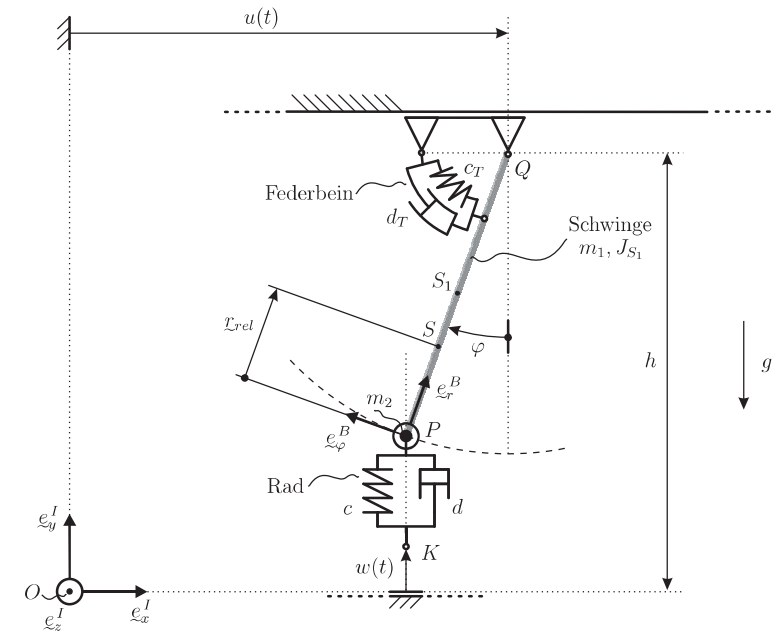


Am Starrkörper ist im Punkt P eine Düse angebracht, die um 360° geschwenkt werden kann. Die Verdrehung der Düse wird durch den Relativwinkel δ beschrieben. Der Massenstrom $\dot{m} = -\mu$ am Düsenaustritt Q ist konstant. Der Betrag der Relativgeschwindigkeit am Düsenaustritt Q beträgt v_0 . Die Masse des Starrkörpers kann als konstant angenommen werden.

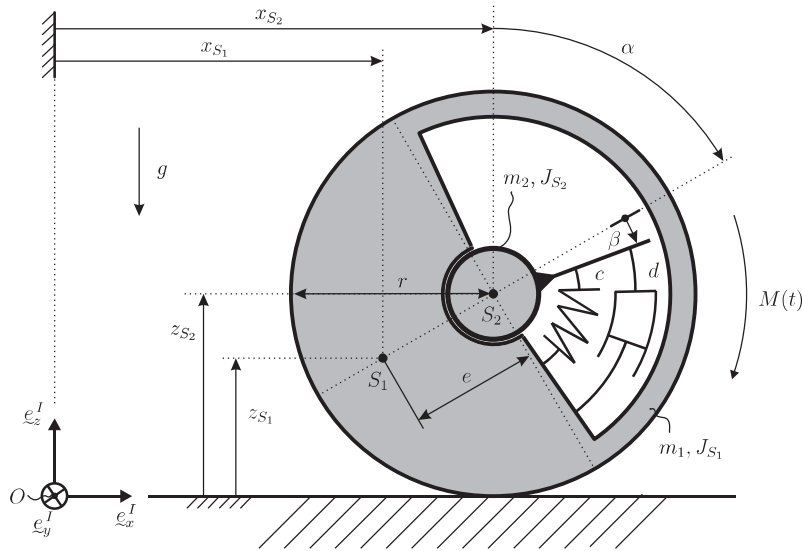
Aufgabe 2



Im Punkt P ist ein Rad mit Masse $m_2 = 2m$ montiert. Die Drehträgheit des Rads wird vernachlässigt. Die elastischen und dämpfenden Eigenschaften des Reifens werden durch eine Feder mit Steifigkeit c und einen viskosen Dämpfer mit Dämpfung d abgebildet. Diese Feder-Dämpfer-Einheit wirkt stets in $\underline{e}_\varphi$ -Richtung. Die Verschiebung des Fußpunkts K der Feder-Dämpfer-Einheit wird durch $w(t)$ vorgegeben. Die Feder ist für $\varphi = 0$ und $w = 0$ entspannt.

