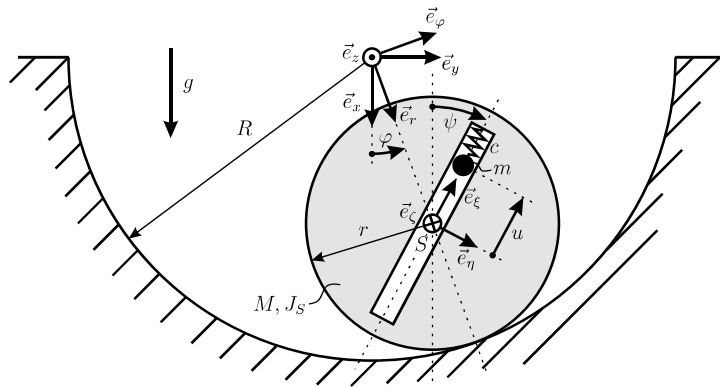


Aufgabe 1

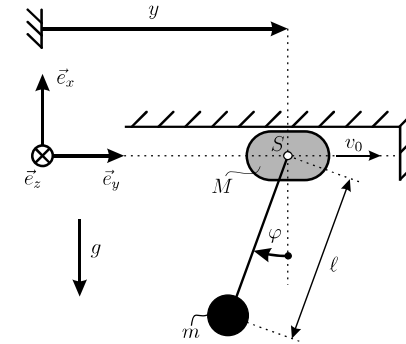


Betrachtet wird ein System bestehend aus einer Kreisscheibe (Masse M , Radius r und Massenträgheitsmoment J_S bzgl. des Schwerpunktes S) und einem Massenpunkt (Masse m). Die Scheibe rollt in einer halbkreisförmigen Aussparung mit dem Radius R . Die Lage des Schwerpunktes S entlang der halbkreisförmigen Aussparung wird mit dem Winkel φ beschrieben. Der Winkel ψ beschreibt die Verdrehung der Scheibe gegenüber der vertikalen Achse. Es gilt $\varphi(\psi = 0) = 0$.

In der Scheibe ist eine Nut eingefräst, in der sich der Massenpunkt reibungsfrei bewegen kann. Die Verschiebung des Massenpunktes relativ zur Scheibe wird durch die Koordinate u beschrieben. Zwischen dem Massenpunkt und der Scheibe befindet sich eine Feder (Federkonstante c), welche für $u = u_0$ entspannt ist.

Das $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -System ist ein Inertialsystem. Das Zylinderkoordinatensystem $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z\}$ dient zur Beschreibung der Position des Schwerpunktes S der Scheibe. Im Schwerpunkt S befindet sich der Ursprung des körperfesten $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -Relativsystems. Die Erdbeschleunigung wirkt in positive $\vec{e}_x$ -Richtung.

Aufgabe 2

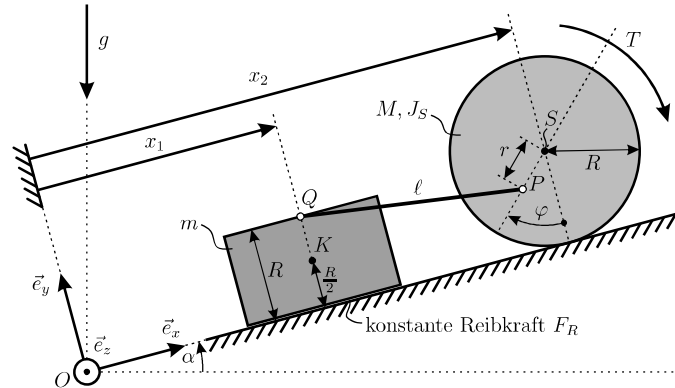


Im Folgenden soll ein Deckenkran untersucht werden, der mit seiner Laufkatze in den Anschlag fährt.

Die Laufkatze (Masse M) ist in vertikale Richtung an der Decke gelagert und kann sich lediglich in horizontale Richtung bewegen. Die Position in horizontale Richtung wird durch die Koordinate y beschrieben. Im Schwerpunkt S der Laufkatze ist eine masselose Stange (Länge ℓ) über ein Drehgelenk verbunden. Die Verdrehung der Stange zur Vertikalen wird durch den Winkel φ beschrieben. Am Ende der Stange befindet sich die Last (Masse m), welche durch einen Massenpunkt modelliert wird.

