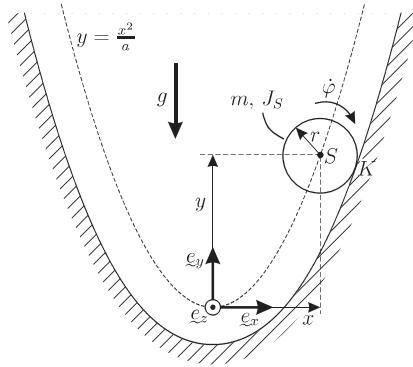


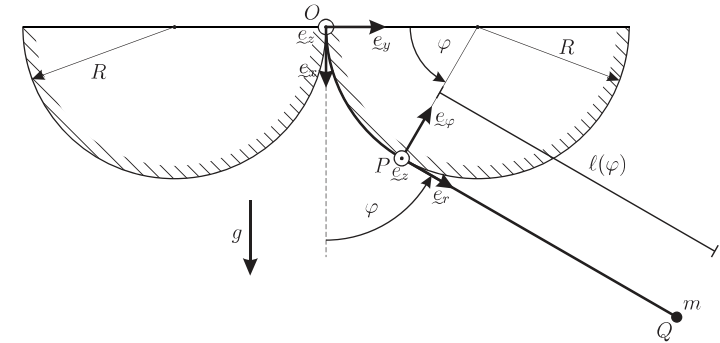
Aufgabe 1



Eine homogene Kreisscheibe mit dem Radius r , der Masse m und dem Massenträgheitsmoment $J_S = \frac{1}{2}mr^2$ rollt auf einer Bahn ab, so dass ihr Schwerpunkt S sich auf einer Parabelkurve bewegt. Der Kontaktpunkt zwischen Scheibe und Bahn ist K . Der Zusammenhang zwischen der x - und der y -Koordinate des Scheibenschwerpunkts lautet $y = \frac{x^2}{a}$. Die Verdrehung der Scheibe wird durch den Winkel φ beschrieben, es gilt $\varphi(x=0) = 0$. Die Scheibe befindet sich im Schwerfeld der Erde. Dissipative Effekte werden vernachlässigt.

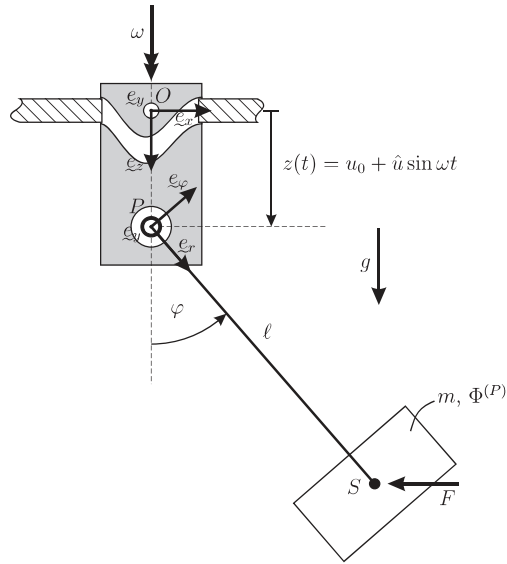
Hinweis: Es gilt $\frac{dy}{dx} = \tan(\alpha(x))$, wobei $\alpha(x)$ den Steigungswinkel an der Stelle x beschreibt.

Aufgabe 2



Bei dem dargestellten Pendel ist der Faden in Punkt O befestigt und wickelt sich beim Ausschlagen auf die Halbkreise mit den Radien R auf. Der freie Teil des Pendelfadens liegt dabei immer tangential an die Halbkreise in Punkt P an. Der Winkel φ beschreibt den Ausschlag des Pendels sowie den Umschlingungswinkel des aufgewickelten Fadens. Die Position und die Orientierung des Relativsystems mit Punkt P ändert sich ebenfalls mit dem Winkel φ . Die freie Pendellänge wird durch $\ell(\varphi)$ beschrieben, wobei $\ell(\varphi=0) = \pi R$ gilt. Am Endpunkt Q des Pendels ist ein Massenpunkt mit Masse m befestigt, der sich im Schwerfeld der Erde bewegt. Reibungseinflüsse werden vernachlässigt.

