

Bearbeitungsbögen für die Prüfung im Fach
Technische Mechanik III/IV

08. März 2024

Bearbeitungszeit: 3 Stunden

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Hinweise zum Ausfüllen der Bearbeitungsbögen

Die vollständige Rechnung muss auf den nachfolgenden Blättern und mit erkennbarem Lösungsweg durchgeführt werden. Reicht der vorgegebene Platz nicht aus, kann die Rechnung auf der Rückseite des vorangegangenen Blattes unter genauer Angabe der Aufgabenteilnummer fortgesetzt werden.

Bitte den durch den senkrechten Strich abgeteilten rechten Rand nicht überschreiben!

Die Bearbeitungsbögen sind von **1** bis **16** durchnummeriert. Prüfen Sie bitte auf Vollständigkeit!

Punkte:

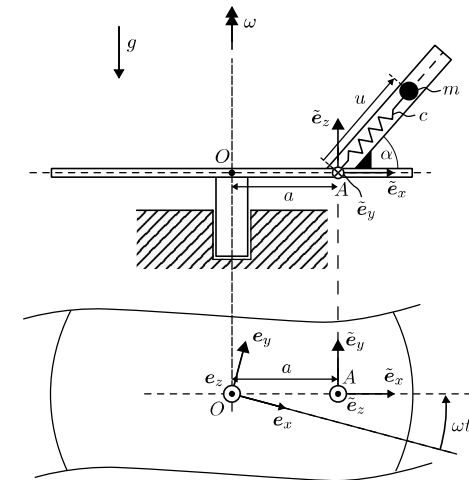
Aufgabe 1:

Aufgabe 2:

Aufgabe 3:

Aufgabe 4:

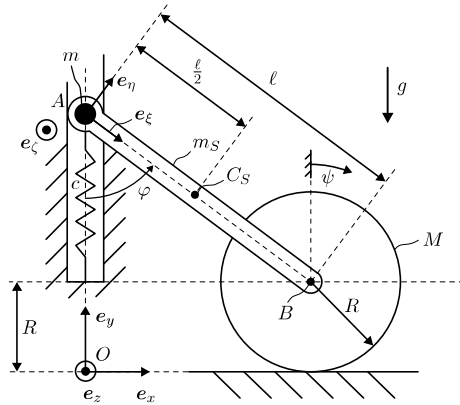
Aufgabe 1



Eine Kreisscheibe dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die e_z -Achse des $\{O, e_x, e_y, e_z\}$ -Inertialsystems. Im Abstand a zum Drehpunkt O befindet sich das scheibenfeste $\{A, \tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z\}$ -Relativsystem. Eine Führung ist im Punkt A unter dem Winkel $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ zur $\tilde{e}_x$ -Achse an die Kreisscheibe angebracht, in der ein Massenpunkt (Masse m) reibungsfrei gleiten kann.

Die Bewegung des Massenpunktes in der Führung wird mit der Relativkoordinate u beschrieben. Eine entlang der Führung eingelegte Feder (Federkonstante c) verbindet den Massenpunkt mit der Scheibe. Die Feder ist für $u = 0$ entspannt und die Erdbeschleunigung g wirkt in negative e_z -Richtung.

Aufgabe 2

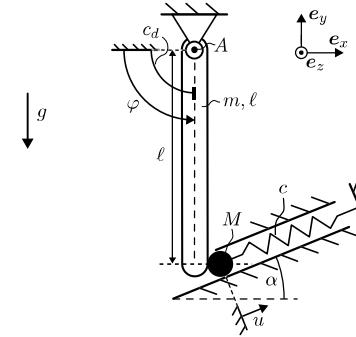


Das betrachtete System besteht aus einer Führungsstange, welche reibungsfrei drehbar im Mittelpunkt B eines homogenen Rads (Masse M , Radius R , Massenmittelpunkt in B) angebracht ist. Die Führungsstange selbst besteht aus einem homogenen, dünnen Stab (Masse m_S , Länge ℓ , Massenmittelpunkt in C_S) und einer im Punkt A fest verbundenen Zusatzmasse (Masse m).

