

Bearbeitungsbögen für die Prüfung im Fach
Technische Mechanik III/IV

27. September 2023

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Platz nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

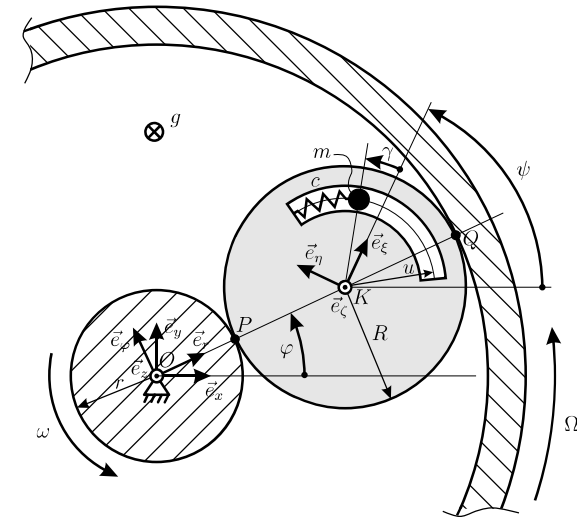
Die Bearbeitungsbögen sind von **1** bis **18** durchnummeriert. Prüfen Sie bitte auf Vollständigkeit!

Punkte:

Aufgabe 1: Aufgabe 2:

Aufgabe 3: Aufgabe 4:

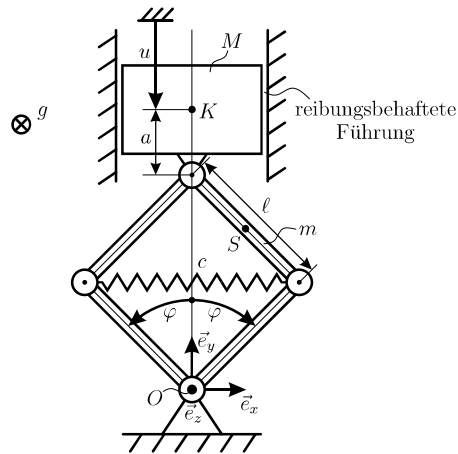
Aufgabe 1



In der folgenden Aufgabe soll die Dynamik eines neuen Fahrgeschäfts untersucht werden. Das Modell des Fahrgeschäfts besteht aus einem Innenring (Radius r , Mittelpunkt in O), einer Walze (Radius R , Mittelpunkt K), einem Außenring (Innenradius $r + 2R$, Mittelpunkt in O) und einem Massenpunkt (Masse m), welcher den Sitz des Fahrgastes abbildet. Die Walze rollt in den Kontaktpunkten P und Q auf dem Innenring und dem Außenring ab. Die Lage des Mittelpunkts K der Walze wird über den Winkel φ beschrieben und die Verdrehung der Walze gegenüber der $\vec{e}_x$ -Achse mit dem Winkel ψ . Der Massenpunkt kann in der Walze reibungsfrei entlang einer kreisförmigen Nut (Radius u) gleiten, wobei die Lage relativ zur Walze mit dem Winkel γ beschrieben wird. Entlang der kreisförmigen Nut ist eine Feder eingelegt, die den Massenpunkt mit der Walze koppelt. Die Feder ist in der Lage $\gamma = 0$ entspannt und die Federkraft ist mit der Federkonstanten c proportional zur Änderung der Federlänge (entlang der Nut). Die Drehung des Innenrings ist mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und die des Außenrings mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω vorgegeben, deren positive Richtungen der Skizze zu entnehmen sind. Zu Beginn sind $\varphi(t = 0) = 0$ und $\psi(t = 0) = 0$.

Das $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -System ist ein Inertialsystem. Das Zylinderkoordinatensystem $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ dient zur Beschreibung des Mittelpunkts K der Walze. Im Mittelpunkt K befindet sich der Ursprung des walzenfesten $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -Relativsystems.

