

Bewegung

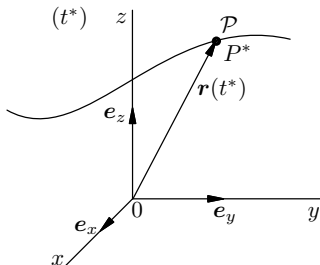
Szenario: raumfestes Bezugssystem, Massenpunkt \mathcal{P}

Definition (Bewegung eines Massenpunkts)

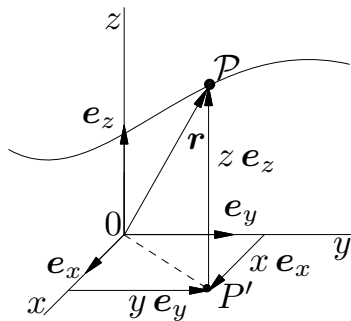
Eine Funktion

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \text{ mit } t \in Z_t,$$

die einem Massenpunkt \mathcal{P} zu jedem Zeitpunkt t des betrachteten Zeitintervalls Z_t einen Ort P mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zuordnet, wird die **kinematische Bewegungsgleichung** oder kurz die **Bewegung** von \mathcal{P} (in dem Zeitintervall Z_t) genannt.

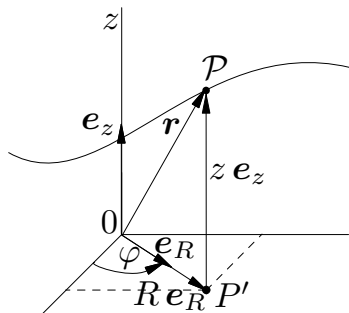


Darstellung der Bewegung in kartesischen Koordinaten



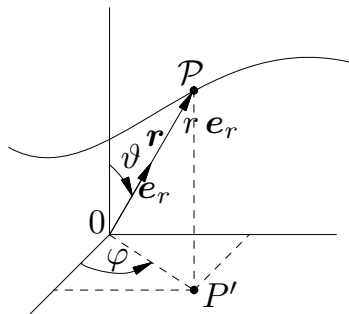
$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{e}_x + y(t) \mathbf{e}_y + z(t) \mathbf{e}_z$$

Darstellung der Bewegung in zylindrischen Koordinaten



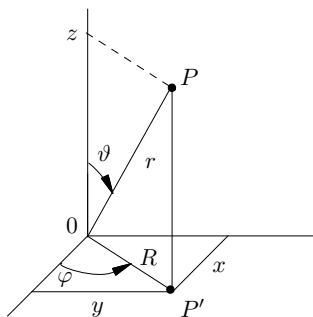
$$\mathbf{r}(t) = R(t) \mathbf{e}_R(\varphi(t)) + z(t) \mathbf{e}_z$$

Darstellung der Bewegung in sphärischen Koordinaten



$$\mathbf{r}(t) = r(t) \mathbf{e}_r(\vartheta(t), \varphi(t))$$

Koordinatentransformationen



1. Übergang von R, φ, z zu x, y, z :

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = z.$$

2. Übergang von r, ϑ, φ zu R, φ, z :

$$R = r \sin \vartheta; \quad z = r \cos \vartheta; \quad \varphi = \varphi.$$

3. Übergang von r, ϑ, φ zu x, y, z :

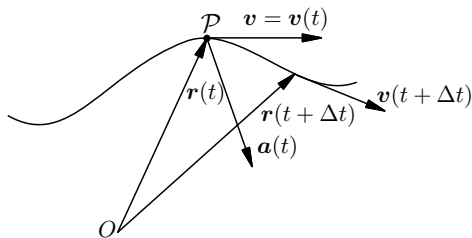
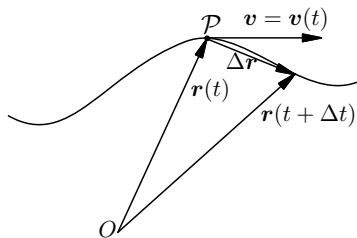
$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \cos \vartheta.$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung in orthogonalen Koordinatensystemen

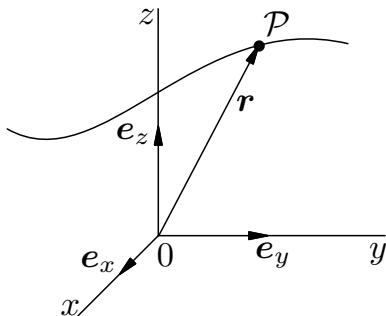
Geschwindigkeit: Maß der Änderung der Bewegung in der Zeit.