Die Laufkatze stößt mit der Geschwindigkeit $\dot{y} = v_0$ gegen die starre Wand. Unmittelbar vor dem Stoß besitzt die Stange den Winkel $\varphi = \varphi_0$ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega$. Die Stoßzahl ist allgemein durch ε gegeben. Das $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -System ist raumfest und die Erdbeschleunigung zeigt in negative $\vec{e}_x$ -Richtung. Alle Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.

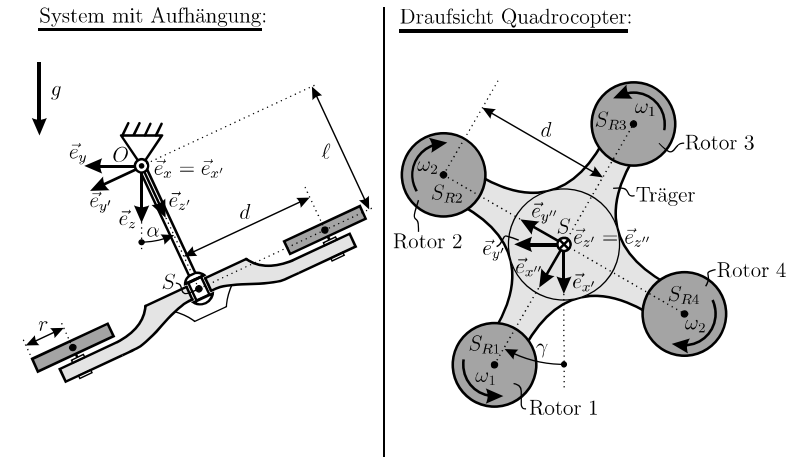
Aufgabe 3



Eine homogene Walze (Masse M , Radius R , Massenträgheitsmoment J_S bezüglich Schwerpunkt S) rollt auf einer um den Winkel α zur Horizontalen geneigten Ebene. Die Walze wird über ein äußeres Moment T angetrieben. Zusätzlich ist die Walze gelenkig im Punkt P an eine masselose Stange (Länge ℓ) gekoppelt. Das andere Ende der Stange ist im Punkt Q gelenkig an einen Klotz (Masse m , Schwerpunkt im Punkt K) gekoppelt, welcher sich ohne zu kippen entlang der Ebene bewegt. Die Reibung zwischen dem Klotz und der Ebene wird über eine konstante Reibkraft F_R modelliert, die immer der Geschwindigkeit des Klotzes entgegengerichtet wirkt.

Die Positionen der Walze und des Klotzes entlang der Ebene werden durch die Koordinaten x_2 beziehungsweise x_1 beschrieben, die Verdrehung der Walze mit dem Winkel φ . Die Erdbeschleunigung wirkt entlang der Vertikalen. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Aufgabe 4



Die Gierbewegung eines Quadcopters soll an einem Prüfstand untersucht werden. Hierzu ist der Quadcopter an einer masselosen Stange (Länge ℓ) befestigt, welche drehbar im Punkt O gelagert ist. Der Quadcopter besteht aus einem Träger (Masse M und Schwerpunkt im Punkt S), an dem vier kreisrunde Rotoren (jeweils Masse m) im Abstand d zum Schwerpunkt S angebracht sind.

Die Stange kann sich im Punkt O gegenüber dem raumfesten $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ -System (Inertialsystem) mit dem Winkel α um die $\vec{e}_x$ -Achse verdrehen. Das andere Ende der Stange ist drehbar mit dem Schwerpunkt S des Trägers verbunden. Die Verdrehung des Trägers relativ zur Stange wird mit dem Winkel γ bezüglich des stangenfesten $\{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\}$ -Systems beschrieben. Das trägerfeste $\{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}\}$ -System besitzt den Ursprung im Schwerpunkt S des Trägers. Die zwei Rotoren 1 und 3, welche sich auf der $\vec{e}_{x''}$ -Achse befinden, besitzen die selbe Winkelgeschwindigkeit ω_1 und die Rotoren auf der $\vec{e}_{y''}$ -Achse die selbe Winkelgeschwindigkeit ω_2 , deren positive Richtungen in der Skizze gekennzeichnet sind. Die Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 sind relativ zum trägerfesten System eingeführt und nicht konstant, da sie durch auf dem Träger angebrachte Motoren angetrieben werden.