Das $\{\underline{e}_x^I, \underline{e}_y^I, \underline{e}_z^I\}$ -Bezugssystem ist raumfest. Im Punkt P befindet sich der Ursprung des körperfesten $\{\underline{e}_r^B, \underline{e}_\varphi^B, \underline{e}_z^B\}$ -Bezugssystems. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative $\underline{e}_y^I$ -Richtung. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Aufgabe 3

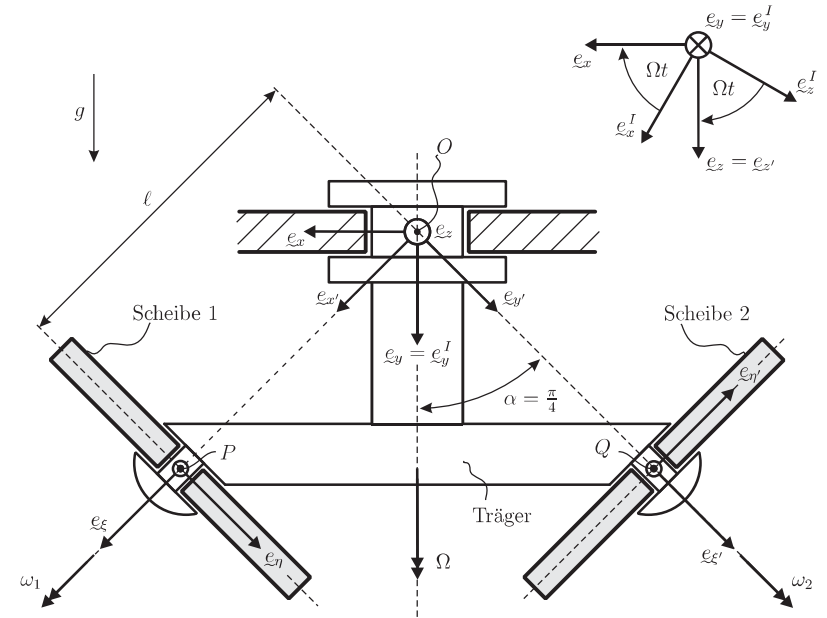


Betrachtet wird der oben dargestellte Zweimassenschwinger, bestehend aus einer Walze mit Radius r , Masse m_1 sowie Massenträgheitsmoment J_{S_1} bzgl. Schwerpunkt S_1 und einer Welle mit Masse m_2 sowie Massenträgheitsmoment J_{S_2} bzgl. Schwerpunkt S_2 . Die Walze rollt auf einer horizontalen Unterlage und wird durch das Moment $M(t)$ angetrieben. Die Verdrehung der Walze wird durch den Winkel α beschrieben. Die Koordinaten x_{S_1} und z_{S_1} geben die Lage des Schwerpunkts S_1 an. Die Koordinaten x_{S_2} und z_{S_2} beschreiben die Lage des Schwerpunkts S_2 . Für $\alpha = 0$ gilt $x_{S_1} = 0$ und $x_{S_2} = 0$.

Die Welle ist innerhalb der Walze drehbar gelagert. Die Verdrehung der Welle relativ zur Walze wird durch den Winkel β beschrieben. Die Welle wird über eine Drehfeder mit Steifigkeit c und einen viskosen Drehdämpfer mit Dämpfung d mit der Walze gekoppelt. Die Drehfeder ist für $\beta = 0$ entspannt.

Das $\{\underline{e}_x^I, \underline{e}_y^I, \underline{e}_z^I\}$ -Bezugssystem ist raumfest. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative $\underline{e}_z^I$ -Richtung.

Aufgabe 4



Ein masseloser Träger rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω um die raumfeste $\underline{e}_y^I$ -Achse.

In den Punkten P und Q sind zwei identische dünne Kreisscheiben mit dem Radius r und der Masse $m_1 = m_2 = m$ montiert. Der Schwerpunkt der Scheibe 1 fällt mit Punkt P zusammen, der Schwerpunkt der Scheibe 2 mit Punkt Q . Bezüglich des trägerfesten Bezugssystems $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ rotiert Scheibe 1 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_1 , Scheibe 2 mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_2 .

