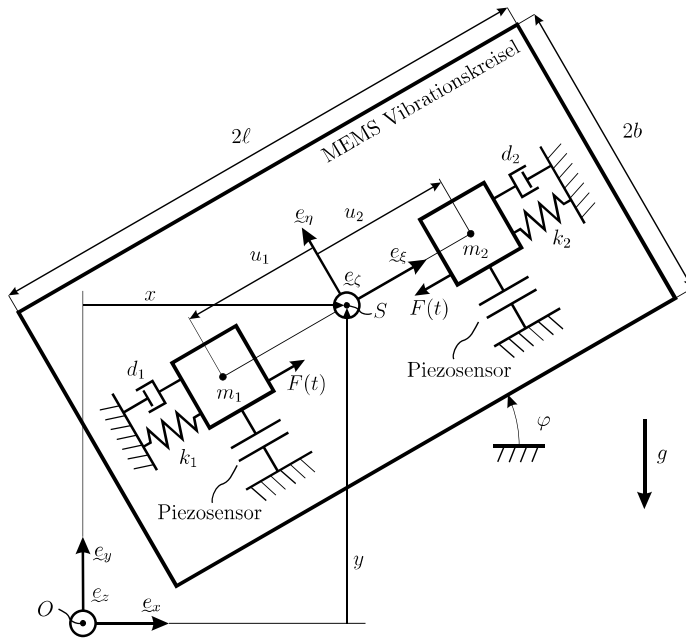


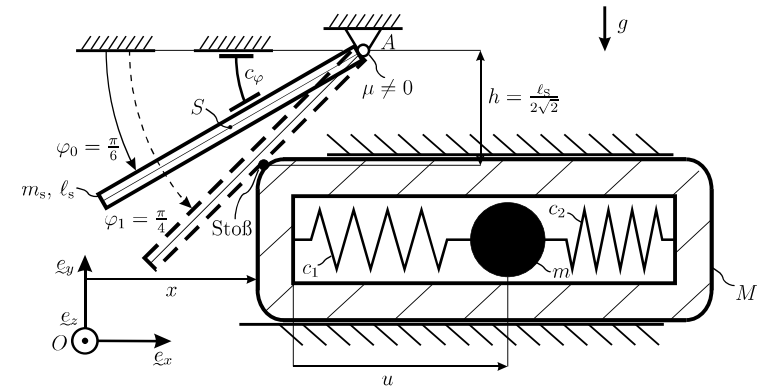
Aufgabe 1



Ein MEMS (micro-electro-mechanical systems) Vibrationskreisels zur Messung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ um die e_z Achse wird durch ein vereinfachtes Ersatzmodell untersucht. Auf dem MEMS-Sensor sind zwei Prüfmassen $m_1 = m_2 = m$ angebracht, die jeweils durch eine Kraft $F(t)$ zur gegenphasigen Vibration in e_ξ Richtung angeregt werden, d.h. für die Relativgeschwindigkeiten der beiden Prüfmassen bezüglich des Sensorgehäuses gilt stets der Zusammenhang: $v_{1rel} = -v_{2rel}$. Die Prüfmassen werden in e_η Richtung durch zwei Piezosensoren unverschieblich abgestützt, und in e_ξ Richtung über Federn und Dämpfer mit dem Sensorrahmen (Länge 2ℓ , Breite $2b$) verbunden. Die Federn sind für $u_1 = 0, u_2 = 0$ entspannt. Durch zwei Piezosensoren, die keine Reibung in e_ξ auf die Prüfmassen erzeugen, werden die Reaktionskräfte Z_1 und Z_2 in e_η Richtung zwischen den Prüfmassen und dem Sensorgehäuse gemessen.

Das $\{e_x, e_y, e_z\}$ -System ist ein Inertialsystem. Auf dem Schwerpunkt S in der Mitte des Sensors befindet sich der Ursprung des körperfesten $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ -Relativsystems. Die Orientierung des Sensorrahmens wird durch den Winkel φ beschrieben. Die Koordinaten $\{x, y\}$ beschreiben die absolute Position des Schwerpunkts S . Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative e_y Richtung.

