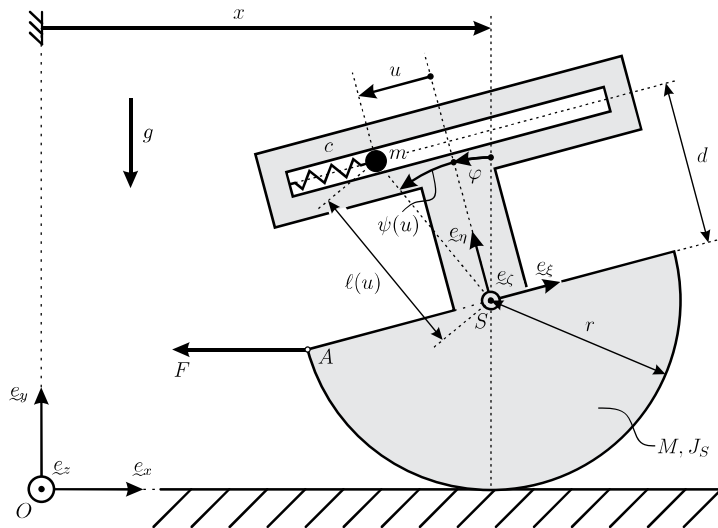


Aufgabe 1



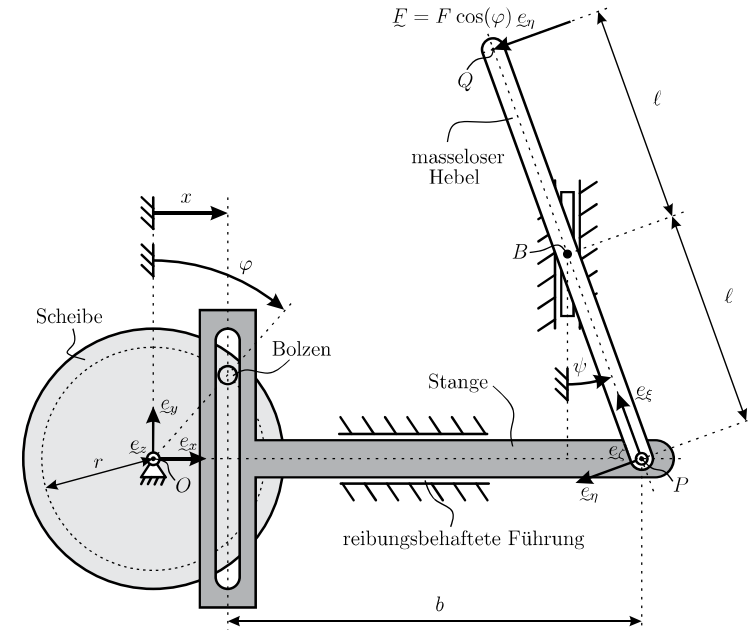
Betrachtet wird ein System bestehend aus einem starren Körper (Masse M , Massenträgheitsmoment J_S bezüglich Schwerpunkt S) und einem Massenpunkt (Masse m). Der starre Körper rollt über eine Rundung (Radius r) auf einer horizontalen Unterlage und wird im Punkt A durch eine horizontal wirkende Kraft F belastet. Die Verdrehung des Körpers gegenüber der vertikalen Achse wird durch die Koordinate φ beschrieben und die horizontale Position seines Schwerpunktes S durch die Koordinate x .

In dem starren Körper ist im Abstand d zum Schwerpunkt S eine Nut eingefräst, in der sich der Massenpunkt reibungsfrei bewegen kann. Die Verschiebung des Massenpunktes relativ zum starren Körper wird durch die Koordinate u beschrieben. Zwischen dem Massenpunkt und dem starren Körper befindet sich eine Feder (Federkonstante c), welche für $u = 0$ entspannt ist.

Das $\{e_x, e_y, e_z\}$ -System ist ein Inertialsystem. Im Schwerpunkt S des Starrkörpers befindet sich der Ursprung des körperfesten $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ -Relativsystems. Die Erdbeschleunigung wirkt in negative e_y -Richtung.

Hinweis: Um die Beschreibung im Sinne der Relativmechanik zu vereinfachen, sind die Beziehungen $\psi(u) = \arctan\left(\frac{u}{d}\right)$ und $\ell(u) = \sqrt{u^2 + d^2}$ als gegeben zu betrachten. Die expliziten Ausdrücke in Abhängigkeit von u sollen in den Rechnungen nicht eingesetzt werden.