Aufgabe 3

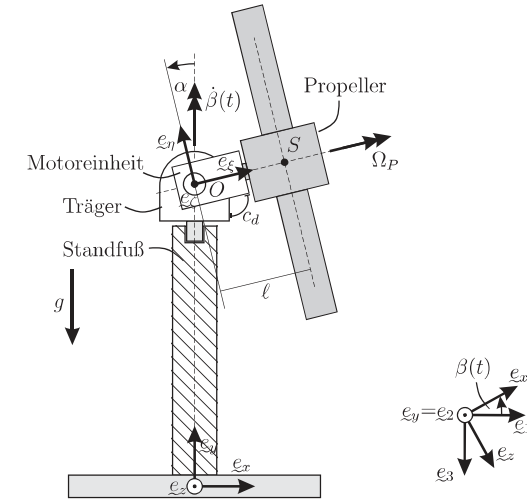


Ein Zapfen rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um die e_z -Achse und führt aufgrund einer Einkerbung im Umfang zusätzlich eine Hubbewegung $z(t) = u_0 + \hat{u} \sin \omega t$ in e_z -Richtung aus. Das $\{e_x, e_y, e_z\}$ -System hat seinen Ursprung in Punkt O und rotiert mit dem Zapfen. In Punkt P ist zudem ein Drehgelenk, an dem eine masselose Stange der Länge ℓ befestigt ist. An deren Ende befindet sich der Schwerpunkt S eines starren Körpers mit Masse m und Trägheitstensor $\Phi^{(P)}$ bezüglich P . Es gilt

$$\Phi^{(P)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{\{r, \varphi, y\}}.$$

Am Schwerpunkt greift zusätzlich die konstante Kraft F an, die immer in negative e_x -Richtung wirkt. Der Winkel φ beschreibt den Ausschlag der Stange aus der Vertikalen, zudem verdreht sich das stangenfeste $\{e_r, e_\varphi, e_y\}$ -System mit φ . Das System befindet sich im Schwerfeld der Erde, Reibungseinflüsse werden vernachlässigt.

Aufgabe 4



Zur Untersuchung der Dynamik eines Standventilators wird das dargestellte Modell herangezogen. Hierbei verdreht sich der Träger gegenüber dem Standfuß mit dem Winkel $\beta(t) = \hat{\beta} \sin \omega t$ um die vertikale e_y -Achse. Das $\{e_x, e_y, e_z\}$ -System dreht mit dem Träger mit und geht aus einer Rotation um β aus dem Inertialsystem $\{e_1, e_2, e_3\}$ hervor. Auf dem Träger ist die Motoreinheit befestigt, die sich bezüglich des Trägers um den Winkel α um die e_ξ -Achse verdreht. Zwischen Motoreinheit und Träger wirkt eine lineare Drehfeder (Konstante c_d), die für $\alpha = 0$ entspannt ist. Das $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ -System sitzt auf der Motoreinheit. Der Propeller dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_P um die e_ξ -Achse. Sein Schwerpunkt S sitzt im Abstand ℓ vom Ursprung O des Relativsystems. Der Propeller besitzt die Masse m und den Trägheitstensor $\Phi^{(O)}$ bezüglich O mit

$$\Phi^{(O)} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}}.$$

Die Massen der Motoreinheit und des Trägers sind im Vergleich zur Masse des Propellers vernachlässigbar.

Musterlösung

Technische Mechanik III/IV

28. September 2022

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Raum nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

Punkte:

Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

Lösung zu Aufgabe 1

- 1.1 Geben Sie den Ortsvektor $\underline{r}_S$ vom Ursprung zum Schwerpunkt S der Kreisscheibe ausschließlich in Abhängigkeit der Koordinate x an.