Die Trägheitsmatrizen des Trägers (T) bezüglich des Schwerpunktes S und des Rotors R_i ($i = 1, 2, 3, 4$) bezüglich des jeweiligen Schwerpunktes S_{Ri} sind durch

$$\Phi_T^{(S)} = \frac{Md^2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}} \quad \Phi_{R_i}^{(S_{Ri})} = \frac{mr^2}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}}$$

gegeben. Der Auftrieb der Rotoren und alle Reibungseinflüsse werden in diesem Modell vernachlässigt und die Erdbeschleunigung wirkt in $\vec{e}_z$ -Richtung. Der Quadcopter ist symmetrisch zur $\vec{e}_{x''}$ - und $\vec{e}_{y''}$ -Achse aufgebaut. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Bearbeitungsbögen für die Prüfung im Fach

Technische Mechanik III/IV

15. März 2023

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Platz nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

Die Bearbeitungsbögen sind von **1** bis **16** durchnummeriert. Prüfen Sie bitte auf Vollständigkeit!

Punkte:

Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

Name:

Matrikelnummer:

1

Aufgabe 1

1.1 Bestimmen Sie den kinematischen Zusammenhang $\dot{\varphi}(\dot{\psi})$. Geben Sie zusätzlich $\varphi(\psi)$ an.

$$r\dot{\psi} = (R-r)\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{r}{R-r}\dot{\psi}$$

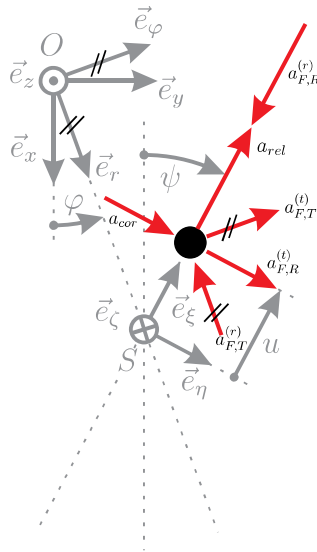
$$\varphi = \frac{r}{R-r}\psi$$

1.2 Geben Sie die Beschleunigung $\vec{a}_S$ des Schwerpunktes S an und drücken Sie diese in Abhängigkeit von $\dot{\psi}$ und $\ddot{\psi}$ aus.

$$\vec{a}_S = (R-r)\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - (R-r)\dot{\varphi}^2\vec{e}_r$$

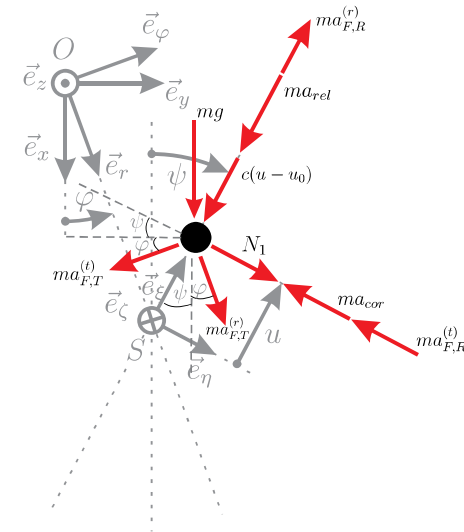
$$= r\ddot{\psi}\vec{e}_\varphi - \frac{r^2}{R-r}\dot{\psi}^2\vec{e}_r$$

1.3 Tragen Sie in die gegebene Skizze alle Beschleunigungsanteile des Massenpunktes im Sinne der Relativmechanik ein. Geben Sie zusätzlich die Beträge der Beschleunigungsanteile an. Als Relativsystem ist das körperfeste $\{\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta\}$ -System mit Ursprung in S zu verwenden.

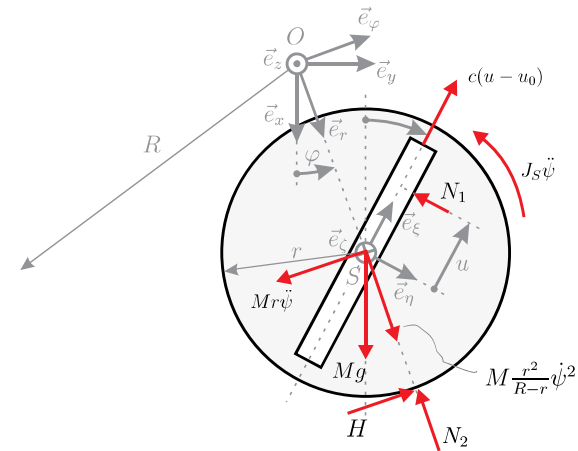


$$\begin{aligned} a_{F,T}^{(r)} &= \frac{r^2}{R-r} \dot{\psi}^2 \\ a_{F,T}^{(i)} &= r \ddot{\psi} \\ a_{F,R}^{(r)} &= u \dot{\psi}^2 \\ a_{F,R}^{(i)} &= u \ddot{\psi} \\ a_{rel} &= \ddot{u} \\ a_{cor} &= 2 \dot{\psi} \dot{u} \end{aligned}$$

1.4 Schneiden Sie den Massenpunkt frei und tragen Sie alle Kräfte im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein.