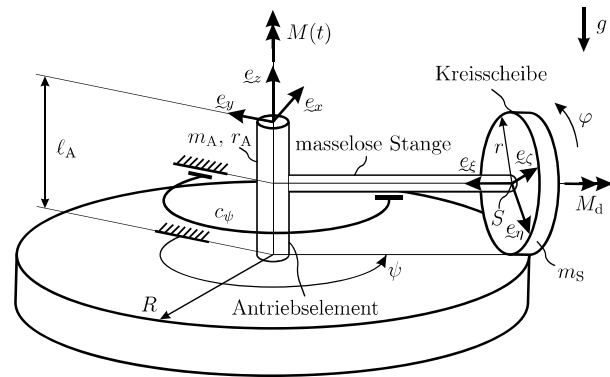
Aufgabe 2



Innerhalb eines Rohres (Masse M) befindet sich ein Massenpunkt (Masse m), der über zwei Federn (Federkonstante $c_1 = c_2 = c$, entspannt bei $u = u_0$) mit dem Rohr verbunden ist. In der Höhe $h = \frac{\ell_s}{2\sqrt{2}}$ wird ein homogener Stab (Masse m_s , Länge ℓ_s) aufgehängt. Auf den Stab wirkt eine Torsionsfeder (Federkonstante c_φ , entspannt bei $\varphi = 0$). Die Reibung im Drehgelenk A wird durch ein konstantes Reibmoment M_μ modelliert. Der Stab fällt aus der Ruhe bei der Position $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$ und stößt gegen das Rohr bei $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ (die Stoßzahl ε beträgt 0.5). Vor dem Stoß befinden sich das Rohr und der Massenpunkt in Ruhe.

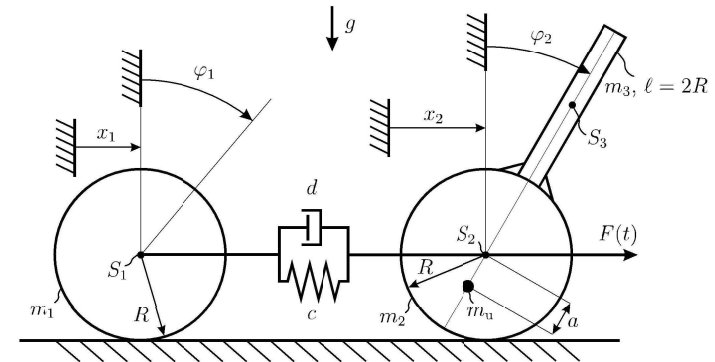
Das $\{e_x, e_y, e_z\}$ -System ist ein Inertialsystem. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative e_y Richtung. Die Koordinate u beschreibt die relative Verschiebung des Massenpunktes innerhalb des Rohrs. Die Verdrehung des Stabes wird durch die Koordinate φ beschrieben. Die Reibung zwischen dem Massenpunkt und dem Rohr bzw. zwischen dem Rohr und dem Boden ist zu vernachlässigen.

Aufgabe 3



Die Dynamik einer Stein- oder Ölmühle soll untersucht werden. Der Mühlstein wird modelliert durch eine homogene, dünne Kreisscheibe (Masse m_s , Radius r , Dicke vernachlässigbar), die auf einer Kreisbahn mit dem Radius R abrollt. Die Kreisscheibe ist über eine masselose Stange mit dem Antriebsselement verbunden, auf welches das Antriebsmoment $M(t)$ wirkt. Das Antriebsselement ist als ein homogener Zylinder mit der Masse m_A , dem Radius r_A und der Länge ℓ_A zu modellieren. Die Mühle ist über ein Gummiband fixiert, welches als eine Torsionsfeder (Federkonstante c_ψ , entspannt bei $\psi = 0$) zwischen der Stange und der Umgebung modelliert wird. Aufgrund der Verluste wirkt ein Widerstandsmoment $M_d = -d\dot{\varphi}\zeta_\varphi$, das proportional zur Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ ist, auf die Kreisscheibe.

Das $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -System ist das Inertialsystem. Das mitdrehende $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ -Koordinatensystem ist ein Hauptachsensystem der Kreisscheibe. Die Koordinate ψ beschreibt die Verdrehung der horizontalen Stange, φ beschreibt die Verdrehung der Scheibe bezüglich der Stange. Es gelte $\psi = 0$ bei $\varphi = 0$. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative $\underline{e}_z$ -Richtung.