Das Bezugssystem $\{\underline{e}_x^I, \underline{e}_y^I, \underline{e}_z^I\}$ bezüglich O ist raumfest. Die Bezugssysteme $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ und $\{\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'}\}$ bezüglich Punkt O sind trägerfest. Das Bezugssystem $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ der Scheibe 1 sowie das Bezugssystem $\{\underline{e}_{\xi'}, \underline{e}_{\eta'}, \underline{e}_{\zeta'}\}$ der Scheibe 2 sind ebenfalls trägerfest und Hauptachsensysteme der jeweiligen Kreisscheibe. Die Erdbeschleunigung g wirkt in positive $\underline{e}_y^I$ -Richtung. Außerdem werden Reibungseinflüsse vernachlässigt.

Die Trägheitsmatrizen der beiden Kreisscheiben bezüglich ihrer Schwerpunkte sind in den jeweiligen Hauptachsensystemen durch

$$\Phi_{S_1}^{(P)} = \frac{mr^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} \quad \Phi_{S_2}^{(Q)} = \frac{mr^2}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{\{\xi', \eta', \zeta'\}}$$

gegeben.

Bearbeitungsbögen für die Prüfung im Fach

Technische Mechanik III/IV

28. September 2020

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Platz nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

Die Bearbeitungsbögen sind von **1** bis **9** durchnummeriert. Prüfen Sie bitte auf Vollständigkeit!

Punkte:

Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

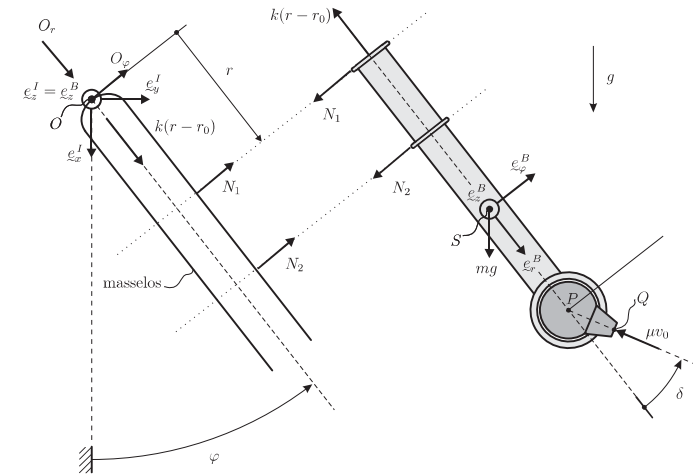
Aufgabe 4:

Name: Matrikelnummer:

1

Aufgabe 1

- 1.1 Schneiden Sie die Führung und den Starrkörper im Sinne Newtons einzeln frei. Tragen Sie sämtliche eingepägten Kräfte sowie Zwangskräfte und die Schubkraft der Düse ein.



- 1.2 Geben Sie die Resultierende $\underline{F}_1$ aller auf die Führung wirkenden Kräfte sowie das resultierende Moment $\underline{M}_1^{(O)}$ bezüglich Punkt O vektoriell an. Stellen Sie die Impulsbilanzen und die Drehimpulsbilanz für die Führung auf. Drücken Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit der $\underline{e}_r^B, \underline{e}_\varphi^B, \underline{e}_z^B$ -Einheitsvektoren aus.

$$\tilde{F}_1 = (k(r - r_0) + O_r) \underline{e}_r^B + (O_\varphi + N_1 + N_2) \underline{e}_\varphi^B$$

$$\underline{M}_1^{(O)} = \left(rN_1 + \left(r + \frac{a}{2} \right) \right) \underline{e}_z^B$$

Impulsbilanz : $\underline{\underline{F_1}} = \underline{\underline{0}}$

Drehimpulsbilanz : $\underline{\underline{M}}_1^{(O)} = \underline{0}$

$$e_r^B: \quad k(r-r_0) + O_r = 0 \quad (1)$$

$$\mathcal{E}_\varphi^B: \quad O_\varphi + N_1 + N_2 = 0 \quad (2)$$

$$\mathcal{E}_z^B: \quad rN_1 + \left(r + \frac{a}{2}\right)N_2 = 0 \quad (3)$$

Name: Matrikelnummer:

2

- 1.3 Geben Sie den Ortsvektor $\underline{r}_{OS}$ von Punkt O zu Schwerpunkt S sowie die Beschleunigung $\underline{a}_S$ von Punkt S an. Geben Sie die Resultierende $\underline{F}_2$ aller auf den Starrkörper wirkenden Kräfte sowie das resultierende Moment $\underline{M}_2^{(S)}$ bezüglich Punkt S vektoriell an. Stellen Sie die Impulsbilanzen und die Drehimpulsbilanz für den Starrkörper auf. Drücken Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit der $\underline{e}_r^B, \underline{e}_\varphi^B, \underline{e}_z^B$ -Einheitsvektoren aus.

$$\begin{aligned}\underline{r}_{OS} &= (r+a)\underline{e}_r^B \\ \ddot{\underline{r}}_{OS} &= \underline{a}_S = (\ddot{r} - (r+a)\dot{\varphi}^2)\underline{e}_r^B + ((r+a)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\underline{e}_\varphi^B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{F}_2 &= (-k(r-r_0) + mg \cos \varphi - \mu v_0 \cos \delta)\underline{e}_r^B \\ &\quad + (-N_1 - N_2 - mg \sin \varphi - \mu v_0 \sin \delta)\underline{e}_\varphi^B\end{aligned}$$

$$\underline{M}_2^{(S)} = \left(aN_1 + \frac{a}{2}N_2 - b\mu v_0 \sin \delta\right)\underline{e}_z^B$$

$$\begin{aligned}\text{Impulsbilanz :} \quad \underline{F}_2 &= m\underline{a}_S \\ \text{Drehimpulsbilanz :} \quad \underline{M}_2^{(S)} &= J_S \ddot{\varphi} \underline{e}_z^B\end{aligned}$$

$$\underline{e}_r^B : -k(r-r_0) + mg \cos \varphi - \mu v_0 \cos \delta = m(\ddot{r} - (r+a)\dot{\varphi}^2) \quad (4)$$

$$\underline{e}_\varphi^B : -N_1 - N_2 - mg \sin \varphi - \mu v_0 \sin \delta = m((r+a)\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) \quad (5)$$

$$\underline{e}_z^B : aN_1 + \frac{a}{2}N_2 - b\mu v_0 \sin \delta = J_S \ddot{\varphi} \quad (6)$$

- 1.4 Bestimmen Sie eine der Bewegungsgleichungen des Systems.
(Hinweis: Wählen Sie diejenige, bei der keine Zwangskräfte oder Zwangsmomente eliminiert werden müssen.)

$$\text{aus Gl. (4): } m(\ddot{r} - (r+a)\dot{\varphi}^2) + k(r-r_0) - mg \cos \varphi = -\mu v_0 \cos \delta$$

Im Folgenden wird der Starrkörper in der Führung arretiert und die Verdrehung der Düse in Abhängigkeit des Winkels φ vorgegeben, sodass $r(t) \equiv r_0$ und $\delta = \delta(\varphi) = \varphi$ gilt.

- 1.5 Geben Sie den differentiellen Verschiebungsvektor $d\underline{r}_Q$ des Punkts Q an.

$$\underline{r}_{OQ} = (r+a+b + \underbrace{c \cos \varphi}_{=\cos \delta})\underline{e}_r^B + (\underbrace{c \sin \varphi}_{=\sin \delta})\underline{e}_\varphi^B$$

$$\frac{\partial \underline{e}_r^B}{\partial \varphi} = \underline{e}_\varphi^B \quad \frac{\partial \underline{e}_\varphi^B}{\partial \varphi} = -\underline{e}_r^B$$

$$d\underline{r}_Q = \frac{\partial \underline{r}_{OQ}}{\partial \varphi} d\varphi = (-2c \sin \varphi) d\varphi \underline{e}_r^B + (r+a+b+2c \cos \varphi) d\varphi \underline{e}_\varphi^B$$

Name: Matrikelnummer:

3

- 1.6 Das Pendel wird bei $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ aus der Ruhe in Bewegung gesetzt. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Pendels bei $\varphi_1 = 0$.