Aufgabe 2

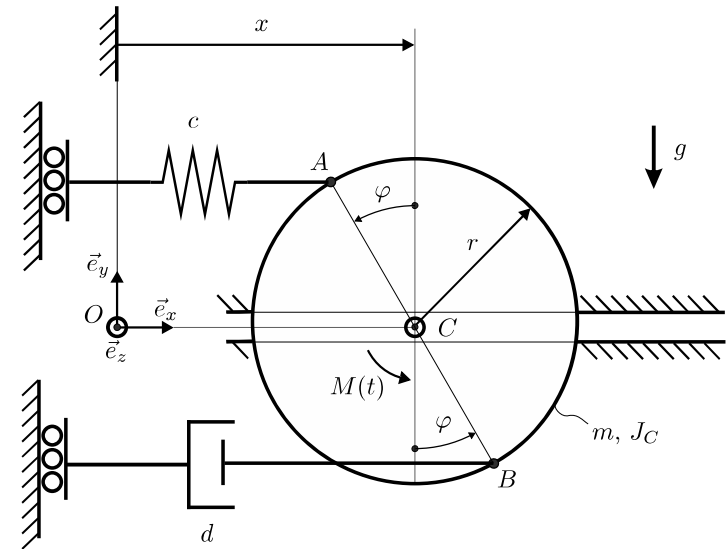


Im Folgenden wird ein Reibdämpfer untersucht, der aus einem Klotz (Masse M , Schwerpunkt im Punkt K) und vier homogenen, dünnen Stäben (jeweils Masse m , Länge ℓ) besteht. Die Stäbe sind in ihren Enden gelenkig verbunden, so dass sie einen viereckigen Rahmen bilden. Ein Gelenk des Rahmens ist im Punkt O mit der Umgebung verbunden. Das gegenüberliegende Gelenk ist mit dem Klotz verbunden, welcher zusätzlich durch eine reibungsbehaftete Führung in $\vec{e}_y$ -Richtung geführt wird.

Die Koordinate φ beschreibt den Winkel zwischen der $\vec{e}_y$ -Achse und den Stäben. Zwischen dem linken und rechten Gelenk des Rahmens ist eine Feder (Federkonstante c) angebracht, welche in der Lage $\varphi = \frac{\pi}{4}$ entspannt ist. Die Bewegung des Klotzes wird mit der Koordinate u beschrieben, wobei $u(\varphi = 0) = 0$ gilt.

Die Reibkraft in der Führung wird durch die konstante Kraft F_R modelliert, welche immer entgegen der Bewegungsrichtung des Klotzes wirkt. Sonstige Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen. Das raumfeste System $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ hat den Ursprung im Punkt O . Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative $\vec{e}_z$ -Richtung und ist daher für die betrachtete Aufgabenstellung zu vernachlässigen. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

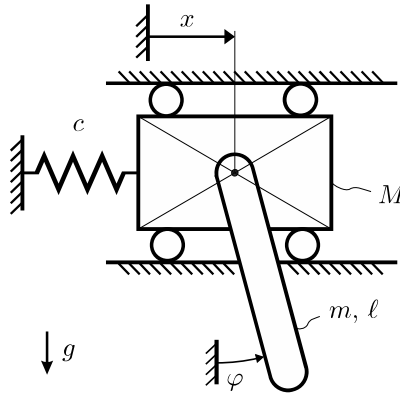
Aufgabe 3



Eine homogene Kreisscheibe (Masse m , Radius r und Massenträgheitsmoment J_C bzgl. des Mittelpunkts C) ist im Mittelpunkt C reibungsfrei drehbar gelagert. Der Lagerpunkt C kann sich zusätzlich in horizontale Richtung reibungsfrei entlang einer linearen Führung bewegen. Weiterhin wirkt das äußere Drehmoment $M(t)$ auf die Kreisscheibe. Der Punkt A wird mit der Umgebung über eine immer horizontal wirkende lineare Feder (Federkonstante c , entspannt bei $\varphi = \varphi_0$ und $x = x_0$) verbunden. Der Punkt B ist über einen immer horizontal wirkenden viskosen Dämpfer (Dämpfungskonstante d) mit der Umgebung verbunden.

Die Verdrehung der Kreisscheibe wird durch die Koordinate φ beschrieben und die Position des Lagerpunktes C durch die Koordinate x . Das $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -Bezugssystem ist raumfest. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negativer $\vec{e}_y$ -Richtung.