Der Punkt A der Führungsstange ist in vertikaler Richtung geführt und die Verdrehung wird mit dem Winkel $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ beschrieben. Zusätzlich ist der Punkt A über eine vertikal wirkende Feder (Federkonstante c) mit der Umgebung verbunden, welche in der Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entspannt ist. Das Rad rollt auf dem Untergrund und die Verdrehung wird mit dem Winkel ψ beschrieben.

Das $\{O, e_x, e_y, e_z\}$ -System ist Inertialsystem, das $\{A, e_\xi, e_\eta, e_\zeta\}$ -System ist stangenfest. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative e_y -Richtung. Das System ist komplett symmetrisch zur e_x - e_y -Ebene aufgebaut und kann daher als eben betrachtet werden.

Aufgabe 3

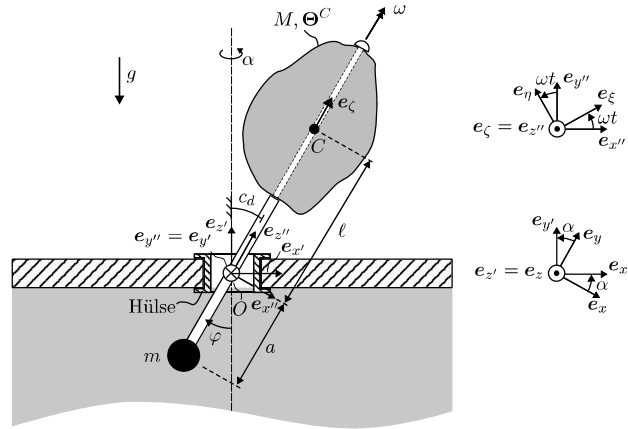


Betrachtet wird der reibungsfreie, vollelastische Stoß zwischen einem Pendel (homogener, dünner Stab der Masse m , Länge ℓ und Massenträgheitsmoment $J_A = \frac{1}{3}m\ell^2$ bzgl. Punkt A) und einem Massenpunkt (Masse M).

Das Pendel ist im Punkt A reibungsfrei drehbar gelagert und die Verdrehung gegenüber der Horizontalen wird mit dem Winkel φ beschrieben. Eine Drehfeder (Federkonstante c_d), welche für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entspannt ist, verbindet das Pendel mit der Umgebung. Der Massenpunkt kann sich reibungsfrei in einer um den Winkel α zur Horizontalen geneigten Führung bewegen, wobei die Position über die Koordinate u beschrieben wird. Zusätzlich ist der Massenpunkt über eine Feder (Federkonstante c) mit der Umgebung verbunden, welche für $u = u_0$ entspannt ist.

In der Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ stößt das Pendel gegen den bei $u = 0$ ruhenden Massenpunkt, wobei die Stoßnormale in horizontale Richtung zeigt. Das System befindet sich im Schwerfeld der Erde mit der Erdbeschleunigung g in negative e_y -Richtung. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen. Alle Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.

Aufgabe 4



Ein Starrkörper (Masse M , Massenmittelpunkt im Punkt C) und ein Massenpunkt (Masse m) sind an eine masselose Stange angekoppelt, welche sich im Punkt O in einer masselosen Hülse reibungsfrei um die $e_{y'}$ -Achse drehen kann. Der Starrkörper ist auf einer Seite der Stange reibungsfrei drehbar gelagert. Der Massenpunkt ist fest mit dem anderen Ende der Stange verbunden und bewegt sich in einem Ölbad.

Die Drehung der Stange wird mit den Winkeln α und φ beschrieben. Der Winkel α beschreibt hierbei die Drehung der Hülse gegenüber dem $\{O, e_x, e_y, e_z\}$ -Inertialsystem um die e_z -Achse. Der Winkel φ beschreibt die Drehung des stangenfesten $\{O, e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ -Systems gegenüber dem hülsenfesten $\{O, e_{x'}, e_{y'}, e_{z'}\}$ -System um die $e_{y'}$ -Achse. Der Starrkörper ist so mit der Stange verbunden, dass er sich reibungsfrei um die e_{ζ}' -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω dreht. Der auf das System durch die Bewegung im Ölbad wirkende Strömungswiderstand wird durch eine auf den Massenpunkt wirkende Widerstandskraft modelliert, welche von der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_m$ des Massenpunktes abhängt und durch das Kraftgesetz $\mathbf{F}_W = -k_W |\mathbf{v}_m| \mathbf{v}_m$ gegeben ist. Zusätzlich ist die Stange über eine Drehfeder (Federkonstante c_d) mit der Umgebung verbunden, die für $\varphi = 0$ entspannt ist und ein Moment um die $e_{y'}$ -Achse bewirkt.