Aufgabe 2



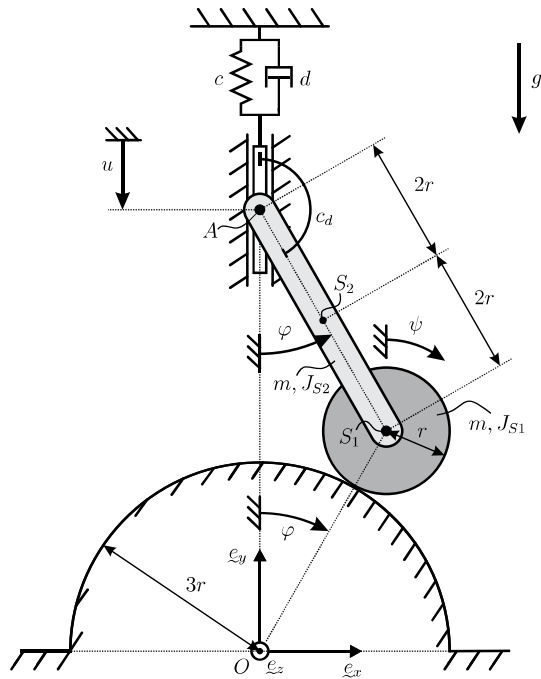
Im Folgenden wird ein Getriebe untersucht, welches die oszillatorische Bewegung eines masselosen Hebels (Länge 2ℓ) über eine Stange (Masse M) in eine rein rotatorische Bewegung einer Scheibe (Masse m , Massenträgheitsmoment $J_O = \frac{1}{2}mr^2$ bezüglich des Punktes O) umwandeln soll.

Der masselose Hebel wird im Punkt B vertikal geführt. Die Verdrehung des Hebels gegenüber der festen Umgebung wird mit dem Winkel ψ beschrieben. Der Hebel wird an einem Ende im Punkt Q durch eine immer senkrecht zum Hebel wirkende Kraft $\vec{F} = F \cos(\varphi) \vec{e}_\eta$ belastet. Am anderen Ende ist der Hebel im Punkt P gelenkig mit der Stange verbunden. Im Punkt P befindet sich ebenfalls der Ursprung des hebefesten Relativsystems $\{e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$. Die Stange wird in horizontaler Richtung geführt, wobei ihre Verschiebung durch die Koordinate x beschrieben wird. Am linken Ende der Stange ist eine Nut eingefräst. In dieser Nut wird ein mit der Scheibe fest verbundener Bolzen reibungsfrei geführt, sodass die horizontale Bewegung der Stange mit der Drehung der Scheibe gekoppelt ist. Die Drehung der Scheibe um den Lagerpunkt O wird durch den Winkel φ beschrieben.

Die Reibkraft in der horizontalen Führung der Stange wird durch die konstante Kraft F_R modelliert, welche immer entgegen der Bewegungsrichtung der Stange wirkt. Sonstige Reibungseinflüsse und der Einfluss der Gewichtskräfte werden vernachlässigt. Das raumfeste System $\{e_x, e_y, e_z\}$ hat den Ursprung im Punkt O . Es gelten die Beziehungen $x(\varphi = 0) = 0$, $\psi(\varphi = 0) = 0$ und $\frac{\varphi}{\psi} \ll 1$. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Hinweise: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