Aufgabe 4



Ein Wagen der Masse M , der über eine Feder (Federkonstante c , entspannt bei $x = 0$) mit der Umgebung verbunden ist, bewegt sich reibungsfrei in einer horizontalen linearen Führung. Am Mittelpunkt des Wagens ist ein homogener Stab (Masse m , Länge ℓ) angebracht. Die Erdbeschleunigung g wirkt in vertikaler Richtung.

Die Position des Wagenschwerpunktes wird durch die Koordinate x beschrieben, die Verdrehung des Stabes durch den Winkel φ . Das System ist reibungsfrei. Für kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ ergeben sich die linearisierten Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (M + m) \ddot{x} + cx + \frac{m\ell}{2} \ddot{\varphi} &= 0, \\ \frac{m\ell^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{mg\ell}{2} \varphi + \frac{m\ell}{2} \ddot{x} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Aufgabe 1

1.1 Geben Sie an wie viele Freiheitsgrade das System besitzt.

Das System besitzt 1 Freiheitsgrad.

1.2 Bestimmen Sie über die Rollbedingungen in den Kontaktpunkten P und Q den kinematischen Zusammenhang $\dot{\psi}(\omega, \Omega)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}_K(\omega, \Omega)$ des Mittelpunktes K im $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ -System in Abhängigkeit von ω und Ω .

$$\vec{v}_P^I = r\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v}_Q^{Ar} = (r + 2R)\Omega\vec{e}_\varphi$$

Kinematische Grundgleichung:

$$\vec{v}_K - R\dot{\psi}\vec{e}_\varphi \stackrel{!}{=} \vec{v}_P^I \quad (1)$$

$$\vec{v}_K + R\dot{\psi}\vec{e}_\varphi \stackrel{!}{=} \vec{v}_Q^{Ar} \quad (2)$$

(2)-(1):

$$2r\dot{\psi}\vec{e}_\varphi = [(r + 2R)\Omega - r\omega] \vec{e}_\varphi$$

$$\leadsto \dot{\psi} = \frac{(r + 2R)\Omega - r\omega}{2R}$$

(1)+(2):

$$2\vec{v}_K = [(r + 2R)\Omega + r\omega] \vec{e}_\varphi$$

$$\leadsto \vec{v}_K = \frac{(r + 2R)\Omega + r\omega}{2} \vec{e}_\varphi$$

1.3 Geben Sie im Sinne der Relativmechanik die Führungsbeschleunigungen $\vec{a}_{Führ,T}^{(t)}$, $\vec{a}_{Führ,R}^{(t)}$ und $\vec{a}_{Führ,R}^{(r)}$ sowie die Coriolisbeschleunigung $\vec{a}_{cor}$ und die Relativbeschleunigung $\vec{a}_{rel}$ des Massenpunktes in Abhängigkeit der gegebenen Größen an. Als Relativsystem ist das walzenfeste $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -System mit Ursprung in K zu verwenden.

$$\dot{\varphi} = 6 \frac{\vec{v}_{K,\varphi}}{r+R} = \frac{(r+2R)\Omega + r\omega}{2(r+R)}$$

$$\vec{a}_{F,T} = -(r+R)\dot{\varphi}^2 \vec{e}_r = \underbrace{\frac{[(r+2R)\Omega + r\omega]^2}{4(r+R)}}_{:=\vec{a}_{F,T}^{(r)}} \vec{e}_r \cdot (-1)$$

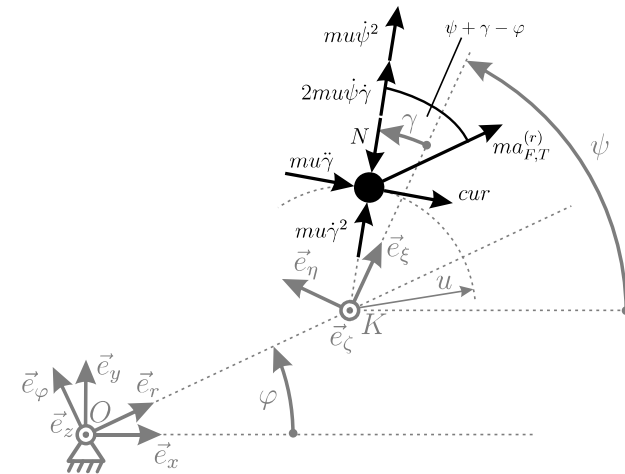
$$\vec{a}_{F,R}^{(t)} = \vec{0} \quad , \text{ da } \ddot{\psi} = 0$$