Der Starrkörper besitzt eine Symmetrie zur Achse $e_{z''} = e_{\zeta}$, weshalb die Koordinatenmatrix des Massenträgheitstensors im Massenmittelpunkt C bezüglich der Basisvektoren des stangenfesten $\{e_{x''}, e_{y''}, e_{z''}\}$ - und des körperfesten $\{e_{\xi}, e_{\eta}, e_{\zeta}\}$ -Systems durch

$$[\Theta^{(C)}] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{e_{x''}, e_{y''}, e_{z''}} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{e_{\xi}, e_{\eta}, e_{\zeta}}$$

mit den Konstanten A und B gegeben ist. Die Erdbeschleunigung g wirkt in negative e_z -Richtung. Alle weiteren Zusammenhänge sind der Skizze zu entnehmen.

Aufgabe 1

- 1.1 Geben Sie den Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ des scheibenfesten Relativsystems $\{A, \tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z\}$ bezüglich des Inertialsystems an.

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \tilde{e}_z$$

- 1.2 Geben Sie im Sinne der Relativkinematik die Führungsbeschleunigungen $\mathbf{a}_{F,T}$, $\mathbf{a}_{F,R}$ sowie die Coriolisbeschleunigung $\mathbf{a}_{Cor}$ und die Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{rel}$ des Massenpunktes in Abhängigkeit der gegebenen Größen an. Als Relativsystem ist das scheibenfeste $\{A, \tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z\}$ zu verwenden.

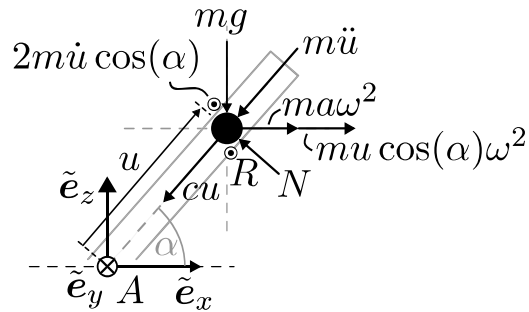
$$\mathbf{a}_{F,T} = -a\omega^2 \tilde{e}_x$$

$$\mathbf{a}_{F,R} = -u \cos(\alpha) \omega^2 \tilde{e}_x$$

$$\mathbf{a}_{Cor} = 2\omega \dot{u} \cos(\alpha) \tilde{e}_y$$

$$\mathbf{a}_{rel} = \ddot{u} (\cos(\alpha) \tilde{e}_x + \sin(\alpha) \tilde{e}_z)$$

1.3 Schneiden Sie den Massenpunkt frei und tragen Sie alle Kräfte (mit Betrag und Richtung) im Sinne d'Alemberts in die gegebene Skizze ein.



1.4 Geben Sie die Bewegungsgleichung des Massenpunktes an.

$$m\ddot{u} + cu + mg \sin(\alpha) - m\omega^2 \cos(\alpha) (a + u \cos(\alpha)) = 0$$

1.5 Bestimmen Sie die Ruhelage $u = u_0$ des Massenpunktes, für die $\dot{u} = \ddot{u} = 0$ gilt.

$$u_0 = \frac{m a \omega^2 \cos(\alpha) - m g \sin(\alpha)}{c - m \cos^2(\alpha) \omega^2}$$

1.6 Bestimmen Sie den Betrag der Reaktionskraft zwischen Führung und Massenpunkt in der Ruhelage $u = u_0$. Das Ergebnis von 1.5 muss nicht eingesetzt werden.