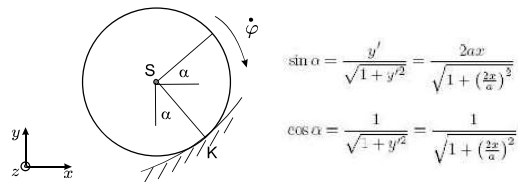
$$\underline{r}_S = x \underline{e}_x + \frac{x^2}{a} \underline{e}_y$$

- 1.2 Bestimmen Sie daraus die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\underline{v}_S$.

$$\underline{v}_S = \dot{x} \underline{e}_x + \frac{2x\dot{x}}{a} \underline{e}_y$$

- 1.3 Leiten Sie den Zusammenhang für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(x, \dot{x})$ her.
Kinematische Grundgleichung:

$$\begin{aligned} \underline{v}_K &= \underline{v}_S + \dot{\varphi} \times \underline{r}_{SK} \\ &= \underline{v}_S + (-\dot{\varphi} \underline{e}_z) \times (r \sin \alpha \underline{e}_x - r \cos \alpha \underline{e}_y) \\ &= \underline{v}_S - r \dot{\varphi} \sin \alpha \underline{e}_y - r \dot{\varphi} \cos \alpha \underline{e}_x \stackrel{!}{=} \underline{0} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{2ax}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}} \\ \cos \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{0} &= \dot{x} \underline{e}_x + \frac{2x\dot{x}}{a} \underline{e}_y - r \dot{\varphi} \left(\frac{2ax}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}} \underline{e}_y + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}} \underline{e}_x \right) \\ \rightarrow \dot{x} - r \dot{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}} &= 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r} \dot{x} \sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2} \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\dot{\varphi} = \frac{|\underline{v}_S|}{r} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \left(\frac{2x\dot{x}}{a}\right)^2}}{r} = \frac{1}{r} \dot{x} \sqrt{1+\left(\frac{2x}{a}\right)^2}$$

- 1.4 Warum wäre eine Parametrisierung $x(y)$ ungünstig? Begründen Sie!

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2}{a} &\Leftrightarrow x^2 = ay \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{ay} \quad \text{ist nicht eindeutig} \\ &\rightarrow \text{Fallunterscheidung notwendig.} \end{aligned}$$

Im Folgenden rollt die Kreisscheibe in einer anderen Kurve ab, es gilt

$$y = b \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right) \quad \text{und} \quad \dot{\varphi} = \frac{1}{r} \dot{x} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right)}$$

mit

$$\begin{aligned} \cosh x &= \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \\ \sinh x &= \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \end{aligned}$$

- 1.5 Berechnen Sie die kinetische Energie der Kreisscheibe.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m \|\underline{v}_S\|^2 + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \dot{x}^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \frac{\dot{x}^2}{r^2} \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \right) + \frac{1}{4} m \dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{3}{4} m \dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

3

1.6 Berechnen Sie die potentielle Energie der Kreisscheibe.

$$V = mgy = mgb \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right)$$

1.7 Berechnen Sie für $\dot{x}(x=0) = v_0$ die Geschwindigkeit $\dot{x}(x)$ mithilfe des Energiesatzes.

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1, \quad T_0 = \frac{3}{4}mv_0^2, \quad V_0 = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{4}mv_0^2 = \frac{3}{4}m\dot{x}^2 \left(1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right) \right) + mgb \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right)$$

$$\dot{x}^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right)} \left(v_0^2 - \frac{4}{3}gb \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right) \right)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(x) = \pm \sqrt{\frac{v_0^2 - \frac{4}{3}gb \left(\cosh \left(\frac{x}{a} \right) - 1 \right)}{1 + \left(\frac{b}{a} \right)^2 \sinh^2 \left(\frac{x}{a} \right)}}$$

Name: Matrikelnummer:

4

Lösung zu Aufgabe 2

2.1 Berechnen Sie die freie Pendellänge $\ell(\varphi)$.

$$\ell(\varphi) = \pi R - \varphi R = R(\pi - \varphi)$$

2.2 Geben Sie den Ortsvektor $\underline{r}_P$ zum Punkt P in $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Koordinaten an.