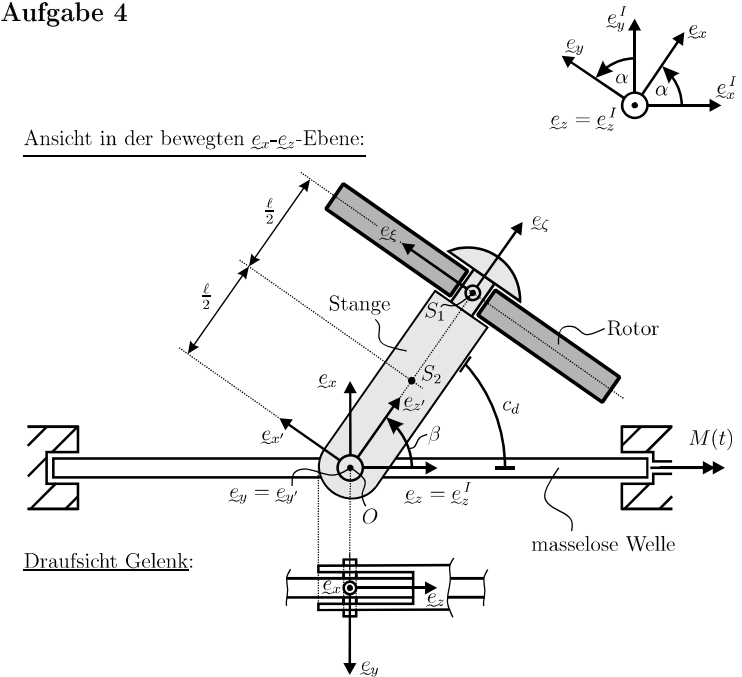
Aufgabe 3



Eine homogene Walze (Masse m , Radius r , Massenträgheitsmoment $J_{S1} = \frac{1}{2}mr^2$ bezüglich Schwerpunkt S_1) rollt auf einer kreisförmigen Unterlage (Radius $3r$) ab. Im Schwerpunkt S_1 der Walze wird der Endpunkt eines Stabes (Masse m , Länge $4r$, Massenträgheitsmoment $J_{S2} = \frac{4}{3}mr^2$ bezüglich Schwerpunkt S_2) drehbar gelagert. Der andere Endpunkt des Stabes wird im Punkt A vertikal geführt, wobei sich der Stab gegenüber der Führung verdrehen kann. Zwischen der Führung und dem Stab befindet sich eine Drehfeder mit der Federkonstanten c_d . Weiterhin ist eine Feder mit der Federkonstanten c und ein viskoser Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten d in vertikaler Richtung zwischen Punkt A und der festen Umgebung angebracht.

Die Verdrehung der Walze wird durch den Winkel ψ beschrieben, die Verdrehung des Stabes durch den Winkel φ . Die vertikale Verschiebung des Punktes A wird mithilfe der Koordinate u beschrieben. Beide Federn sind für $u = \varphi = 0$ spannungslos. Die Erdbeschleunigung wirkt in negative $\underline{e}_y$ -Richtung.

Aufgabe 4



Ein rotordynamisches System besteht aus einer masselosen Welle, einer Stange (Masse m , Länge ℓ) und einem dünnen Rotor (Masse m , Radius r).

Die masselose Welle wird über ein Antriebsmoment $M(t)$ angetrieben. Die Verdrehung der Welle gegenüber dem raumfesten $\{\underline{e}_x^I, \underline{e}_y^I, \underline{e}_z^I\}$ -System wird durch den Winkel α beschrieben. Die masselose Welle ist im Punkt O über ein Gelenk mit der Stange verbunden. Das Gelenk ermöglicht eine durch den Winkel β beschriebene Verdrehung der Stange bezüglich dem wellenfesten $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -System um die $\underline{e}_y$ -Achse. Zwischen einem Ende der Stange und der masselosen Welle wirkt eine Drehfeder mit der Federkonstanten c_d , die für $\beta = 0$ entspannt ist. Am anderen Ende der Stange ist ein Rotor drehbar gelagert. Der Rotor rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω relativ zum stangenfesten $\{\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'}\}$ -System um die $\underline{e}_{z'}$ -Achse. Das rotorfeste $\{\underline{e}_{x''}, \underline{e}_{y''}, \underline{e}_{z''}\}$ -System besitzt den Ursprung im Schwerpunkt S_1 des Rotors. Die Systeme $\{\underline{e}_x^I, \underline{e}_y^I, \underline{e}_z^I\}$, $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ und $\{\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'}\}$ besitzen einen gemeinsamen Ursprung im Punkt O.

Die Trägheitsmatrizen des Rotors (R) bezüglich seines Schwerpunktes S_1 und der Stange (St) bezüglich ihres Schwerpunktes S_2 sind durch

$$\Phi_R^{(S1)} = \frac{mr^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\underline{e}_{x''}, \underline{e}_{y''}, \underline{e}_{z''}} \quad \Phi_{St}^{(S2)} = \frac{m\ell^2}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'}}$$

gegeben. Reibungseinflüsse und Einflüsse der Gewichtskraft werden vernachlässigt. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Bearbeitungsbögen für die Prüfung im Fach

Technische Mechanik III/IV

10. April 2021

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Platz nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

Die Bearbeitungsbögen sind von **1** bis **12** durchnummeriert. Prüfen Sie bitte auf Vollständigkeit!