$$\vec{a}_{F,R}^{(r)} = -u\dot{\psi}^2 (\cos(\gamma)\vec{e}_\xi + \sin(\gamma)\vec{e}_\eta)$$

$$\vec{a}_{rel} = [u\dot{\gamma} \cos(\gamma) - u\dot{\gamma}^2 \sin(\gamma)] \vec{e}_\eta - [u\dot{\gamma} \sin(\gamma) + u\dot{\gamma}^2 \cos(\gamma)] \vec{e}_\xi$$

$$\vec{a}_{cor} = -2\dot{\psi}u\dot{\gamma} (\cos(\gamma)\vec{e}_\xi + \sin(\gamma)\vec{e}_\eta)$$

1.4 Schneiden Sie den Massenpunkt frei und tragen Sie alle Kräfte im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein. Nutzen Sie die Hilfslinien, um die Richtungen klar erkennbar zu machen und geben Sie jeweils einen Ausdruck für den Betrag an.



1.5 Geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes an.

$$mu\dot{\gamma} + cu\gamma + m\vec{a}_{F,T}^{(r)} \sin(\psi + \gamma - \varphi) = 0$$

1.6 Zur Begrenzung der maximal auftretenden Beschleunigungen des Fahrgastes im Fahrgeschäft wird im Folgenden der Sonderfall einer konstanten Lage $\gamma = \dot{\gamma} = \ddot{\gamma} = 0$ mit den Parametern $r = 2R$ und $\omega = 4\Omega$ betrachtet. Welche Bedingung muss hierbei für die Winkelgeschwindigkeit Ω gelten, damit die Beschleunigung des Fahrgastes den maximalen Betrag a_{max} im gesamten Betrieb (für beliebige Winkel ψ und φ) nicht überschreitet?

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= \frac{4R\Omega - 8R\Omega}{2R} = -2\Omega \\ \dot{\varphi} &= \frac{4R\Omega + 8R\Omega}{6R} = 2\Omega\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \dot{\psi} \neq \dot{\varphi} \rightsquigarrow$ maximale Beschleunigung bei $\psi = \varphi$

$$u\dot{\psi}^2 + \overset{!}{\vec{a}_{FT}^{(r)}} < a_{max}$$

$$\Leftrightarrow u4\Omega^2 + \frac{(12R\Omega)^2}{12R} < a_{max}$$

$$\Leftrightarrow (12R + 4u)\Omega^2 < a_{max}$$

$$-\sqrt{\frac{a_{max}}{12R + 4u}} < \Omega < \sqrt{\frac{a_{max}}{12R + 4u}}$$

Aufgabe 2

2.1 Geben Sie die kinematischen Beziehungen $u(\varphi)$ und $\dot{u}(\varphi, \dot{\varphi})$ an.

$$\begin{aligned}u(\varphi) &= 2l - 2l \cos(\varphi) \\ \dot{u}(\varphi, \dot{\varphi}) &= 2l \sin(\varphi) \dot{\varphi}\end{aligned}$$

2.2 Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}_{OS}$ vom Punkt O zum Schwerpunkt S des rechten oberen Stabes in Abhängigkeit von φ . Bestimmen Sie ebenfalls die Geschwindigkeit $\vec{v}_S$ des Schwerpunktes S in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{OS} &= \frac{l}{2} \sin(\varphi) \vec{e}_x + \frac{3}{2} l \cos(\varphi) \vec{e}_y \\ \vec{v}_S &= \frac{l}{2} \cos(\varphi) \dot{\varphi} \vec{e}_x - \frac{3}{2} l \sin(\varphi) \dot{\varphi} \vec{e}_y\end{aligned}$$