1.5 Schneiden Sie die Scheibe frei und tragen Sie alle Kräfte und Momente im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein.



1.6 Stellen Sie die Kräftebilanzen für den Massenpunkt auf.

$$\vec{e}_\xi : \quad mu\dot{\psi}^2 - m\ddot{u} - c(u - u_0) - mg \cos(\psi) - m \frac{r^2}{R-r} \dot{\psi}^2 \cos(\varphi + \psi) \\ - mr\ddot{\psi} \sin(\varphi + \psi) = 0$$

$$\vec{e}_\eta : \quad N_1 - 2m\dot{\psi}\dot{u} - mu\ddot{\psi} + mg \sin(\psi) + m \frac{r^2}{R-r} \dot{\psi}^2 \sin(\varphi + \psi) \\ - mr\ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) = 0$$

1.7 Geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes für den Sonderfall an, dass die Scheibe bei $\psi = 0$ fixiert ist.

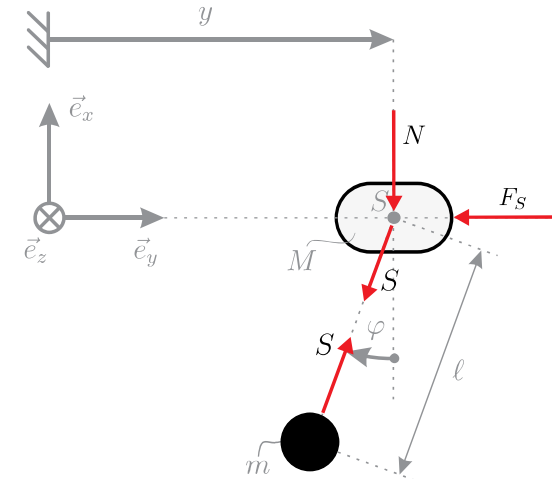
$$m\ddot{u} + c(u - u_0) + mg = 0$$

Aufgabe 2

2.1 Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}_L$ der Last in Abhängigkeit der Laufkatzen-Geschwindigkeit $\dot{y}$ und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Stange.

$$\begin{aligned} \vec{v}_L &= \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SL} \\ &= \dot{y}\vec{e}_y + \dot{\varphi}\vec{e}_z \times (-l \cos(\varphi)\vec{e}_x - l \sin(\varphi)\vec{e}_y) \\ &= (\dot{y} - l\dot{\varphi} \cos(\varphi))\vec{e}_y + l\dot{\varphi} \sin(\varphi)\vec{e}_x \end{aligned}$$

2.2 Schneiden Sie die Laufkatze und die Last zum Stoßzeitpunkt frei und zeichnen Sie alle stoßrelevanten Kräfte, und nur diese, in die gegebene Skizze ein.



2.3 Stellen Sie die Impulsgleichungen für die Laufkatze und die Last auf.

M :

$$\vec{e}_y : \int_{\Delta t} (-F'_S - S \sin(\varphi_0)) dt = M(V - v_0) \quad (1)$$

$$\vec{e}_x : \int_{\Delta t} (-N - S \cos(\varphi_0)) dt = 0 \quad (2)$$

m :

$$\vec{e}_y : \int_{\Delta t} S \sin(\varphi_0) dt = m(V_{Ly} - v_{Ly}) \quad (3)$$

$$\vec{e}_x : \int_{\Delta t} S \cos(\varphi_0) dt = m(V_{Lx} - v_{Lx}) \quad (4)$$

2.4 Bestimmen Sie aus der Stoßzahlgleichung die Laufkatzen-Geschwindigkeit $\dot{y} = V$ unmittelbar nach dem Stoß.

$$\varepsilon = -\frac{V - 0}{v_0 - 0} \Rightarrow V = -\varepsilon v_0 \quad (5)$$

2.5 Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$ der Stange unmittelbar nach dem Stoß in Abhängigkeit der Systemgrößen vor dem Stoß.