Auf dem Untergrund rollen zwei homogene Kreisscheiben m_1 und m_2 ab, die über ein Feder-Dämpfer-Element miteinander verbunden sind (Federkonstante c , Dämpfungskonstante d). Die Feder ist bei $x_1 = x_2 = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ entspannt. Ein homogener starrer Stab (Schwerpunkt S_3 , Masse m_3 , Länge $\ell = 2R$) wird auf der Kreisscheibe m_2 fest angeschweißt, auf der sich eine weitere Unwucht (Masse m_u) im Abstand von a befindet. Die Kreisscheibe m_2 wird durch eine Kraft $F(t) = \hat{F} \sin(t)$ zu Schwingungen angeregt. Das System befindet sich unter dem Einfluss der Erdbeschleunigung g .

Die Koordinaten x_1 und x_2 beschreiben die Verschiebungen der beiden Kreisscheiben, deren Verdrehungen durch φ_1 und φ_2 beschrieben werden.

Aufgabe 1

- 1.1 Bestimmen Sie den Ortsvektor $\underline{r}_1$ vom Punkt O zu der Prüfmasse m_1 und anschließend die absolute Geschwindigkeit $\underline{v}_1$. Geben Sie im Sinne der Relativmechanik alle Geschwindigkeitsanteile ($\underline{v}_{Führ,T}$, $\underline{v}_{Führ,R}$, $\underline{v}_{rel}$) an.

$$\underline{r}_1 = x \underline{e}_x + y \underline{e}_y + (-u_1 \underline{e}_\xi)$$

$$\underline{v}_1 = \dot{x} \underline{e}_x + \dot{y} \underline{e}_y - \dot{u}_1 \underline{e}_\xi - u_1 \dot{\varphi} \underline{e}_\eta$$

$$\underline{v}_{Führ,T} = \dot{x} \underline{e}_x + \dot{y} \underline{e}_y$$

$$\underline{v}_{Führ,R} = -u_1 \dot{\varphi} \underline{e}_\eta$$

$$\underline{v}_{rel} = -\dot{u}_1 \underline{e}_\xi$$

- 1.2 Geben Sie die Geschwindigkeit $\underline{v}_S$ des Schwerpunkts S an. Bestimmen Sie dann im Sinne der Relativmechanik alle Beschleunigungsanteile ($\underline{a}_{Führ,T}$, $\underline{a}_{Führ,R}^{(t)}$, $\underline{a}_{Führ,R}^{(r)}$, $\underline{a}_{cor}$, $\underline{a}_{rel}$) der Prüfmasse m_1 .

$$\underline{v}_S = \dot{x} \underline{e}_x + \dot{y} \underline{e}_y$$

$$\underline{a} = \ddot{x} \underline{e}_x + \ddot{y} \underline{e}_y - \ddot{u}_1 \underline{e}_\xi - 2\dot{u}_1 \dot{\varphi} \underline{e}_\eta + u_1 \dot{\varphi}^2 \underline{e}_\xi - u_1 \ddot{\varphi} \underline{e}_\eta$$

$$\underline{a}_{Führ,T} = \ddot{x} \underline{e}_x + \ddot{y} \underline{e}_y$$

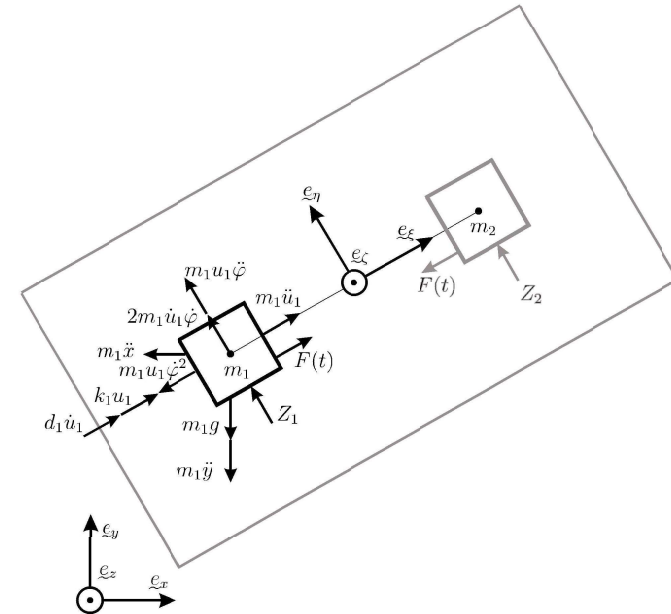
$$\underline{a}_{Führ,R}^{(t)} = -u_1 \ddot{\varphi} \underline{e}_\eta$$