$$\underline{r}_P = R(\sin \varphi \underline{e}_x + (1 - \cos \varphi) \underline{e}_y)$$

2.3 Geben Sie den Vektor $\underline{r}_{rel}$ von P zu Q in $\{\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_z\}$ -Koordinaten an.

$$\underline{r}_{rel} = \ell(\varphi) \underline{e}_r = R(\pi - \varphi) \underline{e}_r$$

2.4 Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^A\omega^B$ an, mit dem sich das Relativsystem bezüglich des Inertialsystems verdreht. Geben Sie zudem die Winkelbeschleunigung ${}^A\dot{\omega}^B$ an.

$${}^A\omega^B = \dot{\varphi} \underline{e}_z$$

$${}^A\dot{\omega}^B = \ddot{\varphi} \underline{e}_z$$

Name: Matrikelnummer:

5

2.5 Berechnen Sie die Führungsgeschwindigkeiten durch Translation und Rotation des Relativsystems $\underline{v}_{F,T}$ und $\underline{v}_{F,R}$ sowie die Relativgeschwindigkeit $\underline{v}_{rel}$ analytisch für $\underline{r}_Q = \underline{r}_P + \underline{r}_{rel}$.

$$\begin{aligned}\underline{v}_{F,T} &= \frac{{}^A d \underline{r}_P}{dt} = R \dot{\varphi} (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) \\ \underline{v}_{F,R} &= {}^A \underline{\omega}^B \times \underline{r}_{rel} = \dot{\varphi} \underline{e}_z \times R (\pi - \varphi) \underline{e}_r = R \dot{\varphi} (\pi - \varphi) \underline{e}_\varphi \\ \underline{v}_{rel} &= \frac{{}^B d \underline{r}_{rel}}{dt} = -R \dot{\varphi} \underline{e}_r\end{aligned}$$

2.6 Berechnen Sie die Führungsbeschleunigungsanteile $\underline{a}_{F,T}$, $\underline{a}_{F,R}^{(t)}$, $\underline{a}_{F,R}^{(r)}$, die Coriolisbeschleunigung $\underline{a}_{cor}$ sowie die Relativbeschleunigung $\underline{a}_{rel}$ analytisch.

$$\begin{aligned}\underline{a}_{F,T} &= \frac{{}^A d \underline{v}_{F,T}}{dt} = R \ddot{\varphi} (\cos \varphi \underline{e}_x + \sin \varphi \underline{e}_y) + R \dot{\varphi}^2 (-\sin \varphi \underline{e}_x + \cos \varphi \underline{e}_y) \\ \underline{a}_{F,R}^{(t)} &= {}^A \underline{\omega}^B \times \underline{v}_{rel} = \ddot{\varphi} \underline{e}_z \times R (\pi - \varphi) \underline{e}_r = R \ddot{\varphi} (\pi - \varphi) \underline{e}_\varphi \\ \underline{a}_{F,R}^{(r)} &= {}^A \underline{\omega}^B \times ({}^A \underline{\omega}^B \times \underline{r}_{rel}) = \dot{\varphi} \underline{e}_z \times R \dot{\varphi} (\pi - \varphi) \underline{e}_\varphi = -R \dot{\varphi}^2 (\pi - \varphi) \underline{e}_r \\ \underline{a}_{cor} &= 2 {}^A \underline{\omega}^B \times \underline{v}_{rel} = 2 \dot{\varphi} \underline{e}_z \times (-R \dot{\varphi} \underline{e}_r) = -2R \dot{\varphi}^2 \underline{e}_\varphi \\ \underline{a}_{rel} &= \frac{{}^B d \underline{v}_{rel}}{dt} = -R \ddot{\varphi} \underline{e}_r\end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

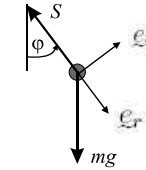
6

Im Folgenden ist die Absolutbeschleunigung des Massenpunktes durch

$$\underline{a}_{abs} = a_r \underline{e}_r + a_\varphi \underline{e}_\varphi$$

gegeben. Die Größen a_r und a_φ sind als bekannt anzunehmen.