$$(3) \cdot \cos(\varphi_0) - (4) \cdot \sin(\varphi_0) :$$

$$\begin{aligned} 0 &= m(V_{Ly} - v_{Ly}) \cos(\varphi_0) - m(V_{Lx} - v_{Lx}) \sin(\varphi_0) \\ \Leftrightarrow 0 &= (V - l\Omega \cos(\varphi_0) - v_0 + l\omega \cos(\varphi_0)) \cos(\varphi_0) \\ &\quad - (l\Omega \sin(\varphi_0) - l\omega \sin(\varphi_0)) \sin(\varphi_0) \\ \Leftrightarrow 0 &= (V - v_0) \cos(\varphi_0) - l\Omega + l\omega \end{aligned}$$

mit (5):

$$\begin{aligned} &-(1 + \varepsilon)v_0 \cos(\varphi_0) + l\omega = l\Omega \\ \Rightarrow \quad \Omega &= \omega - \frac{(1 + \varepsilon) \cos(\varphi_0)}{l} v_0 \end{aligned}$$

Im Folgenden wird der Sonderfall eines vollplastischen Stoßes für die Parameter $\varphi_0 = 0$ und $\omega = 0$ betrachtet. Zusätzlich sei die Laufkatze nach dem Stoß durch eine Arretierung fest mit der starren Wand verbunden. Für diesen Sonderfall ergibt sich die Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = -\frac{v_0}{\ell}$$

der Stange unmittelbar nach dem Stoß.

2.6 Nach dem Stoß soll die Stange den maximal zulässigen Winkel $\varphi_{max} = \frac{\pi}{4}$ nicht überschreiten. Bestimmen Sie die maximal zulässige Geschwindigkeit $v_{0,max}$ der Laufkatze vor dem Stoß.

Energiesatz:

(Nullniveau des Schwerepotentials auf Höhe von S)

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 \quad V = -mgl \cos(\varphi)$$

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_{0,max}^2 \quad V_0 = -mgl$$

$$T_1 \stackrel{!}{=} 0 \quad V_1 = -mgl \cos(\varphi_{max})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_{0,max}^2 - mgl = -mgl \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$v_{0,max}^2 = 2gl - \sqrt{2}gl$$

$$v_{0,max} = \sqrt{(2 - \sqrt{2})gl}$$

Aufgabe 3

3.1 Bestimmen Sie die kinematische Beziehung $x_2(\varphi)$. Es gilt $x_2(\varphi = 0) = 0$.

$$\dot{x}_2 = R\dot{\varphi} \rightarrow x_2 = R\varphi$$

3.2 Geben Sie die Ortsvektoren $\vec{r}_P$ und $\vec{r}_Q$ vom Ursprung O zu den Punkten P beziehungsweise Q an. Bestimmen Sie die kinematische Beziehung $x_1(\varphi)$ in Abhängigkeit des Winkels φ .

$$\vec{r}_P = (R - r \cos(\varphi))\vec{e}_y + (x_2 - r \sin(\varphi))\vec{e}_x$$

$$\vec{r}_Q = x_1\vec{e}_x + R\vec{e}_y$$

$$(\vec{r}_P - \vec{r}_Q)^2 \stackrel{!}{=} l^2$$

$$\left(R\varphi - r \sin(\varphi) - x_1\right)^2 + \left(R - r \cos(\varphi) - R\right)^2 = l^2$$

$$\left(R\varphi - r \sin(\varphi) - x_1\right) = \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \quad x_1(\varphi) = R\varphi - r \sin(\varphi) - \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2(\varphi)}$$

$$= R\varphi - r \sin(\varphi) - l\sqrt{1 - \frac{r^2}{l^2} \cos^2(\varphi)}$$

Im Folgenden ist die für kleine Verhältnisse $\frac{r}{R} \ll 1$ linearisierte kinematische Beziehung $x_1(\varphi)$ als

$$x_1(\varphi) = R\varphi - r \sin(\varphi) - \ell$$

gegeben. Nutzen Sie in den folgenden Teilaufgaben dieses Zwischenergebnis und nicht ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

3.3 Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und $\dot{\varphi}$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2, \quad \dot{x}_1 = R\dot{\varphi} - r \cos(\varphi) \dot{\varphi} \\ &= \frac{1}{2} (J_S + M R^2) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m (R^2 - 2Rr \cos(\varphi) + r^2 \cos^2(\varphi)) \dot{\varphi}^2 \\ &= \frac{1}{2} (J_S + (M + m) R^2 + mr^2 \cos^2(\varphi) - 2mRr \cos(\varphi)) \dot{\varphi}^2 \end{aligned}$$

3.4 Bestimmen Sie die potentielle Energie V des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ und geben Sie die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente δW in Abhängigkeit der virtuellen Verdrehung $\delta\varphi$ an.