$$\underline{a}_{Führ,R}^{(r)} = u_1 \dot{\varphi}^2 \underline{e}_\xi$$

$$\underline{a}_{cor} = -\ddot{u}_1 \underline{e}_\xi$$

$$\underline{a}_{rel} = -2\dot{u}_1 \dot{\varphi} \underline{e}_\eta$$

- 1.3 Schneiden Sie im Prinzip von d'Alembert die Prüfmasse m_1 frei, und tragen Sie sämtliche Kräfte einschließlich der Trägheitswirkungen ein.



- 1.4 Stellen Sie die Kräftebilanzen für die Prüfmasse m_1 in $\underline{e}_\xi$ und $\underline{e}_\eta$ auf.

$$\begin{aligned} \text{in } \underline{e}_\xi : \quad & m_1 \ddot{u}_1 + k_1 u_1 + d_1 \dot{u}_1 - m_1 u_1 \dot{\varphi}^2 - m_1 \ddot{x} \cos \varphi - m_1 \ddot{y} \sin \varphi \\ & - m_1 g \sin \varphi + F(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in } \underline{e}_\eta : \quad & m_1 u_1 \ddot{\varphi} + 2m_1 \dot{u}_1 \dot{\varphi} + Z_1 + m_1 \ddot{x} \sin \varphi - m_1 \ddot{y} \cos \varphi \\ & - m_1 g \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

7

Es wird nun angenommen, dass sich der Sensor mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega_{\text{konst}}$ um dem fixierten Schwerpunkt S dreht (d.h. $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$). Es gelte außerdem $\underline{v}_{1rel} = -\underline{v}_{2rel} = v_{\text{konst}} \underline{e}_\xi$ (d.h. $\dot{u}_1 = \dot{u}_2$). Die Zwangskraft $Z_2 = Z_2 \underline{e}_\eta$ (siehe Bild in Aufgabe 1.3) ergibt sich in diesem Fall zu:

$$Z_2 = 2m_2 \dot{u}_2 \Omega_{\text{konst}} + m_2 g \cos(\varphi)$$

Im Folgenden soll Ω_{konst} durch die gemessenen Reaktionskräfte Z_1 und Z_2 bestimmt werden.

- 1.5 Bestimmen Sie die Zwangskraft Z_1 und geben Sie die Winkelgeschwindigkeit Ω_{konst} in Abhängigkeit der Reaktionskräfte Z_1 und Z_2 an.

$$Z_1 = m_1 g \cos \varphi - 2m_1 \dot{u}_1 \Omega_{\text{konst}}$$

$$Z_1 - Z_2 = m_1 g \cos \varphi - 2m_1 \dot{u}_1 \Omega_{\text{konst}} - m_2 g \cos \varphi - 2m_2 \dot{u}_2 \Omega_{\text{konst}}$$

mit $m_1 = m_2 = m$:

$$\Omega_{\text{konst}} = \frac{Z_2 - Z_1}{4m\dot{u}_1}$$

- 1.6 Bitte begründen Sie, warum die Erdbeschleunigung g Ihre Messung nicht verfälscht.

Durch $Z_1 - Z_2$ wird die Erdbeschleunigung kompensiert.

Name: Matrikelnummer:

8

Aufgabe 2

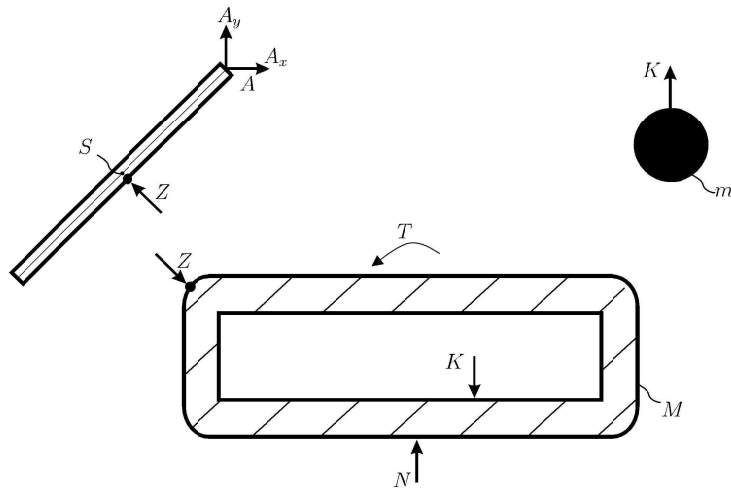
- 2.1 Berechnen Sie das Massenträgheitsmoment J_A des Stabes bezüglich A , und bestimmen Sie dann mithilfe des Arbeitssatzes die Winkelgeschwindigkeit ω_S des Stabes unmittelbar vor dem Stoß.

$$J_A = m_S \frac{\ell_S^2}{3}$$

$$\frac{1}{2} m_S \frac{\ell_S^2}{3} \omega_S^2 - 0 = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-c_\varphi \varphi - M_\mu + m_S g \frac{\ell_S}{2} \cos \varphi \right) d\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{m_S \ell_S^2}{6} \omega_S^2 &= \left[-c_\varphi \frac{\varphi^2}{2} - M_\mu \varphi + m_S g \frac{\ell_S}{2} \sin \varphi \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{5}{288} c_\varphi \pi^2 - \frac{1}{12} M_\mu \pi + \frac{\sqrt{2}-1}{4} m_S g \ell_S \\ \omega_S &= \sqrt{\frac{6}{m_S \ell_S^2} \left(-\frac{5}{288} c_\varphi \pi^2 - \frac{1}{12} M_\mu \pi + \frac{\sqrt{2}-1}{4} m_S g \ell_S \right)} \end{aligned}$$

- 2.2 Schneiden Sie den Stab, das Rohr und den Massenpunkt zum Stoßzeitpunkt frei und tragen Sie sämtliche stoßrelevanten Kräfte und Momente in die Skizze ein. (Die stoßende Ecke des Rohres ist abgerundet.)



Die Winkelgeschwindigkeit $\omega_S = \omega$ des Stabes unmittelbar vor dem Stoß sei bekannt für die weiteren Teilaufgaben.

2.3 Stellen Sie die maßgeblichen Impuls- und Drehimpulsbilanzen für den Stoßvorgang auf, und bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit des Rohrs V_R und die Geschwindigkeit des Massenpunktes V_K in $\mathcal{L}_x$ Richtung unmittelbar nach dem Stoß. Hinweis: In die Stoßzahlgleichung sind die Normalkomponenten der Geschwindigkeit einzusetzen.

$$\text{Stab: } \int_{t_0}^{t_1} \left(-Z \frac{\ell_S}{2} \right) dt = J_A (\Omega - \omega)$$

$$\text{Rohr: } \int_{t_0}^{t_1} \left(Z \frac{\sqrt{2}}{2} \right) dt = M (V_R - 0)$$

$$\varepsilon = - \frac{V_R \frac{\sqrt{2}}{2} - \Omega \frac{\ell_S}{2}}{-\omega \frac{\ell_S}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$V_R = \frac{3m_S \ell_S}{\sqrt{2} (2m_S + 3M)} \omega$$

$$\Omega = \frac{4m_S - 3M}{4m_S + 6M} \omega$$

$$V_K = 0$$

2.4 Wie groß ist der Energieverlust durch den Stoß? Die Ausdrücke für die Geschwindigkeiten und die Winkelgeschwindigkeit direkt nach dem Stoß

sind nicht einzusetzen.

$$\Delta T = \frac{1}{2} M (-V_R^2) + \frac{1}{2} J_A (-\Omega^2 + \omega^2)$$

2.5 Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Rohr-Massenpunkt-Systems nach dem Stoß auf.

$$-M\ddot{x} + (u - u_0)(c_1 + c_2) = 0$$

$$-m(\ddot{x} + \ddot{u}) - (u - u_0)(c_1 + c_2) = 0$$

Aufgabe 3

- 3.1 Bestimmen Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$. Drücken Sie $\dot{\psi}$ in Abhängigkeit von $\dot{\varphi}$ aus.