Punkte:

Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

Name:

Matrikelnummer:

1

Aufgabe 1

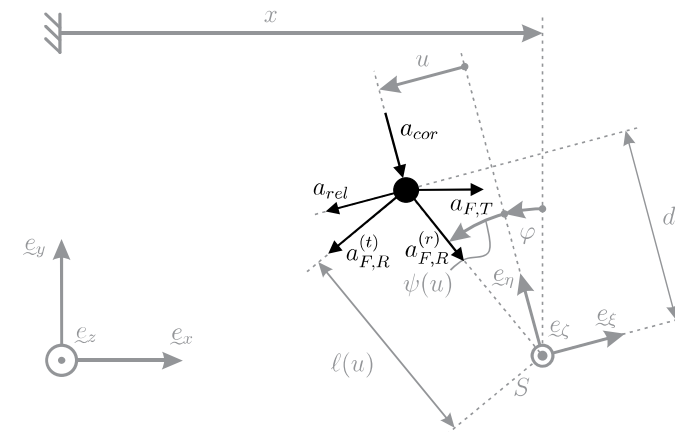
- 1.1 Geben Sie die kinematischen Zusammenhänge $\dot{x}(\dot{\varphi})$ und $\ddot{x}(\ddot{\varphi})$ an. Geben Sie zusätzlich $x(\varphi)$ an, wenn $x(\varphi = 0) = 0$ gilt.

$$\dot{x} = -r\dot{\varphi} \rightarrow x = -r\varphi + C$$

$$x(\varphi = 0) = C \stackrel{!}{=} 0 \rightarrow x = -r\varphi$$

$$\ddot{x} = -r\ddot{\varphi}$$

- 1.2 Tragen Sie in die gegebene Skizze alle Beschleunigungsanteile des Massenpunktes im Sinne der Relativmechanik ein. Geben Sie zusätzlich die Beträge der Beschleunigungsanteile an. Als Relativsystem ist das körperfeste $\{\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\zeta\}$ -System mit Ursprung in S zu verwenden.



$$a_{rel} = \ddot{u}$$

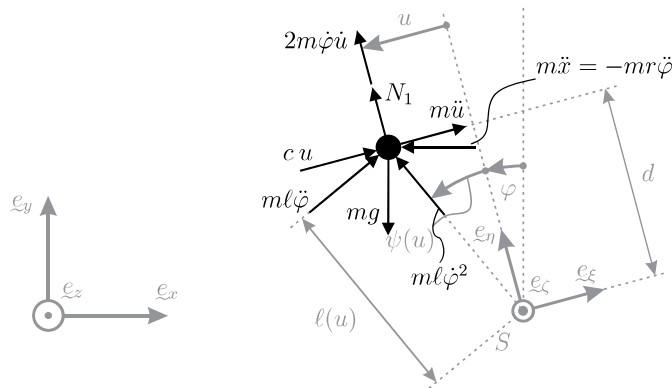
$$a_{F,T} = \ddot{x} = -r\ddot{\varphi}$$

$$a_{F,R}^{(r)} = \ell(u)\dot{\varphi}^2$$

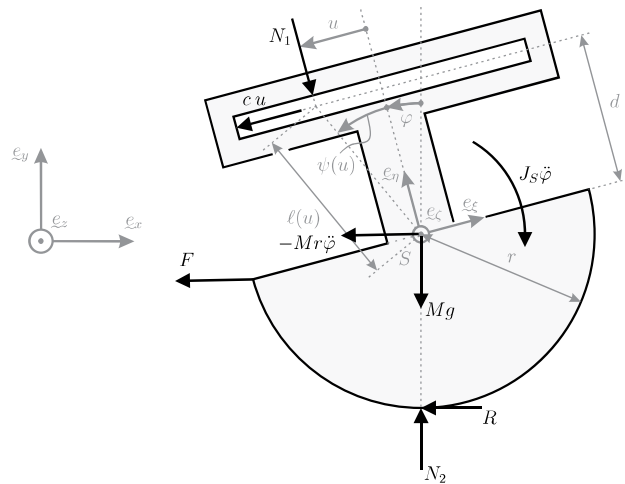
$$a_{F,R}^{(t)} = \ell(u)\ddot{\varphi}$$

$$a_{cor} = 2\dot{\varphi}\dot{u}$$

1.3 Schneiden Sie den Massenpunkt frei und tragen Sie alle Kräfte im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein.



1.4 Schneiden Sie den starren Körper frei und tragen Sie alle Kräfte und Momente im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein.