Nullniveau des Schwerepotentials auf Höhe des Ursprungs O :

$$\begin{aligned} V &= mgx_1 \sin(\alpha) + mg \frac{R}{2} \cos(\alpha) + Mgx_2 \sin(\alpha) + MgR \cos(\alpha) \\ &= mg \sin(\alpha) (R\varphi - r \sin(\varphi) - \ell) + Mg \sin(\alpha) R\varphi + mg \frac{R}{2} \cos(\alpha) + MgR \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\delta x_1 = \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \delta\varphi = (R - r \cos(\varphi)) \delta\varphi$$

$$\Rightarrow \delta W = \underbrace{(-F_R \operatorname{sgn}(R\dot{\varphi} - r \cos(\varphi)\dot{\varphi})(R - r \cos(\varphi)) + T)}_{:=Q_\varphi} \delta\varphi$$

3.5 Leiten Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate φ her.

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \overbrace{\left(J_S + (M + m) R^2 + mr^2 \cos^2(\varphi) - 2mRr \cos(\varphi) \right)}^{:=A} \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - (M + m) g \sin(\alpha) R\varphi + mg \sin(\alpha) (r \sin(\varphi) + \ell) - mg \frac{R}{2} \cos(\alpha) - MgR \cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = A \dot{\varphi}$$

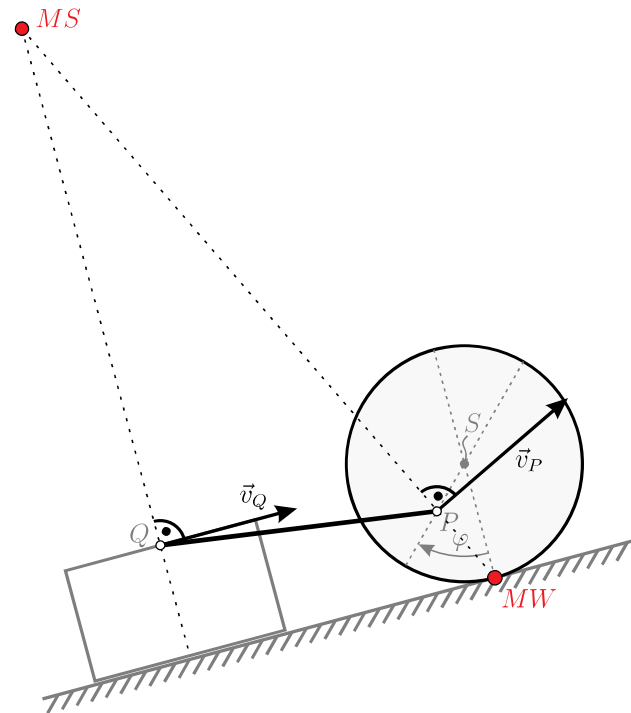
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = A \ddot{\varphi} + (-2mr^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + 2mRr \sin(\varphi)) \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) &= (-mr^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + mRr \sin(\varphi)) \dot{\varphi}^2 \\ &\quad - (M + m) g \sin(\alpha) R + mg \sin(\alpha) r \cos(\varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi} \right) = Q_\varphi :$$

$$\begin{aligned} &(J_S + (M + m) R^2 + mr^2 \cos^2(\varphi) - 2mRr \cos(\varphi)) \ddot{\varphi} + (mRr \sin(\varphi) \\ &\quad - mr^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi)) \dot{\varphi}^2 + (M + m) g R \sin(\alpha) - mg \sin(\alpha) r \cos(\varphi) \\ &= T - F_R \operatorname{sgn}(R\dot{\varphi} - r \cos(\varphi)\dot{\varphi})(R - r \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

3.6 Zeichnen Sie in die gegebene Skizze die Lage des Momentanpols MW der Walze und die Lage des Momentanpols MS der Stange ein.