2.7 Schneiden Sie den Massenpunkt von seiner Umgebung nach Newton frei und geben Sie den Kraftvektor $\underline{F}_{ges}$ aller auf den Massenpunkt wirkenden Kräfte an.



$$\begin{aligned}\underline{F}_{ges} &= -S \underline{e}_r + mg \underline{e}_x \\ &= (-S + mg \cos \varphi) \underline{e}_r - mg \sin \varphi \underline{e}_\varphi\end{aligned}$$

2.8 Werten Sie das Newtonsche Grundgesetz aus und geben Sie die Bewegungsgleichung für das Pendel an.

$$m \underline{a}_{abs} = \underline{F}_{ges}$$

$$\begin{aligned}ma_r &= mg \cos \varphi - S \\ \Rightarrow S &= m(g \cos \varphi - a_r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ma_\varphi &= -mg \sin \varphi \\ \Rightarrow 0 &= a_\varphi + g \sin \varphi\end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

7

Lösung zu Aufgabe 3

3.1 Stellen Sie den Vektor $\underline{r}_P$ von O zu Punkt P auf und geben Sie die Geschwindigkeit $\underline{v}_P$ an.

$$\begin{aligned}\underline{r}_P &= z \underline{e}_z = (u_0 + \dot{u} \sin \omega t) \underline{e}_z \\ \underline{v}_P &= \dot{u} \omega \cos \omega t \underline{e}_z\end{aligned}$$

3.2 Geben Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I\dot{\underline{\omega}}^K$ des starren Körpers in $\{\underline{e}_r, \underline{e}_\varphi, \underline{e}_y\}$ -Koordinaten an. Geben Sie zudem den Vektor $\underline{r}_{PS}$ von P nach S an.

$$\begin{aligned}{}^I\dot{\underline{\omega}}^K &= \omega \underline{e}_z + \dot{\varphi} \underline{e}_y \quad \text{mit} \quad \underline{e}_z = \cos \varphi \underline{e}_r - \sin \varphi \underline{e}_\varphi \\ &= \omega \cos \varphi \underline{e}_r - \omega \sin \varphi \underline{e}_\varphi + \dot{\varphi} \underline{e}_y \\ \underline{r}_{PS} &= \ell \underline{e}_r\end{aligned}$$

3.3 Berechnen Sie die kinetische Energie des Systems.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} m \|\underline{v}_P\|^2 + m \underline{v}_P \cdot ({}^I\dot{\underline{\omega}}^K \times \underline{r}_{PS}) + \frac{1}{2} {}^I\dot{\underline{\omega}}^K \cdot \underline{L}^{(P)} \\ \frac{1}{2} m \|\underline{v}_P\|^2 &= \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \\ m \underline{v}_P \cdot ({}^I\dot{\underline{\omega}}^K \times \underline{r}_{PS}) &= m \underline{v}_P \cdot \left((\omega \cos \varphi \underline{e}_r - \omega \sin \varphi \underline{e}_\varphi + \dot{\varphi} \underline{e}_y) \times \ell \underline{e}_r \right) \\ &= m \dot{u} \omega \cos \omega t \underline{e}_z \cdot (\omega \ell \sin \varphi \underline{e}_y + \ell \dot{\varphi} \underline{e}_\varphi) \\ &= -m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \omega t \\ \text{mit } \underline{e}_\varphi &= \cos \varphi \underline{e}_x - \sin \varphi \underline{e}_z \\ \frac{1}{2} {}^I\dot{\underline{\omega}}^K \cdot \underline{L}^{(P)} &= \frac{1}{2} \left(A \omega^2 \cos^2 \varphi + B (\omega^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) \right) \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \omega t \\ &\quad + \frac{1}{2} A \omega^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} B (\omega^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2)\end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