$$|N| = m g \cos(\alpha) + m \omega^2 \sin(\alpha) (a + u_0 \cos(\alpha)) \quad \text{mit} \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Aufgabe 2

2.1 Berechnen Sie den Vektor $\mathbf{r}_{AC}$ vom Punkt A zum Massenmittelpunkt C der kompletten Führungstange, bestehend aus Stab und Zusatzmasse. Geben Sie ihr Ergebnis bezüglich der $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta\}$ -Basisvektoren an. Berechnen Sie zusätzlich das resultierende Massenträgheitsmoment J_C der kompletten Führungstange bezüglich ihres Massenmittelpunkts C . Betrachten Sie für diese Teilaufgabe den Sonderfall $m_S = 2m$.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AC} &= \frac{m \cdot 0 + 2m \cdot \frac{\ell}{2}}{3m} \mathbf{e}_\xi = \frac{\ell}{3} \mathbf{e}_\xi \\ J_C &= \frac{1}{12} (2m) \ell^2 + 2m \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\ell}{3} \right)^2 + m \left(\frac{\ell}{3} \right)^2 \\ &= \left(\frac{3}{18} + \frac{1}{18} + \frac{2}{18} \right) m \ell^2 \\ &= \frac{1}{3} m \ell^2\end{aligned}$$

2.2 Bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{r}_{OB}$ vom Punkt O zum Punkt B und daraus die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_B$ des Punktes B bezüglich der $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ -Basisvektoren.

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{OB} &= \ell \sin(\varphi) \mathbf{e}_x + R \mathbf{e}_y \\ \mathbf{v}_B &= \ell \cos(\varphi) \dot{\varphi} \mathbf{e}_x\end{aligned}$$

2.3 Bestimmen Sie den kinematischen Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\psi}$ des Rades und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Führungstange.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B^{\text{St}} &\stackrel{!}{=} \mathbf{v}_B^{\text{Rad}} \\ \mathbf{v}_B^{\text{Rad}} &= R \dot{\psi} \mathbf{e}_x\end{aligned}$$

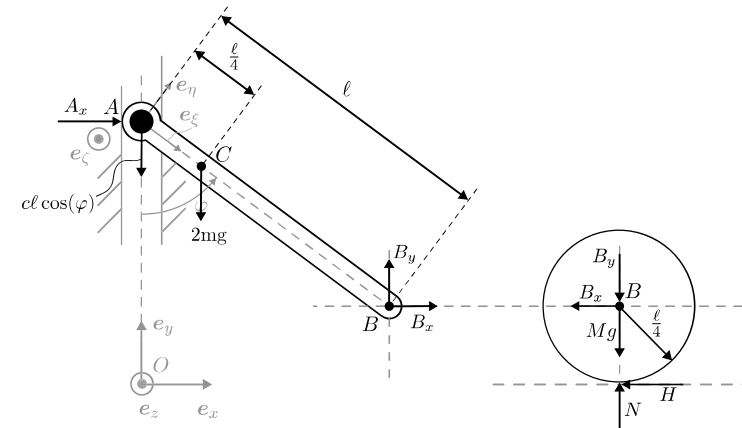
$$\leadsto \dot{\psi} = \frac{\ell}{R} \cos(\varphi) \dot{\varphi}$$

Für den Sonderfall $m_S = m$ und $R = \frac{\ell}{4}$ ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{AC} &= \frac{\ell}{4} \mathbf{e}_\xi \\ J_C &= \frac{5}{24} m \ell^2 \\ \mathbf{a}_C &= \frac{\ell}{4} (\cos(\varphi) \ddot{\varphi} - \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_x - \frac{\ell}{4} (\sin(\varphi) \ddot{\varphi} + \cos(\varphi) \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_y \\ \ddot{\psi} &= 4 \cos(\varphi) \ddot{\varphi} - 4 \sin(\varphi) \dot{\varphi}^2,\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}_C$ die Beschleunigung des Massenmittelpunktes C der Führungstange beschreibt. Betrachten Sie in den folgenden Teilaufgaben diesen Sonderfall mit den gegebenen Zwischenergebnissen und verwenden Sie nicht Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe 2.1 und 2.3.