2.3 Bestimmen Sie die kinetische Energie $T(\varphi, \dot{\varphi})$ des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned}
 T_{Stab,U} &= \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m l^2 \dot{\varphi}^2 \\
 T_{Stab,O} &= \frac{1}{2} m \vec{v}_S^2 + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 \\
 &= \frac{1}{2} m l^2 \left[\frac{1}{4} \cos^2(\varphi) + \frac{9}{4} \sin^2(\varphi) \right] \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \dot{\varphi}^2 \\
 T_M &= \frac{1}{2} M \dot{u}^2 = \frac{1}{2} M 4 l^2 \sin^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 \\
 T &= 2 T_{Stab,U} + 2 T_{Stab,O} + T_M \\
 &= \left[\frac{1}{4} m l^2 \left(\cos^2(\varphi) + 9 \sin^2(\varphi) + \frac{5}{3} \right) + 2 M l^2 \sin^2(\varphi) \right] \dot{\varphi}^2
 \end{aligned}$$

2.4 Geben Sie die gesamte Arbeit W an, welche die Reibkraft und die Federkraft bei einer Bewegung von $\varphi = \frac{\pi}{4}$ bis zu einem beliebigen Winkel $\varphi \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ am System verrichten. Während der Bewegung soll $\dot{\varphi} \geq 0$ gelten.

$$d\vec{r}_{OK} = -2l \sin(\varphi) d\varphi \vec{e}_y \quad \vec{F}_R = F_R \vec{e}_y \quad \text{f. Annahmen}$$

$$W_{FR} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} -F_R 2l \sin(\varphi) d\varphi = 2F_R l (\cos(\varphi) - \cos(\frac{\pi}{4}))$$

$$\begin{aligned}
 W_{FF} &= -(V_1 - V_0) \\
 &= -\frac{1}{2} c \left[\left(2l \sin(\varphi) - 2l \sin(\frac{\pi}{4}) \right)^2 - 0 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} c l^2 \left(2 \sin(\varphi) - \sqrt{2} \right)^2 \quad \text{:alternativ Berechnung über Arbeitsintegral}
 \end{aligned}$$

$$W = W_{FR} + W_{FF}$$

2.5 Nach einem Stoß besitzt der Klotz bei $\varphi = \frac{\pi}{4}$ die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{u} = v_0$. Wie groß muss die Reibkraft F_R gewählt werden, damit das System bei der anschließenden Bewegung den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{3}$ nicht überschreitet? Nutzen Sie den Arbeitssatz.

$$v_0 = 2l \sin(\frac{\pi}{4}) \dot{\varphi}_0 \rightsquigarrow \dot{\varphi}_0 = \frac{v_0}{\sqrt{2}l}$$

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \left[\frac{1}{4} m l^2 \left(\frac{2}{4} + 9 \cdot \frac{2}{4} + \frac{5}{3} \right) + 2 M l^2 \frac{2}{4} \right] \frac{v_0^2}{2l^2} \\
 &= \left[\frac{5}{3} m l^2 + M l^2 \right] \frac{v_0^2}{2l^2}
 \end{aligned}$$

$$T_1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow W = T_1 - T_0$$

$$\Leftrightarrow 2F_R l \underbrace{\left(\cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4}) \right)}_{=\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} c l^2 \underbrace{\left(2 \sin(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{2} \right)^2}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} m + M \right) v_0^2$$

$$\Leftrightarrow F_R = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{5}{3} m + M \right) v_0^2 - \frac{1}{2} c l^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{\frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)}$$

$$\rightsquigarrow F_R > \frac{\left(\frac{5}{3} m + M \right) v_0^2 - c l^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{\sqrt{2} - 1}$$

Aufgabe 3

3.1 Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{r}_{OC}$, $\vec{r}_{OA}$ und $\vec{r}_{OB}$ vom Punkt O zu den Punkten C , A und B in Abhängigkeit von x und φ im $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -Bezugssystem.

$$\vec{r}_{OC} = x\vec{e}_x$$

$$\vec{r}_{OA} = [x - r \sin(\varphi)] \vec{e}_x + r \cos(\varphi) \vec{e}_y$$

$$\vec{r}_{OB} = [x + r \sin(\varphi)] \vec{e}_x - r \cos(\varphi) \vec{e}_y$$

3.2 Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{v}_C$ und $\vec{v}_B$ der Punkte C und B in Abhängigkeit der Koordinaten x , φ und deren Zeitableitungen im $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -Bezugssystem.

$$\vec{v}_C = \dot{x}\vec{e}_x$$

$$\vec{v}_B = [\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}] \vec{e}_x + r \sin(\varphi)\dot{\varphi}\vec{e}_y$$

3.3 Bestimmen Sie die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems in Abhängigkeit der Koordinaten x , φ und deren Zeitableitungen.