Aufgabe 4

4.1 Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ${}^I\vec{\omega}^T$ des Trägers und die Winkelgeschwindigkeiten ${}^I\vec{\omega}^{R1}$ und ${}^I\vec{\omega}^{R2}$ der Rotoren 1 beziehungsweise 2 bezüglich des Inertialsystems. Geben Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit der $\{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}\}$ -Einheitsvektoren an.

$$\begin{aligned} {}^I\vec{\omega}^T &= \dot{\alpha}\vec{e}_{x'} + \dot{\gamma}\vec{e}_{z'}, & \vec{e}_{x'} &= \cos(\gamma)\vec{e}_{x''} - \sin(\gamma)\vec{e}_{y''} \\ &= \dot{\alpha}\cos(\gamma)\vec{e}_{x''} - \dot{\alpha}\sin(\gamma)\vec{e}_{y''} + \dot{\gamma}\vec{e}_{z''} \end{aligned}$$

$${}^I\vec{\omega}^{R1} = {}^I\vec{\omega}^T - \omega_1\vec{e}_{z''}$$

$${}^I\vec{\omega}^{R2} = {}^I\vec{\omega}^T + \omega_2\vec{e}_{z''}$$

4.2 Geben Sie die Trägheitsmatrix $\Phi_{R1}^{(S)}$ des Rotors 1 bezüglich des Punktes S sowie die Trägheitsmatrix $\Phi_{R2}^{(S)}$ des Rotors 2 bezüglich des Punktes S im $\{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}\}$ -System in Abhängigkeit der Systemparameter an.

$$\Phi_{R1}^{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} + md^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} + md^2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}}$$

$$\Phi_{R2}^{(S)} = \begin{bmatrix} \frac{mr^2}{4} + md^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mr^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mr^2}{2} + md^2 \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}}$$

Im Folgenden sind die Trägheitsmatrizen für die Rotoren 1 und 2 bezüglich des Punktes S als

$$\Phi_{R_1}^{(S)} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}} \quad \Phi_{R_2}^{(S)} = \begin{bmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{\vec{e}_{x''}, \vec{e}_{y''}, \vec{e}_{z''}}$$

gegeben. Die Trägheitsmatrizen der jeweils gegenüberliegenden Rotoren sind identisch. Nutzen Sie in den folgenden Teilaufgaben dieses Zwischenergebnis und nicht ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

4.3 Bestimmen Sie den gesamten Drehimpuls $\vec{L}^{(S)}$ des Quadrocopters bezüglich des Punktes S und geben Sie ihn bezüglich der $\{\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\}$ -Einheitsvektoren an.

$$\vec{L}^{(S)} = \vec{L}_T^{(S)} + 2\vec{L}_{R_1}^{(S)} + 2\vec{L}_{R_2}^{(S)}$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{L}_T^{(S)} &= \Phi_T^{(S)} I \vec{\omega}^T = \frac{Md^2}{3} (\dot{\alpha} \cos(\gamma) \vec{e}_{x''} - \dot{\alpha} \sin(\gamma) \vec{e}_{y''} + 2\dot{\gamma} \vec{e}_{z''}) \\ \vec{L}_{R_1}^{(S)} &= \Phi_{R_1}^{(S)} I \vec{\omega}^{R_1} = A\dot{\alpha} \cos(\gamma) \vec{e}_{x''} - B\dot{\alpha} \sin(\gamma) \vec{e}_{y''} + C(\dot{\gamma} - \omega_1) \vec{e}_{z''} \\ \vec{L}_{R_2}^{(S)} &= \Phi_{R_2}^{(S)} I \vec{\omega}^{R_2} = B\dot{\alpha} \cos(\gamma) \vec{e}_{x''} - A\dot{\alpha} \sin(\gamma) \vec{e}_{y''} + C(\dot{\gamma} + \omega_2) \vec{e}_{z''} \end{aligned}$$

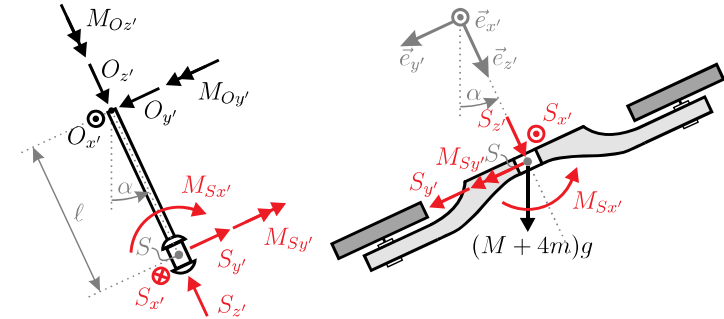
$$\begin{aligned} \vec{L}^{(S)} &= \left(\frac{Md^2}{3} + 2A + 2B \right) \dot{\alpha} \cos(\gamma) \vec{e}_{x''} - \left(\frac{Md^2}{3} + 2B + 2A \right) \dot{\alpha} \sin(\gamma) \vec{e}_{y''} \\ &\quad + \left(\frac{2Md^2}{3} \dot{\gamma} + 2C(2\dot{\gamma} + \omega_2 - \omega_1) \right) \vec{e}_{z''} \end{aligned}$$

