} M_T^I &= M_{T_1}, & 0 \le x < l_1 + l_2 \\ M_T^{II} &= M_{T_1} - M_{T_2}, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{aligned}$$

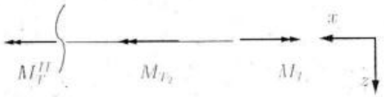


Abbildung 2.3: Freikörperbild für M_{T_2}.

2.3) Spannungsverlauf:

$$\tau(r) = \begin{cases} \frac{M_T^I}{I_{P_1}} r = \frac{54 M_{T_1}}{5\pi R^4} r, & 0 \le x < l_1 \\ \frac{M_T^I}{I_{P_2}} r = \frac{81 M_{T_1}}{40\pi R^4} r, & l_1 \le x < l_1 + l_2 \\ \frac{M_T^{II}}{I_{P_3}} r = \frac{162(M_{T_1} - M_{T_2})}{65\pi R^4} r, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{cases}$$

$$\tau(r_a) = \begin{cases} \frac{36 M_{T_1}}{5\pi R^3}, & 0 \le x < l_1 \\ \frac{81 M_{T_1}}{40\pi R^3}, & l_1 \le x < l_1 + l_2 \\ \frac{162(M_{T_1} - M_{T_2})}{65\pi R^3}, & l_1 + l_2 \le x \le 2l_1 + l_2. \end{cases}$$

2.4) Komplementärenergie:

$$\begin{aligned} W_{ges}^* &= \frac{1}{2}\int_0^{l_1} \frac{M_T^{I\,2}}{G I_{P_1}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{l_1}^{l_1+l_2} \frac{M_T^{I\,2}}{G I_{P_2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{l_1+l_2}^{2l_1+l_2} \frac{M_T^{II\,2}}{G I_{P_3}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{27 M_{T_1}^2 l_1}{5G\pi R^4} + \frac{81 M_{T_1}^2 l_2}{80G\pi R^4} + \frac{81(M_{T_1} - M_{T_2})^2 l_1}{65G\pi R^4}. \end{aligned}$$

Verwendung des ersten Satzes von Castigliano:

$$\begin{aligned} \vartheta(x=0) &= -\frac{\partial W_{ges}^*}{\partial M_{T_1}} = -\left(\frac{54 M_{T_1} l_1}{5G\pi R^4} + \frac{81 M_{T_1} l_2}{40G\pi R^4} + \frac{162(M_{T_1} - M_{T_2}) l_1}{65G\pi R^4}\right) \\ &= -\frac{864 M_{T_1} l_1}{65G\pi R^4} - \frac{81 M_{T_1} l_2}{40G\pi R^4} + \frac{162 M_{T_2} l_1}{65G\pi R^4}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(Insgesamt 12 Punkte)

Gegeben sei ein Prisma mit dreieckiger Grundfläche in der x-y-Ebene (siehe Abb. 3.1). Sowohl für Fall (a) als auch Fall (b) hängt das Verschiebungsfeld ausschließlich von x und y ab. Die Abmessung des Prismas in z-Richtung ist für diese Aufgabe irrelevant. Das Materialverhalten des Prismas sei isotrop, linear elastisch mit dem Elastizitätsmodul E und der Querkontraktionszahl ν. Das Prisma wird zwei verschiedenen Deformationen unterworfen (siehe Abb. 3.1(a) und (b)).

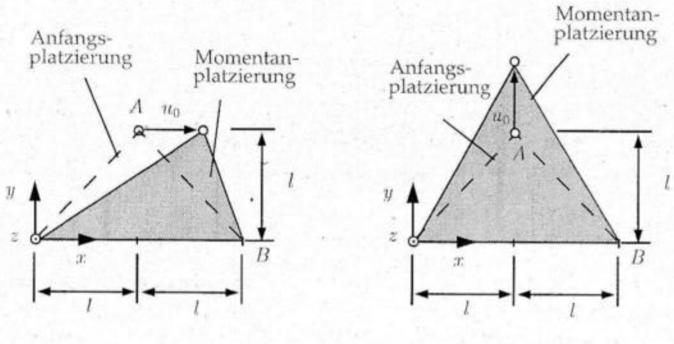


Abbildung 3.1: Ein elastisches Prisma mit dreieckiger Grundfläche in unverformter und verformter Lage für zwei unterschiedliche Deformationen.

Verwenden Sie bei der Lösung der Aufgabe ausschließlich das vorgegebene Koordinatensystem.