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2$$

$$V = \frac{1}{2}c[(x - r \sin(\varphi)) - (x_0 - r \sin(\varphi_0))]^2$$

3.4 Stellen Sie die virtuelle Arbeit δW der potentiallosen Kräften und Momente auf und bestimmen Sie die generalisierten Kräfte Q_x und Q_φ zu den generalisierten Koordinaten x und φ .

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F}_d \cdot \delta \vec{r}_{OB} + M(t) \delta \varphi \\ &= -d[\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}] \delta [x + r \sin(\varphi)] + M(t) \delta \varphi \\ &= \underbrace{-d[\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}] \delta x}_{=Q_x} + \underbrace{[M(t) - d(\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}) r \cos(\varphi)] \delta \varphi}_{=Q_\varphi} \end{aligned}$$

3.5 Leiten Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen des Systems für die generalisierten Koordinaten x und φ her.

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_C\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}c[(x - r \sin(\varphi)) - (x_0 - r \sin(\varphi_0))]^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot J_C \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_C \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -c[x - r \sin(\varphi) - x_0 + r \sin(\varphi_0)](-r \cos(\varphi))$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -c[x - r \sin(\varphi) - x_0 + r \sin(\varphi_0)]\end{aligned}$$

$$\text{für } x: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x$$

$$m\ddot{x} + c[x - r \sin(\varphi) - x_0 + r \sin(\varphi_0)] = -d[\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}]$$

$$\text{für } \varphi: \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

$$\begin{aligned}J_C \ddot{\varphi} + c[x - r \sin(\varphi) - x_0 + r \sin(\varphi_0)](-r \cos(\varphi)) \\ = M(t) - d[\dot{x} + r \cos(\varphi)\dot{\varphi}]r \cos(\varphi)\end{aligned}$$

3.6 Linearisieren die Bewegungsgleichungen des Systems für kleine Bewegungen $|x| \ll 1$ und $|\varphi| \ll 1$. Außerdem gelten $x_0 = 0$ und $\varphi_0 = 0$.

$$\text{für } x: \quad m\ddot{x} + cx - cr\varphi = -d\dot{x} - dr\dot{\varphi}$$

$$\text{für } \varphi: \quad J_C \ddot{\varphi} + (cx - cr\varphi)(-r) = M(t) - d\dot{x}r - dr^2\dot{\varphi}$$

Aufgabe 4

4.1 Geben Sie die Gleichungen (1) aus der Aufgabenstellung in Matrixform $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$ mit dem Vektor $\mathbf{q} = [x, \varphi]^\top$ der Koordinaten an.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (M+m) & \frac{m}{2}\ell \\ \frac{m}{2}\ell & \frac{m}{3}\ell^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}g\ell \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4.2 Stellen Sie die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der Eigenkreisfrequenzen auf. Die resultierende Gleichung soll nicht gelöst werden.

Ansatz:

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\omega^2 \mathbf{Q}e^{i\omega t}$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}-\omega^2 \begin{bmatrix} (M+m) & \frac{m}{2}\ell \\ \frac{m}{2}\ell & \frac{m}{3}\ell^2 \end{bmatrix} \mathbf{Q}e^{i\omega t} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & \frac{m}{2}g\ell \end{bmatrix} \mathbf{Q}e^{i\omega t} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} c - \omega^2(M+m) & -\frac{m}{2}\ell\omega \\ -\frac{m}{2}\ell\omega & \frac{m}{2}g\ell - \frac{m}{3}\ell^2\omega^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{Q}e^{i\omega t} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{A}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow [c - \omega^2(M+m)] \left[\frac{m}{2}g\ell - \frac{m}{3}\ell^2\omega^2 \right] - \frac{m^2}{4}\ell^2\omega^2 = 0$$