1.5 Stellen Sie die Kräfte- und Momentenbilanzen für den starren Körper auf.

$$x: +Mr\ddot{\varphi} - R - F - cu \cos \varphi + N_1 \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

$$y: N_2 - Mg - N_1 \cos \varphi - cu \sin \varphi = 0 \quad (2)$$

$$\hat{S}: -J_S\ddot{\varphi} - Rr - Fr \sin \varphi + N_1 u + cud = 0 \quad (3)$$

1.6 Stellen Sie die Kräftebilanzen für den Massenpunkt auf.

$$\xi: m\ddot{u} + cu + m\ell\ddot{\varphi} \cos \psi - m\ell\dot{\varphi}^2 \sin \psi - mg \sin \varphi + mr\dot{\varphi} \cos \varphi = 0 \quad (4)$$

$$\eta: N_1 + 2m\dot{\varphi}\dot{u} + m\ell\ddot{\varphi} \sin \psi + m\ell\dot{\varphi}^2 \cos \psi - mg \cos \varphi - mr\dot{\varphi} \sin \varphi = 0 \quad (5)$$

Im Folgenden soll der starre Körper bei $\varphi = 0$ in Ruhe gehalten werden.

1.7 Welche Bedingung $F(u)$ muss die Kraft F erfüllen, damit der starre Körper bei $\varphi = 0$ in Ruhe bleibt? Geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes für diesen Sonderfall an.

$$(5): N_1 = mg$$

$$\text{in (2): } N_2 = Mg + mg$$

$$\text{in (1): } R = -F - cu$$

$$\text{in (3): } Fr + cur + mgu + cud = 0$$

$$\rightarrow F(u) = -cu - \frac{u(mg + cd)}{r} = -\left(c + \frac{mg + cd}{r}\right)u$$

$$\text{in (4): } m\ddot{u} + cu = 0 \quad \text{Bewgl. in } u \text{ (MP)}$$

Aufgabe 2

2.1 Bestimmen Sie die Zusammenhänge $x(\varphi)$ und $\psi(\varphi)$. Geben Sie die differentielle Verschiebung dx und die differentielle Verdrehung $d\psi$ in Abhängigkeit von φ und $d\varphi$ an.

$$x(\varphi) = r \sin \varphi$$

$$x(\varphi) = \ell \sin \psi$$

$$\rightarrow \psi = \sin^{-1} \left(\frac{r}{\ell} \sin \varphi \right)$$

$$dx = r \cos(\varphi) d\varphi$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} d\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}} \frac{r}{\ell} \cos(\varphi) d\varphi$$

2.2 Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$\dot{x} = r \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} M r^2 \cos^2(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} M r^2 \cos^2(\varphi) + \frac{1}{4} m r^2 \right) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

2.3 Bestimmen Sie den Ortsvektor $\underline{r}_Q$ vom Punkt O zum Punkt Q bezüglich des $\{\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z\}$ -Systems. Bestimmen Sie weiterhin den differentiellen Verschiebungsvektor $d\underline{r}_Q$ bezüglich der Einheitsvektoren $\{\underline{e}_\xi, \underline{e}_\eta, \underline{e}_\zeta\}$ in Abhängigkeit von φ und $d\varphi$.

Hinweis: Für eine möglichst einfache Rechnung bestimmen Sie den differentiellen Verschiebungsvektor zuerst in Abhängigkeit von ψ und $d\psi$. Verwenden Sie danach die Ergebnisse aus Teilaufgabe 2.1.

$$\begin{aligned} \underline{r}_Q &= (b + x(\varphi) - 2\ell \sin \psi) \underline{e}_x + 2\ell \cos \psi \underline{e}_y \\ &= (b - \ell \sin \psi) \underline{e}_x + 2\ell \cos \psi \underline{e}_y \end{aligned}$$

$$\underline{e}_x = -\sin \psi \underline{e}_\xi - \cos \psi \underline{e}_\eta$$

$$\underline{e}_y = \cos \psi \underline{e}_\xi - \sin \psi \underline{e}_\eta$$

$$\begin{aligned} d\underline{r}_Q &= -\ell \cos \psi d\psi \underline{e}_x - 2\ell \sin \psi d\psi \underline{e}_y \\ &= (\ell \sin \psi \cos \psi - 2\ell \sin \psi \cos \psi) d\psi \underline{e}_\xi + (\ell \cos^2 \psi + 2\ell \sin^2 \psi) d\psi \underline{e}_\eta \\ &= -\ell \frac{r}{\ell} \sin \varphi \underbrace{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}}_{=\cos \psi} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}} \frac{r}{\ell} \cos \varphi d\varphi}_{=d\psi} \underline{e}_\xi + \ell(1 + \sin^2 \psi) d\psi \underline{e}_\eta \\ &= -\frac{r^2}{\ell} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \underline{e}_\xi + r \cos \varphi \frac{1 + \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi \underline{e}_\eta \end{aligned}$$