$$\dot{\psi} R = \dot{\varphi} r$$

$$\dot{\psi} = \frac{r}{R} \dot{\varphi}$$

- 3.2 Bestimmen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\omega^S$ der Kreisscheibe im $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ -Koordinatensystem.

$${}^I\omega^S = \dot{\psi} \underline{e}_z + \dot{\varphi} \underline{e}_\xi$$

mit $\underline{e}_z = \sin \varphi \underline{e}_\xi - \cos \varphi \underline{e}_\eta$

$${}^I\omega^S = \dot{\varphi} \underline{e}_\xi - \dot{\psi} \cos \varphi \underline{e}_\eta + \dot{\psi} \sin \varphi \underline{e}_\zeta$$

- 3.3 Geben Sie die Matrix $\Phi^{(S)}$ der Koordinaten des Trägheitstensors der dünnen Kreisscheibe bezüglich des $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ -Koordinatensystems an.

$$\Phi^{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} m_S r^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} m_S r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} m_S r^2 \end{bmatrix}$$

- 3.4 Bestimmen Sie die gesamte kinetische Energie des Systems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$T = \frac{1}{2} J_A \dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} m_S V_S^2 + \frac{1}{2} \omega_S \cdot I \cdot \omega_S$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_A r_A^2}{2} \frac{r^2}{R^2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m_S r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{m_S r^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_S r^2}{4} \dot{\varphi}^2 \frac{r^2}{R^2}$$

$$= \dot{\varphi}^2 \left(\frac{m_A r_A^2}{4} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{4} m_S r^2 + \frac{m_S r^4}{8 R^2} \right)$$

- 3.5 Bestimmen Sie die gesamte potentielle Energie des Systems in Abhängigkeit von φ .

$$V = \frac{1}{2} c_\psi \psi^2 = \frac{1}{2} c_\psi \frac{r^2}{R^2} \varphi^2$$

- 3.6 Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit aller nicht im Potential berücksichtigten Kräfte und Momente und geben Sie die generalisierte Kraft Q_φ an.

$$\delta W = M(t) \delta \psi - d\dot{\varphi} \delta \varphi$$

$$Q_\varphi = \frac{r}{R} M(t) - d\dot{\varphi}$$

- 3.7 Leiten Sie die Bewegungsgleichung des Systems mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen 2. Art her.

$$L = T - V = \dot{\varphi}^2 \underbrace{\left(\frac{m_A r_A^2}{4} \frac{r^2}{R^2} + \frac{3}{4} m_S r^2 + \frac{m_S r^4}{8 R^2} \right)}_{=A} - \frac{1}{2} c_\psi \frac{r^2}{R^2} \varphi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2A \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2A \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -c_\psi \frac{r^2}{R^2} \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$2A \ddot{\varphi} + c_\psi \frac{r^2}{R^2} \varphi = \frac{r}{R} M(t) - d\dot{\varphi}$$

Für die folgenden Teilaufgaben sei die Kreisscheibe m_1 fixiert ($\varphi_1 = 0$). Der Dämpfer zwischen den beiden Kreisscheiben sei im Folgenden zu vernachlässigen. Als Differentialgleichung für die Kreisscheibe m_2 ergibt sich dann:

$$(MR^2 + \Theta_{S_2})\ddot{\varphi}_2 + cR^2\dot{\varphi}_2 = R\hat{F}\sin(t)$$

4.6 Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ω_0 .

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{cR^2}{MR^2 + \Theta_{S_2}}}$$

4.7 Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung φ_{2p} der inhomogenen Differentialgleichung für den Fall $\omega_0 \neq 1$.

$$\ddot{\varphi}_2 + \underbrace{\frac{cR^2}{MR^2 + \Theta_{S_2}}}_{=\omega_0^2} \varphi_2 = \underbrace{\frac{R\hat{F}}{MR^2 + \Theta_{S_2}}}_{=y_0} \sin(t)$$

$$\text{Ansatz: } \varphi_p = A \sin(t) \Rightarrow \ddot{\varphi}_p = -A \sin(t)$$

$$-A \sin(t) + \omega_0^2 A \sin(t) = y_0 \sin(t)$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - 1)A = y_0$$

$$\Rightarrow A = \frac{y_0}{(\omega_0^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow \varphi_p = \frac{R\hat{F}}{cR^2 - MR^2 - \Theta_{S_2}} \sin(t)$$