$$\vec{e}_{z''} = \vec{e}_{z'} \quad ; \quad \vec{e}_{x''} = \cos(\gamma) \vec{e}_{x'} + \sin(\gamma) \vec{e}_{y'} \quad ; \quad \vec{e}_{y''} = \cos(\gamma) \vec{e}_{y'} - \sin(\gamma) \vec{e}_{x'}$$

$$\Rightarrow \vec{L}^{(S)} = \left(\frac{Md^2}{3} + 2A + 2B \right) \dot{\alpha} \vec{e}_{x'} + \left(\left(\frac{2Md^2}{3} + 4C \right) \dot{\gamma} + 2C(\omega_2 - \omega_1) \right) \vec{e}_{z'}$$

4.4 Vervollständigen Sie alle Schnittreaktionen zwischen der Stange und dem Quadrocopter im folgenden Freischnitt nach Newton.

Hinweis: Die resultierende Gewichtskraft der Rotoren ist bereits bezüglich des Gesamtschwerpunktes S eingezeichnet.



4.5 Werten Sie den Drallsatz für den gesamten Quadrocopter bezüglich des Schwerpunktes S aus und bestimmen Sie hiermit die Bewegungsgleichungen in den Winkeln α und γ und das Zwangsmoment $M_{Oy'}$.

Auswertung Drallsatz bzgl. stangenfestem System S :

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}}^{(S)} &= \frac{Sd}{dt} \vec{L}^{(S)} + I \vec{\omega}^S \times \vec{L}^{(S)} \quad , \quad I \vec{\omega}^S = \dot{\alpha} \vec{e}_{x'} \\ &= \left(\frac{Md^2}{3} + 2A + 2B \right) \ddot{\alpha} \vec{e}_{x'} - \left(\frac{2Md^2}{3} \dot{\gamma} + 2C(2\dot{\gamma} + \omega_2 - \omega_1) \right) \dot{\alpha} \vec{e}_{y'} \\ &\quad + \left(\left(\frac{2Md^2}{3} + 4C \right) \dot{\gamma} + 2C(\omega_2 - \omega_1) \right) \ddot{\gamma} \vec{e}_{z'} \\ &\stackrel{!}{=} M_{Sx'} \vec{e}_{x'} + M_{Sy'} \vec{e}_{y'} + 0 \vec{e}_{z'} \end{aligned}$$

$\hat{O}$:

$$\begin{aligned} M_{Oy'} &= M_{Sy'} + S_{x'} l \\ M_{Sy'} &= \vec{L}^{(S)} \cdot \vec{e}_{y'} \\ S_{x'} &= 0 \\ &= - \left(\left(\frac{2Md^2}{3} + 4C \right) \dot{\gamma} + 2C(\omega_2 - \omega_1) \right) \dot{\alpha} \end{aligned}$$

$$0 = M_{Sx'} - S_{y'} l$$

$$M_{Sx'} = \dot{\vec{L}}^{(S)} \cdot \vec{e}_{x'}$$

$$S_{y'} = -(M + 4m)l\ddot{\alpha} - (M + 4m)g \sin(\alpha) \quad (\text{Schwerpunktsatz})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Md^2}{3} + 2A + 2B + (M + 4m)l^2 \right) \ddot{\alpha} + (M + 4m)g \sin(\alpha)l = 0$$

Drallsatz in $\vec{e}_{z'}$ -Richtung:

$$\Rightarrow \left(\frac{2Md^2}{3} + 4C \right) \ddot{\gamma} + 2C(\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1) = 0$$

4.6 Betrachtet werden die Anfangsbedingungen $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ und $\dot{\alpha} = \dot{\gamma} = 0$. Durch die eingebauten Motoren wird die Winkelgeschwindigkeit der Rotoren anschließend angepasst. Bestimmen Sie die sich einstellende Winkelgeschwindigkeit $\dot{\gamma}(\omega_1, \omega_2)$ des Trägers als Funktion der beliebigen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 der Rotoren.

Integration der Bewegungsgleichung oder Drallsatz in integraler Form:

$$\int_0^1 0 \, dt = L_{z',1}^{(S)} - L_{z',0}^{(S)}, \quad L_{z',0}^{(S)} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} = \frac{2C(\omega_1 - \omega_2)}{\frac{2Md^2}{3} + 4C} = \frac{6C(\omega_1 - \omega_2)}{2Md^2 + 12C}$$