Im Folgenden ist der für kleine Verhältnisse $\frac{r}{\ell} \ll 1$ linearisierte differentielle Verschiebungsvektor

$$d\underline{r}_Q = -\frac{r^2}{\ell} \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \underline{e}_\xi + r \cos(\varphi) d\varphi \underline{e}_\eta$$

gegeben. Nutzen Sie in den folgenden Teilaufgaben dieses Zwischenergebnis und nicht ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

2.4 Bestimmen Sie die Arbeit W der eingepägten Kraft F und der Reibkraft F_R , die am System bei einer Bewegung von $\varphi = 0$ bis zu einem beliebigen Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ verrichtet wird. Während der Bewegung soll $\dot{\varphi} \geq 0$ gelten.

$$W_R = -F_R \cdot x(\varphi) = -F_R r \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} W_F &= \int_{\underline{r}_{Q0}}^{\underline{r}_{Q1}} \underline{F} \cdot d\underline{r}_Q \\ &= \int_0^\varphi F \cdot \cos(\tilde{\varphi}) \cdot r \cos(\tilde{\varphi}) d\tilde{\varphi} \\ &= F r \left[\frac{1}{2} \tilde{\varphi} + \frac{1}{4} \sin(2\tilde{\varphi}) \right]_0^\varphi \\ &= F r \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W = W_F + W_R = F r \left[\frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right] - F_R r \sin \varphi$$

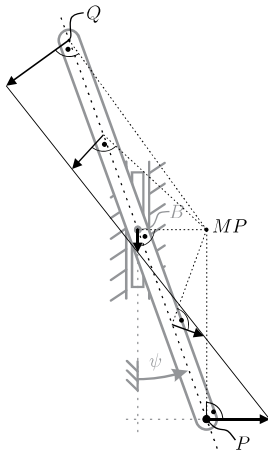
2.5 Das System befindet sich bei $\varphi = \dot{\varphi} = 0$ in der Anfangslage. Die Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ soll mit einer Geschwindigkeit $\dot{\varphi} > 0$ erreicht werden, damit das System den Totpunkt überwinden kann. Wie groß muss dafür die am Hebel angreifende Kraft F sein? Nutzen Sie den Arbeitssatz.

$$T_0 = 0 \quad T_1 = T\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2$$

$$T_1 - T_0 = W\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}_1^2 = W\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\dot{\varphi}_1^2 \stackrel{!}{>} 0 \\ \Rightarrow W\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{4}Fr\pi - F_R r > 0 \\ \Rightarrow F > \frac{4F_R}{\pi}$$

2.6 Zeichnen Sie in die gegebene Skizze die Lage des Momentanpols MP des Hebels ein und skizzieren Sie qualitativ die Geschwindigkeitsverteilung entlang der Strecke $\overline{PQ}$. Zum dargestellten Zeitpunkt soll $\dot{\psi} > 0$ gelten.



Aufgabe 3

3.1 Bestimmen Sie die Zusammenhänge $u(\varphi)$ und $\dot{\psi}(\dot{\varphi})$. Es gilt $u(\varphi = 0) = 0$.

$$u(\varphi) = 8r(1 - \cos \varphi) \\ r\dot{\psi} \stackrel{!}{=} 4r\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi} = 4\dot{\varphi}$$

3.2 Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\underline{r}_{S1}$ und $\underline{r}_{S2}$ vom Ursprung O zum Schwerpunkt S_1 beziehungsweise S_2 in Abhängigkeit von φ . Bestimmen Sie ebenfalls die Geschwindigkeiten $\underline{v}_{S1}$ und $\underline{v}_{S2}$ der Schwerpunkte.

$$\underline{r}_{S1} = 4r \sin \varphi \underline{e}_x + 4r \cos \varphi \underline{e}_y \\ \underline{r}_{S2} = 2r \sin \varphi \underline{e}_x + 6r \cos \varphi \underline{e}_y \\ \underline{v}_{S1} = 4r\dot{\varphi} \cos \varphi \underline{e}_x - 4r\dot{\varphi} \sin \varphi \underline{e}_y \\ \underline{v}_{S2} = 2r\dot{\varphi} \cos \varphi \underline{e}_x - 6r\dot{\varphi} \sin \varphi \underline{e}_y$$