2.4 Schneiden Sie die Stange und das Rad im Sinne Newtons einzeln frei und tragen Sie sämtliche eingprägten Kräfte und Reaktionskräfte in die gegebene Skizze ein.



2.5 Bestimmen Sie durch Auswertung der Impuls- und Drehimpulsbilanzen die 6 benötigten Gleichungen zur Bestimmung aller Reaktionskräfte und der Bewegungsgleichung des Systems.

Hinweis: Das Gleichungssystem muss nicht nach den Reaktionskräften bzw. der Bewegungsgleichung aufgelöst werden.

Stab:

$$\text{x: } 2m\frac{\ell}{4}(\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - \sin(\varphi)\dot{\varphi}^2) = A + B_x$$

$$\text{y: } -2m\frac{\ell}{4}(\sin(\varphi)\ddot{\varphi} + \cos(\varphi)\dot{\varphi}^2) = -2mg - c\ell\cos(\varphi) + B_y$$

$$\hat{\text{C: }} \frac{5}{24}m\ell^2\ddot{\varphi} = c\ell\cos(\varphi)\frac{\ell}{4}\sin(\varphi) - A\frac{\ell}{4}\cos(\varphi) + B_y\frac{3}{4}\ell\sin(\varphi) + B_x\frac{3}{4}\ell\cos(\varphi)$$

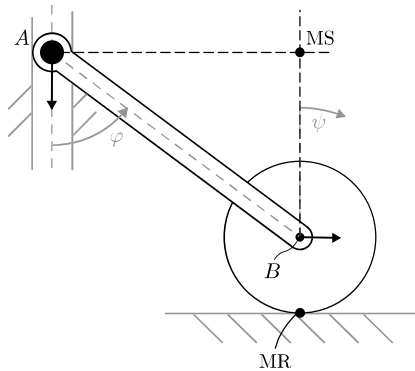
Rad:

$$\text{x: } M\ell(\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - \sin(\varphi)\dot{\varphi}^2) = -B_x - H$$

$$\text{y: } 0 = N - Mg - B_y$$

$$\hat{\text{B: }} -\frac{1}{2}M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2(4\cos(\varphi)\ddot{\varphi} - 4\sin(\varphi)\dot{\varphi}^2) = -H \cdot \frac{\ell}{4}$$

2.6 Zeichnen Sie in die gegebene Skizze die Lage des Momentanpols MS der Führungsstange und die Lage des Momentanpols MR des Rads ein.



Aufgabe 3

3.1 Berechnen Sie mithilfe des Energiesatzes die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ des Pendels kurz vor dem Stoß in der Lage $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wenn das Pendel vorher zu $\varphi = 0$ vorgespannt und ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen wird.

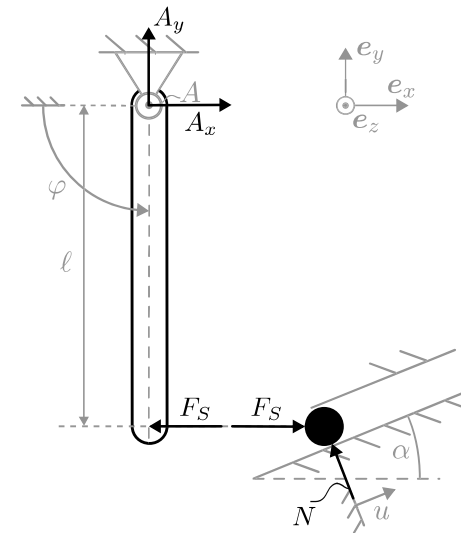
$$T_0 = 0 \quad T_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}m\ell^2 \cdot \dot{\varphi}_0^2$$

$$V_0 = mg\ell + \frac{1}{2}c_d\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \quad V_1 = mg\frac{\ell}{2}$$

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\rightsquigarrow \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{3mg\ell + \frac{3}{4}c_d\pi^2}{m\ell^2}}$$

3.2 Schneiden Sie das Pendel und den Massenpunkt zum Stoßzeitpunkt frei und tragen Sie alle stoßrelevanten Kräfte, und nur diese, in die gegebene Skizze ein.