3.1) Das Verschiebungsfeld besitzt für den Fall (a) die Form $\boldsymbol{u} = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y)\boldsymbol{e}_x$ und für den Fall (b) die Form $\boldsymbol{u} = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y)\boldsymbol{e}_y$. Bestimmen Sie jeweils für die Fälle (a) und (b) unter Verwendung der in Abb. 3.1 skizzierten Eckverschiebungen die unbekannten Parameter α_0, α_1, α_2 der Verschiebungsfunktionen. Geben Sie die damit bestimmten Verschiebungsfelder für die Fälle (a) und (b) an.

3.2) Bestimmen Sie für die Fälle (a) und (b) die Verzerrungsmatrix und die Spannungsmatrix unter Verwendung des isotropen Hooke'schen Gesetzes.

3.3) Berechnen Sie den Spannungsvektor $\boldsymbol{t}$ auf dem Rand $\overline{AB}$ des Prismas für den Fall (a). Nehmen Sie an, dass die Deformation klein ist ($u_0/l \ll 1$). Damit sind die Normalenvektoren auf den Rändern in der Momentanplatzierung und der Anfangsplatzierung identisch.

Aufgabe 3 - Lösung

(Insgesamt 12 Punkte)

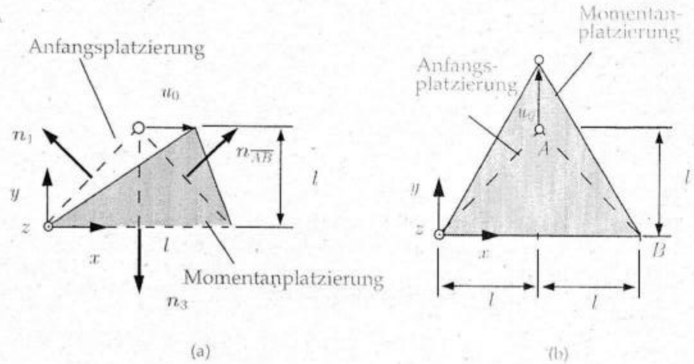


Abbildung 3.2: (a) Ein dreieckiges Prisma mit Verschiebung u_0 in Fall (a) und Fall (b).

3.1) Berechnung der Verschiebung $\boldsymbol{u}$:

Wie in Abb. 3.2(a) gezeigt:

$$\boldsymbol{u} = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y)\boldsymbol{e}_x = u_x \boldsymbol{e}_x.$$

Randbedingungen:

$$u_x(0,0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$
$$u_x(2l,0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 + 2l\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$u_x(l,l) = u_0 \Rightarrow \alpha_0 + \alpha_1 l + \alpha_2 l = u_0 \Rightarrow \alpha_2 = u_0/l$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \frac{u_0}{l} y \boldsymbol{e}_x.$$

Wie in Abb. 3.2(b) gezeigt:

$$\boldsymbol{u} = (\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y)\boldsymbol{e}_y = u_y \boldsymbol{e}_y.$$

Randbedingungen:

$$u_y(0,0) = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$$
$$u_y(2l,0) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$
$$u_y(l,l) = u_0 \Rightarrow \alpha_2 = u_0/l$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{u} = \frac{u_0}{l} y \boldsymbol{e}_y.$$

3.2) Berechnung des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ und des Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$:

Die allgemeine Definition des Verzerrungstensors:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Das allgemeine isotrope Hooke'sche Gesetz:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu}\left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu}\mathrm{sp}(\boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{I}\right).$$

Der Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ für Abb. 3.2(a):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{u_0}{2l}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spannungsmatrix $\boldsymbol{\sigma}$ für Abb. 3.2(a):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{Eu_0}{2(1+\nu)l}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Verzerrungsmatrix $\boldsymbol{\varepsilon}$ für Abb. 3.2(b):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_0/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Spannungsmatrix $\boldsymbol{\sigma}$ für Abb. 3.2(b):

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{Eu_0}{(1+\nu)(1-2\nu)l}\begin{pmatrix} \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

3.3) Berechnung des Spannungsvektors $\boldsymbol{t}$:

In Abb. 3.2(a):

$$\boldsymbol{n}_{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y).$$

Es gilt

$$\boldsymbol{t}_{\overline{AB}} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n}_{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}Eu_0}{4(1+\nu)l}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

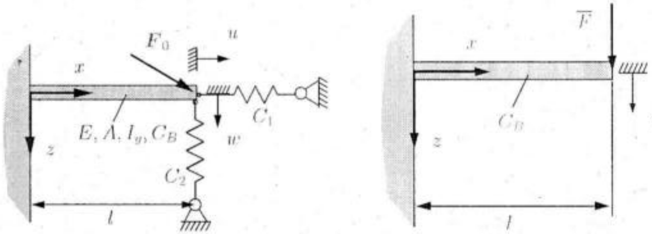
Aufgabe 4

(Insgesamt 16 Punkte)