3.3 Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$\dot{r}_{S1}^2 = 16r^2\dot{\varphi}^2 \\ \dot{r}_{S2}^2 = 4r^2\dot{\varphi}^2 + 32r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ \dot{\psi}^2 = 16\dot{\varphi}^2 \\ T_W = \frac{1}{2}m\dot{r}_{S1}^2 + \frac{1}{2}J_{S1}\dot{\psi}^2 \\ = 8mr^2\dot{\varphi}^2 + 4mr^2\dot{\varphi}^2 = 12mr^2\dot{\varphi}^2 \\ T_S = \frac{1}{2}m\dot{r}_{S2}^2 + \frac{1}{2}J_{S2}\dot{\varphi}^2 \\ = 2mr^2\dot{\varphi}^2 + 16mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + \frac{4}{6}mr^2\dot{\varphi}^2 \\ T = T_W + T_S = \frac{44}{3}mr^2\dot{\varphi}^2 + 16mr^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$$

3.4 Bestimmen Sie die potentielle Energie V des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ . Geben Sie dazu das verwendete Nullniveau an.

NN in O

$$\Rightarrow V = 4mgr \cos \varphi + 6mgr \cos \varphi + \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{2}c_d\varphi^2 \\ = 10mgr \cos \varphi + 32cr^2(1 - \cos \varphi)^2 + \frac{1}{2}c_d\varphi^2$$

Name: Matrikelnummer:

8

3.5 Leiten Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate φ her.

$$L = T - V = \left(\frac{44}{3} mr^2 + 16mr^2 \sin^2 \varphi \right) \dot{\varphi}^2 - 10mgr \cos \varphi - 32cr^2(1 - \cos \varphi)^2 - \frac{1}{2} c_d \varphi^2$$

$$\dot{u} = 8r\dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\frac{du}{d\varphi} = 8r \sin \varphi$$

$$Q_\varphi = -d\dot{u} \frac{du}{d\varphi} = -64dr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 16mr^2 2\dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 10mgr \sin \varphi - 64cr^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi - c_d \varphi$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{44}{3} mr^2 + 16mr^2 \sin^2 \varphi \right) 2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 16mr^2 2 \sin \varphi \cos \varphi 2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{88}{3} mr^2 + 32mr^2 \sin^2 \varphi \right) \ddot{\varphi}$$

$$\Rightarrow mr^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{88}{3} + 32 \sin^2 \varphi \right) + 32mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi - 10mgr \sin \varphi + 64cr^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi + c_d \varphi = -64dr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi$$

Name: Matrikelnummer:

9

3.6 Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Werte von φ und $\dot{\varphi}$. Leiten Sie aus der linearisierten Gleichung eine Bedingung für die Federkonstante c_d ab, welche erfüllt sein muss, damit Schwingungen um die Lage $\varphi = 0$ möglich sind.

Arbeitspunkt: $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = \ddot{\varphi}_0 = 0$

$$f := mr^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{88}{3} + 32 \sin^2 \varphi \right) + 32mr^2 \dot{\varphi}^2 \sin \varphi \cos \varphi + 64dr^2 \dot{\varphi} \sin^2 \varphi - 10mgr \sin \varphi + 64cr^2(1 - \cos \varphi) \sin \varphi + c_d \varphi$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \ddot{\varphi}} \right|_0 = mr^2 \frac{88}{3} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \dot{\varphi}} \right|_0 = 0 \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right|_0 = -10mgr + c_d$$

Linearisierte Bewegungsgleichung:

$$\Rightarrow \frac{88}{3} mr^2 \ddot{\varphi} + \underbrace{(c_d - 10mgr)}_{:=c} \varphi = 0$$

Schwingungen? $c \stackrel{!}{>} 0 \Rightarrow c_d > 10mgr$

Aufgabe 4

- 4.1 Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\omega^{St}$ der Stange und die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\omega^R$ des Rotors im $\{\underline{e}_{x'}, \underline{e}_{y'}, \underline{e}_{z'}\}$ -System.

$$\begin{aligned}\underline{e}_z &= \cos \beta \underline{e}_{z'} - \sin \beta \underline{e}_{x'} \\ {}^I\omega^{St} &= \dot{\alpha} \underline{e}_z + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} \\ &= -\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} + \dot{\alpha} \cos \beta \underline{e}_{z'} \\ {}^I\omega^R &= {}^I\omega^{St} + \omega \underline{e}_{z'} \\ &= -\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} + (\dot{\alpha} \cos \beta + \omega) \underline{e}_{z'}\end{aligned}$$

- 4.2 Geben Sie die Trägheitsmatrix $\Phi_R^{(O)}$ des Rotors bezüglich des Punktes O sowie die Trägheitsmatrix $\Phi_{St}^{(O)}$ der Stange bezüglich des Punktes O im $\{\underline{e}'_x, \underline{e}'_y, \underline{e}'_z\}$ -System in Abhängigkeit der Systemparameter an.