8

3.4 Geben Sie die potentielle Energie des Systems an.

$$\begin{aligned}V &= -mg(z + \ell \cos \varphi) \\ &= -mg(u_0 + \dot{u} \sin \omega t + \ell \cos \varphi)\end{aligned}$$

3.5 Stellen Sie die virtuelle Arbeit auf und geben Sie die generalisierten Kräfte Q_i an.

$$\begin{aligned}\delta W &= -F \underline{e}_x \cdot \delta \underline{r}_S \quad \text{mit} \quad \delta \underline{r}_S = \ell \delta \varphi \underline{e}_\varphi \\ &= -F \ell \cos \varphi \delta \varphi \stackrel{!}{=} Q_\varphi \delta \varphi \\ \Rightarrow Q_\varphi &= -F \ell \cos \varphi\end{aligned}$$

3.6 Werten Sie die Lagrangeschen Gleichungen zweiter Art aus und geben Sie die Bewegungsgleichung des Systems an.

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{2} m \dot{u}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t - m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \omega t + \frac{1}{2} A \omega^2 \cos^2 \varphi \\ &\quad + \frac{1}{2} B (\omega^2 \sin^2 \varphi + \dot{\varphi}^2) + mg (u_0 + \hat{u} \sin \omega t + \ell \cos \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{d}{dt} (-m \ell \dot{u} \omega \sin \varphi \cos \omega t + B \dot{\varphi}) \\ &= -m \ell \dot{u} \omega (\dot{\varphi} \cos \varphi \cos \omega t - \omega \sin \varphi \sin \omega t) + B \ddot{\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \omega t - A \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + B \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \ell \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B \ddot{\varphi} &= \frac{m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \omega t + m \ell \dot{u} \omega^2 \sin \varphi \sin \omega t + m \ell \dot{u} \omega \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \omega t}{+ (A - B) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + mg \ell \sin \varphi} = -F \ell \cos \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow B \ddot{\varphi} &+ (A - B) \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi + m \ell \dot{u} \omega^2 \sin \varphi \sin \omega t \\ &+ mg \ell \sin \varphi + F \ell \cos \varphi = 0 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

4.1 Stellen Sie den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I \underline{\omega}^M$ auf, der die Verdrehung der Motoreinheit gegenüber dem Inertialsystem beschreibt. Geben Sie zusätzlich den Winkelgeschwindigkeitsvektor ${}^I \underline{\omega}^P$ des Propellers an. Nutzen Sie jeweils $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ -Koordinaten.

$$\begin{aligned} {}^I \underline{\omega}^M &= \dot{\beta} \underline{e}_\eta + \dot{\alpha} \underline{e}_\zeta \quad \text{mit} \quad \underline{e}_\eta = \cos \alpha \underline{e}_\eta + \sin \alpha \underline{e}_\xi \\ &= \dot{\beta} \sin \alpha \underline{e}_\xi + \dot{\beta} \cos \alpha \underline{e}_\eta + \dot{\alpha} \underline{e}_\zeta, \quad \dot{\beta} = \dot{\beta} \omega \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^I \underline{\omega}^P &= {}^I \underline{\omega}^M + \mu \underline{e}_\xi \\ &= (\dot{\beta} \sin \alpha + \mu) \underline{e}_\xi + \dot{\beta} \cos \alpha \underline{e}_\eta + \dot{\alpha} \underline{e}_\zeta \end{aligned}$$

4.2 Stellen Sie den Drall $\underline{L}^{(O)}$ des Propellers bezüglich O auf.

$$\begin{aligned} \underline{L}^{(O)} &= \Phi^{(O)} {}^I \underline{\omega}^P \\ &= A (\dot{\beta} \sin \alpha + \mu) \underline{e}_\xi + B \dot{\beta} \cos \alpha \underline{e}_\eta + B \dot{\alpha} \underline{e}_\zeta \end{aligned}$$