$$T_0 = 0 \quad T_1 = \frac{1}{2}(J_S + m(r_0+a)^2)\dot{\varphi}_1^2$$

$$W = \int_{\varphi_0=\frac{\pi}{2}}^{\varphi_1=0} \left(m g \underline{e}_\varphi^I \right) \cdot d\underline{r}_S - \mu v_0 \left(\cos \varphi \underline{e}_r^B + \sin \varphi \underline{e}_\varphi^B \right) \cdot d\underline{r}_Q$$

$$\underline{e}_x^I = \cos \varphi \underline{e}_r^B - \sin \varphi \underline{e}_\varphi^B \quad d\underline{r}_S = (r_0+a) d\varphi \underline{e}_\varphi^B$$

$$W = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-mg(r_0+a) \sin \varphi - \mu v_0 \sin \varphi (r_0+a+b)) d\varphi$$

$$W = mg(r_0+a) + \mu v_0(r_0+a+b)$$

$$\begin{aligned}W = T_1 - T_0 &\Rightarrow mg(r_0+a) + \mu v_0(r_0+a+b) = \frac{1}{2}(J_S + m(r_0+a)^2)\dot{\varphi}_1^2 \\ &\Rightarrow \dot{\varphi}_1 = -\sqrt{2 \frac{mg(r_0+a) + \mu v_0(r_0+a+b)}{J_S + m(r_0+a)^2}}\end{aligned}$$

Aufgabe 3

- 3.1 Geben Sie x_{S1} , z_{S1} , x_{S2} und z_{S2} in Abhängigkeit des Winkels α sowie der Systemparameter an.

$$\begin{aligned}x_{S2} &= r\alpha \\z_{S2} &= r \\x_{S1} &= x_{S2} - e \sin \alpha = r\alpha - e \sin \alpha \\z_{S1} &= z_{S2} - e \cos \alpha = r - e \cos \alpha\end{aligned}$$

- 3.2 Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Systems in Abhängigkeit von α , β , $\dot{\alpha}$ und $\dot{\beta}$.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_{S1}^2 + \dot{z}_{S1}^2) + \frac{1}{2}J_{S1}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_{S2}^2 + \dot{z}_{S2}^2) + \frac{1}{2}J_{S2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 \\ \dot{x}_{S1} &= r\dot{\alpha} - e\dot{\alpha}\cos\alpha \\ \dot{z}_{S1} &= e\dot{\alpha}\sin\alpha \\ \dot{x}_{S2} &= r\dot{\alpha} \\ \dot{z}_{S2} &= 0\end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2}J_{S1}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_{S2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 + \frac{1}{2}m_1((r^2 + e^2)\dot{\alpha}^2 - 2re\dot{\alpha}^2\cos\alpha) + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\alpha}^2$$

- 3.3 Bestimmen Sie die potentielle Energie V des Systems in Abhängigkeit von α und β .

$$V = -m_1ge\cos\alpha + \frac{1}{2}c\beta^2 \quad (\text{Nullniveau auf Höhe von } S_2)$$

- 3.4 Leiten Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung des Systems für $q_i = \alpha$ her.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_\alpha$$

$$\begin{aligned}L &= T - V \\ &= \frac{1}{2}J_{S1}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_{S2}(\dot{\alpha} + \dot{\beta})^2 + \frac{1}{2}m_1((r^2 + e^2)\dot{\alpha}^2 - 2re\dot{\alpha}^2\cos\alpha) + \frac{1}{2}m_2r^2\dot{\alpha}^2 \\ &\quad + m_1ge\cos\alpha - \frac{1}{2}c\beta^2\end{aligned}$$

$$Q_\alpha = M(t)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} &= J_{S1}\ddot{\alpha} + J_{S2}(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + m_1\ddot{\alpha}(r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha) + m_1\dot{\alpha}^2(2re\sin\alpha) \\ &\quad + m_2r^2\ddot{\alpha}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = m_1re\dot{\alpha}^2\sin\alpha - m_1ge\sin\alpha$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow J_{S1}\ddot{\alpha} + J_{S2}(\ddot{\alpha} + \ddot{\beta}) + m_1\ddot{\alpha}(r^2 + e^2 - 2re\cos\alpha) + m_2r^2\ddot{\alpha} \\ + m_1re\dot{\alpha}^2\sin\alpha + m_1ge\sin\alpha = M(t)\end{aligned}$$

Im Folgenden wird die Lage der Walze durch $\alpha(t) \equiv 0$ vorgegeben. Für die Welle ergibt sich damit folgende Bewegungsgleichung

$$J_{S2}\ddot{\beta} + d\dot{\beta} + c\beta = 0.$$

- 3.5 Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Schwingungsdifferentialgleichung für die Anfangsbedingungen $\beta(t=0) = 0$ und $\dot{\beta}(t=0) = \Omega$.