$$\begin{aligned}\Phi_R^{(O)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mr^2 + \ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix} \\ \Phi_{St}^{(O)} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}m\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

- 4.3 Bestimmen Sie den gesamten aus der Drehung des Rotors und der Stange resultierenden Drehimpuls $\underline{L}^{(O)}$ des Systems bezüglich des Punktes O .

$$\begin{aligned}\underline{L}_R^{(O)} &= \Phi_R^{(O)} {}^I\omega^R \\ &= \left(\frac{1}{4}mr^2 + m\ell^2 \right) \left(-\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} \right) + \frac{1}{2}mr^2 (\dot{\alpha} \cos \beta + \omega) \underline{e}_{z'} \\ \underline{L}_{St}^{(O)} &= \Phi_{St}^{(O)} {}^I\omega^{St} = \frac{1}{3}m\ell^2 \left(-\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} \right) \\ \underline{L}^{(O)} &= \underline{L}_R^{(O)} + \underline{L}_{St}^{(O)} \\ &= \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \left(-\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} \right) + \frac{1}{2}mr^2 (\dot{\alpha} \cos \beta + \omega) \underline{e}_{z'}\end{aligned}$$

- 4.4 Bestimmen Sie das äußere Moment $M_{y'}^{(O)}$, welches in Richtung des Einheitsvektors $\underline{e}_{y'}$ bezüglich des Punktes O auf die Stange wirkt.

$$M_{y'}^{(O)} = -c_d \beta$$

- 4.5 Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate β .

$$\begin{aligned}\dot{\underline{L}}^{(0)} &= \underline{M}^{(0)} \\ \dot{\underline{L}}^{(0)} &= \frac{{}^{St}d\underline{L}^{(0)}}{dt} + {}^I\omega^{St} \times \underline{L}^{(0)} \\ &= \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \left[\left(-\ddot{\alpha} \sin \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \right) \underline{e}_{x'} + \ddot{\beta} \underline{e}_{y'} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2}mr^2 \left(\ddot{\alpha} \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \right) \underline{e}_{z'} \\ &\quad + \left[-\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} + \dot{\alpha} \cos \beta \underline{e}_{z'} \right] \times \\ &\quad \left[\left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \left(-\dot{\alpha} \sin \beta \underline{e}_{x'} + \dot{\beta} \underline{e}_{y'} \right) + \frac{1}{2}mr^2 (\dot{\alpha} \cos \beta + \omega) \underline{e}_{z'} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{L}}^{(0)} \cdot \underline{e}_{y'} &= \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \ddot{\beta} + \frac{1}{2}mr^2 (\dot{\alpha} \cos \beta + \omega) \dot{\alpha} \sin \beta \\ &\quad - \left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad &\left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \ddot{\beta} + \left(\frac{1}{4}mr^2 - \frac{4}{3}m\ell^2 \right) \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta \\ &\quad + \frac{1}{2}mr^2 \dot{\alpha} \omega \sin \beta = -c_d \beta\end{aligned}$$

Im Folgenden wird das Antriebsmoment $M(t)$ so gewählt, dass sich eine konstante Drehzahl $\dot{\alpha} = \Omega$ der Welle einstellt. Für diesen Fall sei die um $\beta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\dot{\beta}_0 = 0$, $\ddot{\beta}_0 = 0$ linearisierte Bewegungsgleichung des Systems für kleine Abweichungen $\Delta\beta = \beta - \beta_0$ durch

$$\left(\frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2\right) \Delta\ddot{\beta} + \left[\left(\frac{4}{3}m\ell^2 - \frac{1}{4}mr^2\right) \Omega^2 + c_d\right] \Delta\dot{\beta} = -\frac{1}{2}mr^2\Omega\omega - c_d\frac{\pi}{2}$$

gegeben.

4.6 Bestimmen Sie die ungedämpfte Eigenkreisfrequenz ω_0 des linearisierten Systems.

$$\begin{aligned} m_e &:= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{4}{3}m\ell^2 \\ c &:= \left(\frac{4}{3}m\ell^2 - \frac{1}{4}mr^2\right) \Omega^2 + c_d \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{c}{m_e}} \end{aligned}$$

4.7 Geben Sie eine partikuläre Lösung der linearisierten Bewegungsgleichung an.

$$\Delta\beta_P = \frac{-\frac{1}{2}mr^2\Omega\omega - c_d\frac{\pi}{2}}{\left(\frac{4}{3}m\ell^2 - \frac{1}{4}mr^2\right) \Omega^2 + c_d}$$