4.3 Geben Sie den Momentenvektor $\underline{M}^{(O)}$ an, der alle Momente auf den Propeller bezüglich Punkt O enthält.

$$\underline{M}^{(O)} = M_\xi \underline{e}_\xi + M_\eta \underline{e}_\eta + (-c_d \alpha - mg \ell \cos \alpha) \underline{e}_\zeta$$

Name: Matrikelnummer:

11

4.4 Werten Sie den Drehimpulssatz aus.

$$\underline{M}^{(O)} = \frac{I d\underline{L}^{(O)}}{dt} = \frac{M d\underline{L}^{(O)}}{dt} + I_{\underline{\omega}}^M \times \underline{L}^{(O)}$$

$$\frac{M d\underline{L}^{(O)}}{dt} = A \left(\ddot{\beta} \sin \alpha + \dot{\beta} \dot{\alpha} \cos \alpha + \underbrace{\dot{\mu}}_{\dot{\alpha}=0} \right) \underline{e}_{\xi} + B \left(\ddot{\beta} \cos \alpha - \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \alpha \right) \underline{e}_{\eta} + B \ddot{\alpha} \underline{e}_{\zeta}$$

$$\begin{aligned} I_{\underline{\omega}}^M \times \underline{L}^{(O)} &= \begin{pmatrix} \dot{\beta} \sin \alpha \\ \dot{\beta} \cos \alpha \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} \times \begin{pmatrix} A(\dot{\beta} \sin \alpha + \mu) \\ B \dot{\beta} \cos \alpha \\ B \dot{\alpha} \end{pmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ A \dot{\alpha} (\dot{\beta} \sin \alpha + \mu) - B \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \alpha \\ B \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha - A \dot{\beta} \cos \alpha (\dot{\beta} \sin \alpha + \mu) \end{pmatrix}_{\{\xi, \eta, \zeta\}} \end{aligned}$$

$$M_{\xi} = A \left(\ddot{\beta} \sin \alpha + \dot{\beta} \dot{\alpha} \cos \alpha \right) \quad (\text{entspricht Antriebsmoment})$$

$$\rightarrow M_{\xi} = A \left(-\hat{\beta} \omega^2 \sin \omega t + \hat{\beta} \omega \cos \omega t \dot{\alpha} \right)$$

$$M_{\eta} = B \left(\ddot{\beta} \cos \alpha - \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \alpha \right) + (A - B) \dot{\beta} \dot{\alpha} \sin \alpha + A \dot{\alpha} \mu$$

$$\rightarrow M_{\eta} = A \dot{\alpha} \mu - B \hat{\beta} \omega^2 \sin \omega t \cos \alpha + (A - 2B) \hat{\beta} \omega \cos \omega t \dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} -c_d \alpha - mg \ell \cos \alpha &= B \ddot{\alpha} + (B - A) \dot{\beta}^2 \sin \alpha \cos \alpha - A \mu \dot{\beta} \cos \alpha \\ \rightarrow 0 &= B \ddot{\alpha} + (B - A) \hat{\beta}^2 \omega^2 \cos^2 \omega t \sin \alpha \cos \alpha + c_d \alpha \\ &\quad + \left(mg \ell - A \mu \hat{\beta} \omega \cos \omega t \right) \cos \alpha \end{aligned}$$

Name: Matrikelnummer:

12

Für ein ähnliches System ist die Bewegungsgleichung durch

$$0 = B \ddot{\alpha} + (B - A) \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + c \alpha$$

gegeben, wobei $c, A, B > 0$.4.5 Linearisieren Sie die Gleichung um die Ruhelage $\alpha = 0$ und geben Sie eine Bedingung für A an, sodass das System schwingungsfähig ist.

$$\text{Linearisiert: } 0 = B \ddot{\alpha} + ((B - A) \omega^2 + c) \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Bedingung: } (B - A) \omega^2 + c &\stackrel{!}{>} 0 \\ &\rightarrow A < \frac{c}{\omega^2} + B \end{aligned}$$