Gegeben sei der in Abb. 4.1(a) dargestellte Balken, der durch Federn mit den Steifigkeiten C_1 und C_2 an seinem rechten Ende mit der Umgebung verbunden ist. Das System wird durch die konstante Kraft

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{pmatrix} F_{0x} \\ 0 \\ F_{0z} \end{pmatrix}$$

belastet, vgl. Abb. 4.1(a). Gegeben seien C_1, C_2, die Querschnittsfläche A, der E-Modul E, das Flächenträgheitsmoment I_y sowie die Steifigkeit C_B des Balkens bzgl. Biegung <u>ohne Federn</u>. C_B gibt also die Steifigkeit des freien, fest eingespannten Balkens bzgl. einer am rechten Ende des Balkens wirkenden Kraft $\overline{F}$ in z-Richtung an (s. Abb. 4.1(b)). Die Verschiebung des Balkenendes in horizontaler Richtung wird mit u und die vertikale Durchbiegung am Balkenende mit w bezeichnet. Gehen Sie von kleinen Durchbiegungen w und kleinen Verschiebungen u aus.



(a) (b)

Abbildung 4.1: (a) Elastisches Balkentragwerk; (b) Zur Erläuterung der Steifigkeit $C_B = \overline{F}/\overline{w}$.

4.1) Geben Sie die in den Federn C_1 und C_2 jeweils gespeicherte Formänderungsenergie als Funktion der Verschiebungen u und w am Balkenende an.

4.2) Geben Sie die Federsteifigkeit C_N des Balkens bzgl. Zug an. Berechnen Sie mit C_B und C_N die im Balken gespeicherte Formänderungsenergie als Funktion der Verschiebungen u und w am Balkenende.

4.3) Geben Sie das Potential $U(u, w)$ der eingeprägten Kraft F_0 an.

4.4) Geben Sie das Gesamtpotential des Systems als Funktion der Verschiebungen u und w am Balkenende an. Bestimmen Sie die Verschiebungen u und w durch Variation derart, dass sich das System im statischen Gleichgewicht befindet.

Aufgabe 4 - Musterlösung

(Insgesamt 16 Punkte)

4.1) Die gespeicherten Energien $W_1(u)$ und $W_2(w)$ sind:

$$W_1(u) = \frac{1}{2}C_1 u^2 \tag{4.1}$$

$$W_2(u) = \frac{1}{2}C_2 w^2 \tag{4.2}$$

4.2) Die Dehnsteifigkeit ist:

$$C_N = \frac{EA}{l}.$$

Die Formänderungsenergie $W(u, w)$ des Balkens ist damit:

$$W(u, w) = \frac{1}{2}C_N u^2 + \frac{1}{2}C_B w^2.$$

4.3) Das Potential $U(u, w)$ der eingeprägten Kräfte ist:

$$U(u, w) = -\boldsymbol{F}_0 \cdot \boldsymbol{u} = -\begin{pmatrix} F_{0x} \\ 0 \\ F_{0z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = -F_{0x}u - F_{0z}w.$$

4.4) Das Gesamtpotential $\Pi_{ges}(u, w)$ des Systems ist:

$$\begin{aligned}\Pi_{ges}(u, w) &= W_1(u) + W_2(w) + W_B(u, w) + U(u, w) \\ &= \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{EA}{l}\right)u^2 + \frac{1}{2}(C_B + C_2)w^2 - F_{0x}u - F_{0z}w.\end{aligned}$$

Für die Variation des Gesamtpotentials bezüglich u und w gilt im Gleichgewicht

$$\delta\Pi_{ges}(u, w) = \frac{\partial \Pi_{ges}(u, w)}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \Pi_{ges}(u, w)}{\partial w}\delta w \stackrel{!}{=} 0$$

$$\xrightarrow{\delta u \neq 0} u = \frac{F_{0x}}{C_1 + \frac{EA}{l}}$$

$$\xrightarrow{\delta w \neq 0} w = \frac{F_{0z}}{C_2 + C_B}$$

Aufgabe 5

(Insgesamt 6 Punkte)

Gegeben sei der in Abb. 5.1 gezeigte, durch die Einzelkraft F_0 und das Einzelmoment M_0 belastete Balken. Die Größen E, I_y, l, F_0 und M_0 seien im MAPLE-Code als Variablen `E`, `Iy`, `L`, `F0` und `M0` definiert. Eine Funktion `w(x)` sei im MAPLE-Code definiert und somit als gegeben anzusehen.