Im Folgenden ist die Winkelgeschwindigkeit des Pendels unmittelbar vor dem Stoß mit $\dot{\varphi} = \omega$ gegeben. Nutzen Sie in den folgenden Teilaufgaben dieses Zwischenergebnis und nicht ihr Ergebnis aus der ersten Teilaufgabe.

3.3 Nutzen Sie die Stoßzahlgleichung, um eine kinematische Bedingung für die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \Omega$ des Pendels nach dem Stoß in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω vor dem Stoß und der Geschwindigkeit $\dot{u} = V$ des Massenpunktes nach dem Stoß anzugeben.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{V_{1n} - V_{2n}}{v_{1n} - \underbrace{v_{2n}}_{=0}} \\ &= -\frac{\ell\Omega - V\cos(\alpha)}{\ell\omega}\end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \ell\omega\varepsilon = V\cos(\alpha) - \ell\Omega$$

$$\Rightarrow \Omega = \frac{V}{\ell}\cos(\alpha) - \varepsilon\omega \quad (1) \quad \text{mit } \varepsilon = 1, \text{ da vollelastisch}$$

3.4 Berechnen Sie die Winkelgeschwindigkeit Ω des Pendels und die Geschwindigkeit V des Massenpunktes nach dem Stoß in Abhängigkeit der Systemgrößen vor dem Stoß. Nutzen Sie die Impuls- und Drehimpulsgleichungen.

Pendel:

$$\hat{A}: \int_{\Delta t} -F_S \ell dt = J_A (\Omega - \omega) \stackrel{(1)}{=} J_A \left(\frac{V}{\ell} \cos(\alpha) - 2\omega \right) \quad (2)$$

MP:

$$u: \int_{\Delta t} F_S \cos(\alpha) dt = MV \quad (3)$$

$$(2) \cdot \cos(\alpha) + (3) \cdot \ell:$$

$$0 = J_A \left(\frac{V}{\ell} \cos^2(\alpha) - 2\omega \cos(\alpha) \right) + MV\ell$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow V &= \frac{J_A \ell \cos(\alpha) \cdot 2}{J_A \cos^2(\alpha) + M\ell^2} \omega \quad \text{mit } J_A = \frac{1}{3}m\ell^2 \\ &= \frac{2m\ell \cos(\alpha)}{m \cos^2(\alpha) + 3M} \omega \\ \Omega &= \frac{2m \cos^2(\alpha)}{m \cos^2(\alpha) + 3M} \omega - \omega \\ &= \frac{m \cos^2(\alpha) - 3M}{m \cos^2(\alpha) + 3M} \omega\end{aligned}$$

3.5 Wie muss das Verhältnis $\frac{M}{m}$ gewählt werden, damit sich das Pendel unmittelbar nach dem Stoß in Ruhe befindet?

$$\Omega \stackrel{!}{=} 0$$

$$\rightsquigarrow m \cos^2(\alpha) = 3M$$

$$\Leftrightarrow \frac{M}{m} = \frac{\cos^2(\alpha)}{3}$$

Aufgabe 4

- 4.1 Bestimmen Sie den Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ des Starrkörpers bezüglich des Inertialsystems. Geben Sie Ihr Ergebnis in Abhängigkeit der $\{\mathbf{e}_{x''}, \mathbf{e}_{y''}, \mathbf{e}_{z''}\}$ -Basisvektoren an.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot{\alpha}\mathbf{e}_{z'} + \dot{\varphi}\mathbf{e}_{y''} + \omega\mathbf{e}_{z''} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_{z'} = \cos(\varphi)\mathbf{e}_{z''} - \sin(\varphi)\mathbf{e}_{x''} \\ &= -\dot{\alpha}\sin(\varphi)\mathbf{e}_{x''} + \dot{\varphi}\mathbf{e}_{y''} + (\dot{\alpha}\cos(\varphi) + \omega)\mathbf{e}_{z''}\end{aligned}$$

- 4.2 Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_C$ des Starrkörper-Massenmittelpunkts C und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_m$ des Massenpunkts m bezüglich der Basisvektoren $\{\mathbf{e}_{x''}, \mathbf{e}_{y''}, \mathbf{e}_{z''}\}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_C &= \ell\dot{\varphi}\mathbf{e}_{x''} + \dot{\alpha}\ell\sin(\varphi)\mathbf{e}_{y''} \\ \mathbf{v}_m &= -a\dot{\varphi}\mathbf{e}_{x''} - \dot{\alpha}a\sin(\varphi)\mathbf{e}_{y''}\end{aligned}$$

- 4.3 Bestimmen Sie die kinetische Energie T des Gesamtsystems.