$$\delta = \frac{d}{2J_{S2}}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{J_{S2}}, \quad \omega_d^2 = \omega_0^2 - \delta^2$$

$$\beta(t) = e^{-\delta t}(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t))$$

$$\beta(t=0) = 0 : \quad A = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(t) = Be^{-\delta t}\sin(\omega_d t)$$

$$\dot{\beta}(t) = -B\delta e^{-\delta t}\sin(\omega_d t) + Be^{-\delta t}\omega_d\cos(\omega_d t)$$

$$\dot{\beta}(t=0) = \Omega : \quad B\omega_d = \Omega \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\Omega}{\omega_d}$$

$$\beta(t) = \frac{\Omega}{\omega_d}e^{-\delta t}\sin(\omega_d t)$$

Aufgabe 4

- 4.1 Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\dot{\omega}^{Tr}$ des Trägers, die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\dot{\omega}^{S1}$ von Scheibe 1 und die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\dot{\omega}^{S2}$ von Scheibe 2 im $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Bezugssystem.

$${}^I\dot{\omega}^{Tr} = \Omega \underline{e}_y \quad \alpha = \frac{\pi}{4} : \quad \sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} {}^I\dot{\omega}^{S1} &= \Omega \underline{e}_y + \omega_1 \underline{e}_\zeta = \Omega \underline{e}_y + \omega_1 \underline{e}_{x'} = \Omega \underline{e}_y + \omega_1 (\cos \alpha \underline{e}_x + \sin \alpha \underline{e}_y) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1 \underline{e}_x + \left(\Omega + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_1 \right) \underline{e}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^I\dot{\omega}^{S2} &= \Omega \underline{e}_y + \omega_2 \underline{e}_{y'} = \Omega \underline{e}_y + \omega_2 (-\sin \alpha \underline{e}_x + \cos \alpha \underline{e}_y) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2 \underline{e}_x + \left(\Omega + \frac{\sqrt{2}}{2} \omega_2 \right) \underline{e}_y \end{aligned}$$

- 4.2 Geben Sie die Trägheitsmatrix $\Phi_{S1}^{(O)}$ von Scheibe 1 bzgl. des Punkts O sowie die Trägheitsmatrix $\Phi_{S2}^{(O)}$ von Scheibe 2 bzgl. des Punkts O im $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Bezugssystem in Abhängigkeit der Systemparameter an.

$$\Phi_{S1}^{(O)} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 \end{bmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} = \begin{bmatrix} J_x^{S1} & J_{xy}^{S1} & 0 \\ J_{yx}^{S1} & J_y^{S1} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{S1} \end{bmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

Scheibe 1: Rotation des Koordinatensystems um $\underline{e}_\zeta$ -Achse mit $\alpha = -\frac{\pi}{4}$

$$\begin{aligned} J_x^{S1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2 + \frac{mr^2}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2 - \frac{mr^2}{2} \right) \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{m}{8} (3r^2 + 4\ell^2) \end{aligned}$$

$$J_y^{S1} = \frac{m}{8} (3r^2 + 4\ell^2)$$

$$J_{yx}^{S1} = J_{xy}^{S1} = \frac{1}{2} \left(\frac{mr^2}{4} + m\ell^2 - \frac{mr^2}{2} \right) \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{m}{8} (r^2 - 4\ell^2)$$

$$\Phi_{S2}^{(O)} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{4} + m\ell^2 \end{bmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} = \begin{bmatrix} J_x^{S2} & J_{xy}^{S2} & 0 \\ J_{yx}^{S2} & J_y^{S2} & 0 \\ 0 & 0 & J_z^{S2} \end{bmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

Scheibe 2: Rotation des Koordinatensystems um $\underline{e}_\zeta$ -Achse mit $\alpha = -\frac{3\pi}{4}$

$$J_x^{S2} = \frac{m}{8} (3r^2 + 4\ell^2)$$

$$J_y^{S2} = \frac{m}{8} (3r^2 + 4\ell^2)$$

$$J_{xy}^{S2} = J_{yx}^{S2} = -\frac{m}{8} (r^2 - 4\ell^2)$$

Im Folgenden sind die Trägheitsmatrizen durch

$$\Phi_{S1}^{(O)} = \begin{bmatrix} J_x & J_{xy} & 0 \\ J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_{\{x, y, z\}} \quad \Phi_{S2}^{(O)} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & 0 \\ -J_{yx} & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{bmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

gegeben.