Für die weiteren Teilaufgaben sind die folgenden Zusammenhänge der Systemparameter gegeben:

$$\begin{aligned} M &= 6m, \\ c &= \frac{9g}{2\ell}m. \end{aligned} \quad (*)$$

4.3 Berechnen Sie die Eigenkreisfrequenzen des linearisierten Systems mit den in (*) gegebenen Parametern.

aus (4.2):

$$\left(\frac{M+m}{3}m\ell^2 - \frac{m^2\ell^2}{4}\right)\omega^4 - \left(\frac{m\ell^2c}{3} + \frac{M+m}{2}mg\ell\right)\omega^2 + \frac{mg}{2}\ell c = 0$$

mit Parameter in (*):

$$\begin{aligned} &\left(\frac{7}{3}m^2\ell^2 - \frac{1}{4}m^2\ell^2\right)\omega^4 - \left(\frac{m\ell^2}{3}\frac{9g}{2\ell}m + \frac{7}{2}m^2g\ell\right)\omega^2 + \frac{mg}{2}\ell\frac{9g}{2\ell}m = 0 \\ \Rightarrow &\frac{25}{12}\ell^2\omega^4 - 5g\ell\omega^2 + \frac{9}{4}g^2 = 0 \\ \Rightarrow &\omega_1^2 = \frac{3g}{5\ell} \quad \omega_2^2 = \frac{9g}{5\ell} \end{aligned}$$

4.4 Bestimmen Sie die Eigenschwingungsformen und skizzieren Sie diese in den vorbereiteten Diagrammen.

with (*) in (4.2):

$$\begin{bmatrix} \frac{9}{2}m\ell^2 - 7m\omega^2 & -\frac{m\ell}{2}\omega^2 \\ -\frac{m\ell}{2}\omega^2 & \frac{mg\ell}{2} - \frac{\omega^2}{3}ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

from (2):

$$-\frac{m}{2}l\omega^2 Q_1 + \left(\frac{mg}{2}l - \frac{\omega^2}{3}l^2\right)Q_2 = 0$$

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{\frac{mg}{2}l - \frac{\omega^2}{3}ml^2}{\frac{m}{2}l\omega^2} = \frac{3g - 2\omega^2 l}{3\omega^2}$$

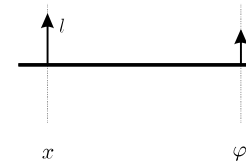
with $\omega_1^2 = \frac{3g}{5\ell}$:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = l$$

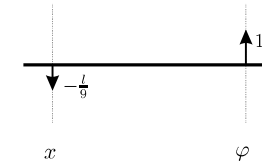
with $\omega_2^2 = \frac{9g}{5\ell}$:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{l}{9}$$

Für ω_1 :



Für ω_2 :



Im Folgenden dreht sich der Stab mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$. Es gilt die Anfangsbedingung $\varphi(t = 0) = 0$. Somit wird das System durch die Bewegungsgleichung

$$(M + m)\ddot{x} + cx = \frac{m\ell}{2}\Omega^2 \sin(\varphi)$$

beschrieben.

- 4.5 Bestimmen Sie eine partikuläre Lösung für die Zwangsschwingung. Es gelte der Sonderfall, dass die Anregungsfrequenz nicht der exakten Resonanzfrequenz des Systems entspricht.

$$x_P = p \sin(\Omega t) \quad , \text{da keine Dämpfung}$$

$$\ddot{x}_P = -p\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

Einsetzen:

$$-p\Omega^2(M + m) \sin(\Omega t) + cp \sin(\Omega t) = \frac{m\ell}{2}\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

Koeffizientenvergleich:

$$p(-\Omega^2(M + m) + c) = \frac{m\ell}{2}\Omega^2$$

$$\Rightarrow p = \frac{m\ell}{2} \frac{\Omega^2}{c - \Omega^2(M + m)}$$

- 4.6 Skizzieren Sie den Verlauf der Schwingungsamplitude der partikulären Lösung in Abhängigkeit von Ω und markieren Sie in der Skizze die Resonanzfrequenz.