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2}M\mathbf{v}_C^2 + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_m^2 \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -A\dot{\alpha}\sin(\varphi) \\ A\dot{\varphi} \\ B(\dot{\alpha}\cos(\varphi) + \omega) \end{pmatrix}_{\mathbf{e}_{0''}} \\ &= \frac{1}{2}(A\dot{\alpha}^2\sin^2(\varphi) + A\dot{\varphi}^2 + B(\dot{\alpha}\cos(\varphi) + \omega)^2) \\ &\quad + \frac{1}{2}M\ell^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2\sin^2(\varphi)) \\ &\quad + \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2\sin^2(\varphi))\end{aligned}$$

- 4.4 Bestimmen Sie die potentielle Energie V des Gesamtsystems in Abhängigkeit von φ . Geben Sie dazu das verwendete Nullniveau des Schwerepotentials an.

$$\text{NN: } \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$V = Mgl\cos(\varphi) - mga\cos(\varphi) + \frac{1}{2}c_d\varphi^2$$

- 4.5 Bestimmen Sie die virtuelle Arbeit δW der Widerstandskraft $\mathbf{F}_w$, welche auf den Massenpunkt wirkt.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_w &= -k_w|\mathbf{v}_m|\mathbf{v}_m \\ &= -k_w\sqrt{a^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\alpha}^2a^2\sin^2(\varphi)}(-a\dot{\varphi}\mathbf{e}_{x''} - a\sin(\varphi)\dot{\alpha}\mathbf{e}_{y''})\end{aligned}$$

$$\delta\mathbf{r}_m = -a\delta\varphi\mathbf{e}_{x''} - a\sin(\varphi)\delta\alpha\mathbf{e}_{y''}$$

$$\begin{aligned}\delta W &= \mathbf{F}_w \cdot \delta\mathbf{r}_m \\ &= -k_w a^3 \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \sin^2(\varphi)\dot{\alpha}^2} (\dot{\varphi}\delta\varphi + \sin^2(\varphi)\dot{\alpha}\delta\alpha)\end{aligned}$$

Im Folgenden wird angenommen, dass die Winkelgeschwindigkeit der Buchse konstant als $\dot{\alpha} = \Omega$ vorgegeben ist.

4.6 Geben Sie mithilfe der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate φ an.

$$L = T - V:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi} = & A\Omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + B(\Omega \cos(\varphi) + \omega)(-\Omega \sin(\varphi)) \\ & + M\ell^2 \Omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) + ma^2 \Omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ & + Mgl \sin(\varphi) - mga \sin(\varphi) - c_d \varphi \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = A\dot{\varphi} + M\ell^2 \dot{\varphi} + ma^2 \dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (A + M\ell^2 + ma^2) \ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi:$$

$$\begin{aligned} & (A + M\ell^2 + ma^2) \ddot{\varphi} + c_d \varphi + g \sin(\varphi) [ma - M\ell] \\ & - \Omega^2 \sin(\varphi) \cos(\varphi) [A + M\ell^2 + ma^2 - B] + B\omega \Omega \sin(\varphi) \\ & = -k_w a^3 \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \sin^2(\varphi) \Omega^2} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

4.7 Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung in der Koordinate φ um die Ruhelage $\varphi = \dot{\varphi} = 0$.

$$\begin{aligned} & (A + M\ell^2 + ma^2) \ddot{\varphi} \\ & + [c_d + mga - Mgl + B\Omega(\Omega + \omega) - \Omega^2(A + M\ell^2 + ma^2)] \varphi = 0 \end{aligned}$$