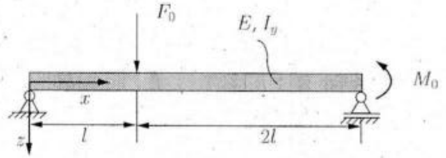


Abbildung 5.1: Balken, belastet durch eine vertikale Kraft F_0 und Einzelmoment M_0.

5.1) Welche mechanische Interpretation besitzt die im nachfolgenden MAPLE-Code berechnete Größe `groesse1` ? Achten Sie auf eine präzise Antwort.

```
[> groesse1 := 1/2*int(E*Iy*diff(w(x),x$2)^2,x=0..3*L);
```

Lösung:

`groesse1` stellt die elastische Formänderungsenergie des Balkens dar.

5.2) Geben Sie das Gesamtpotential für das System an.

Lösung:

$$\Pi[w(x)] = W_{ges}[w(x)] + U_{ges}[w(x)] = \frac{1}{2}\int_0^{3l} EI_y w''^2(x)\,\mathrm{d}x - F_0 w(l) - M_0 w'(3l).$$

8 TM II F_12

5.3) Geben Sie eine nicht konstante Ansatzfunktion für die Verschiebung $w(x)$ an, die für das Ritz-Verfahren verwendet werden könnte.

Lösung:

Die von der Ansatzfunktion zu erfüllenden geometrischen Randbedingungen lauten: $w(0) = w(3l) = 0$. Beispiele sind

$$w(x) = x^m(x - 3l)^n \qquad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

5.4) Im nachfolgenden MAPLE-Code seien mit `w_1(x)` bis `w_4(x)` Ansatzfunktionen für das Ritz-Verfahren zur Berechnung der Verschiebungen definiert. Welches mechanische Prinzip (<u>kein</u> Näherungsverfahren) wird im nachfolgenden MAPLE-Code zur Berechnung der Größen `a_1, a_2, a_3, a_4` konkret angewandt? Achten Sie auf eine präzise Antwort.

```
[> fkt1 := unapply(a_1*w_1(x) + a_2*w_2(x) + a_3*w_3(x)
            + a_4*w_4(x),x):
[> abl1 := unapply(diff(fkt1(x),x),x):
[> fkt2 := unapply(1/2*int(E*Iy*diff(fkt1(x),x$2)^2,x=0..3*L)
            - F0*fkt1(L) - M0*abl1(3*L),a_1,a_2,a_3,a_4):
[> gl1 := diff(fkt2(a_1,a_2,a_3,a_4),a_1) = 0:
[> gl2 := diff(fkt2(a_1,a_2,a_3,a_4),a_2) = 0:
[> gl3 := diff(fkt2(a_1,a_2,a_3,a_4),a_3) = 0:
[> gl4 := diff(fkt2(a_1,a_2,a_3,a_4),a_4) = 0:
[> menge1 := {gl1,gl2,gl3,gl4}:
[> menge2 := {a_1,a_2,a_3,a_4}:
[> solve(menge1,menge2): assign(%):
```

Lösung:

Das Prinzip vom stationären Wert der potentiellen Energie.

5.5) Welche mechanische Interpretation besitzt die im nachfolgenden MAPLE-Code berechnete Funktion `fkt4`? Achten Sie auf eine präzise Antwort. Beachten Sie dazu auch den MAPLE-Code aus 5.4.

```
[> gl5 := A_V+B_V-F0 = 0:
[> gl6 := -L*F0+ 3*L*B_V+ M0 = 0:
[> solve({gl5,gl6},{A_V,B_V}): assign(%):
[> M1y := unapply(A_V*x,x):
[> M2y := unapply(M0 + (3*L-x)*B_V,x);
[> gl7 := diff(w1(x),x$2) + M1y(x)/(E*Iy) = 0:
[> gl8 := diff(w2(x),x$2) + M2y(x)/(E*Iy) = 0:
[> menge3 := w1(0)=0,w1(L)=w2(L),D(w1)(L)=D(w2)(L),w2(3*L)=0:
[> dsolve({gl7,gl8,menge3},{w1(x),w2(x)}): assign(%):
[> fkt3 := piecewise(x<L,w1(x),w2(x)):
[> fkt4 := unapply(abs(fkt1(x) - fkt3(x)),x):
```

Lösung:

Die Funktion `fkt4` beschreibt den Betrag der Differenz der exakten Lösung und der Näherungslösung des gegebenen Systems.