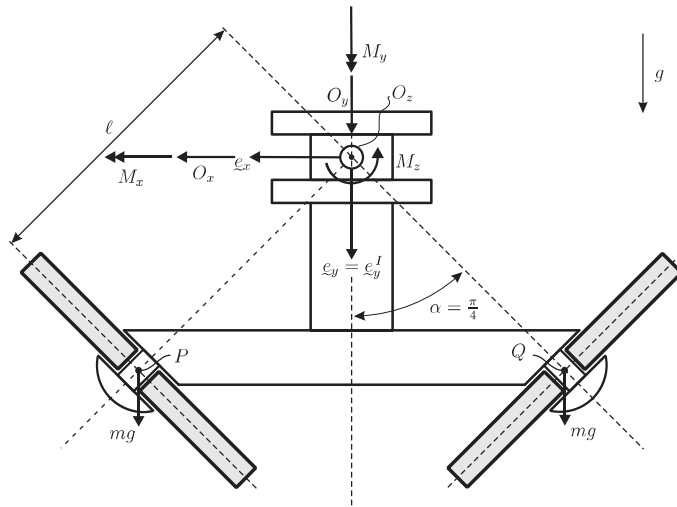
- 4.3 Geben Sie den Drehimpuls $\underline{L}_{S1}^{(O)}$ von Scheibe 1 bzgl. des Punkts O und den Drehimpuls $\underline{L}_{S2}^{(O)}$ von Scheibe 2 bzgl. des Punkts O im $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Bezugssystem an. Bestimmen Sie den resultierenden Drehimpuls $\underline{L}^{(O)}$ des Systems bzgl. des Punkts O .

$$\underline{L}_{S1}^{(O)} = \Phi_{S1}^{(O)} {}^I\dot{\omega}^{S1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} (J_x + J_{xy}) \omega_1 + J_{xy} \Omega \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (J_y + J_{xy}) \omega_1 + J_y \Omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

$$\underline{L}_{S2}^{(O)} = \Phi_{S2}^{(O)} {}^I\dot{\omega}^{S2} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} (J_x + J_{xy}) \omega_2 - J_{xy} \Omega \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (J_y + J_{xy}) \omega_2 + J_y \Omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

$$\underline{L}^{(O)} = \underline{L}_{S1}^{(O)} + \underline{L}_{S2}^{(O)} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} J_x (\omega_1 - \omega_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} J_{xy} (\omega_1 - \omega_2) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} J_y (\omega_1 + \omega_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} J_{xy} (\omega_1 + \omega_2) + 2J_y \Omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\{x, y, z\}}$$

4.4 Fertigen Sie einen Freischnitt des Gesamtsystems nach Newton an und tragen Sie alle angreifenden Kräfte und Momente ein. Geben Sie damit das auf das System wirkende äußere Moment $\underline{M}^{(O)}$ bzgl. des Punkts O im $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Bezugssystem an.



$$\underline{M}^{(O)} = M_x \underline{e}_x + M_y \underline{e}_y + M_z \underline{e}_z$$

4.5 Werten Sie den Drehimpulssatz des Gesamtsystems bzgl. des Punkts O aus.

$$\begin{aligned} \dot{\underline{L}}^{(O)} &= \underbrace{\frac{Tr d}{dt} \underline{L}^{(O)}}_{=0} + {}^I \underline{\omega}^{Tr} \times \underline{L}^{(O)} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{\{x,y,z\}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\{x,y,z\}} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} J_x (\omega_1 - \omega_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} J_{xy} (\omega_1 - \omega_2) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} J_y (\omega_1 + \omega_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} J_{xy} (\omega_1 + \omega_2) + 2 J_y \Omega \\ 0 \end{pmatrix}_{\{x,y,z\}} \end{aligned}$$

$$M_x = M_y = 0$$

$$M_z = - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} J_x (\omega_1 - \omega_2) + \frac{\sqrt{2}}{2} J_{xy} (\omega_1 - \omega_2) \right) \Omega$$

4.6 Für welche Werte von ω_1 bzw. ω_2 verschwindet das Lagermoment $M_z^{(O)}$?

$$\omega_1 = \omega_2$$