Beschleunigung: Maß der Änderung der Geschwindigkeit in der Zeit.

→ vektorwertige Funktionen der Zeit

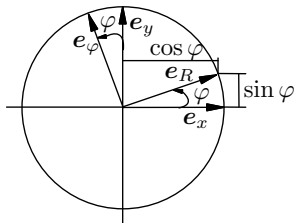
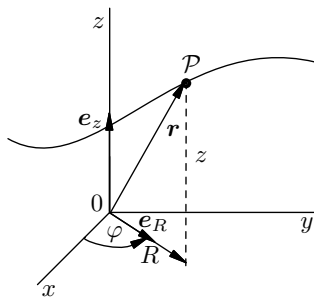


Darstellung in kartesischen Koordinaten



- Bewegung: $\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$
- Geschwindigkeit: $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z$
 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$
- Beschleunigung: $\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z$
 $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

Darstellung in zylindrischen Koordinaten



Ortsvektor $\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R + z \mathbf{e}_z$ mit

$$\mathbf{e}_R = (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_R(\varphi)$$

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\varphi(\varphi)$$

Ableitungen der Basisvektoren:

$$\dot{\mathbf{e}}_R = (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = (-\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R$$

Darstellung in zylindrischen Koordinaten

$$\dot{\mathbf{e}}_R = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \quad \dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R$$

- Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}$$

- Beschleunigung:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{R} \mathbf{e}_R + \dot{R} \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \ddot{R} \mathbf{e}_R + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \dot{\varphi} (-\dot{\varphi}) \mathbf{e}_R + \ddot{z} \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \right) \mathbf{e}_R + \left(2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z$$

und

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\left(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2 \right)^2 + \left(2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi} \right)^2 + \ddot{z}^2}$$

Spezialfall: Bewegung in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi$ -Ebene

Hier $z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$:

$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R$$

$$\mathbf{v} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a} = \left(\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2 \right) \mathbf{e}_R + \left(2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{R}^2 + (R \dot{\varphi})^2}$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\left(\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2 \right)^2 + \left(2\dot{R} \dot{\varphi} + R \ddot{\varphi} \right)^2}$$

Spezialfall: Kreisbewegung

Hier zusätzlich $R = R_0 = \text{const.}$:

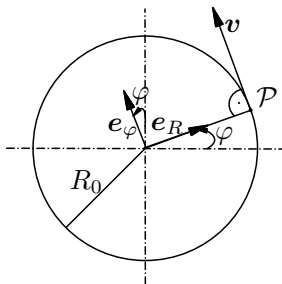
$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_R$$

$$\mathbf{v} = R_0 \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \text{ und } \|\mathbf{v}\| = R_0 |\dot{\varphi}| \text{ (} R_0 \geq 0 \text{)}$$

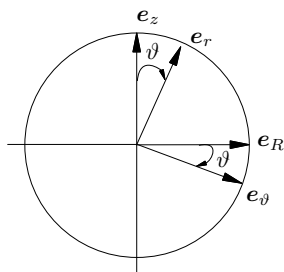
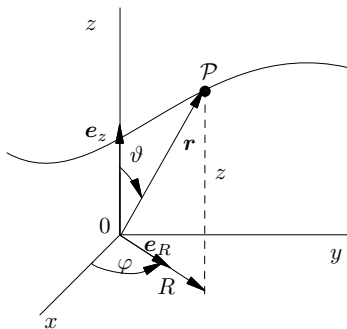
$$\mathbf{a} = -R_0 \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \text{ und } \|\mathbf{a}\| = R_0 \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}$$

$\omega := \dot{\varphi}$ heißt **Winkelgeschwindigkeit**

$\alpha := \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ heißt **Winkelbeschleunigung**



Darstellung in sphärischen Koordinaten



Ortsvektor $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi)$ mit

$$\mathbf{e}_r = \sin \vartheta \mathbf{e}_R + \cos \vartheta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \mathbf{e}_R - \sin \vartheta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_R = \sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta$$

Darstellung in sphärischen Koordinaten

$$\mathbf{e}_r = \sin \vartheta \mathbf{e}_R + \cos \vartheta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \mathbf{e}_R - \sin \vartheta \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_R = \sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta$$

Ableitungen der Basisvektoren:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \sin \vartheta \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{e}_R - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{e}_R - \sin \vartheta \mathbf{e}_z) \\ &= \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_\vartheta &= \cos \vartheta \dot{\mathbf{e}}_R - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_R - \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{e}_z = \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} (\sin \vartheta \mathbf{e}_R + \cos \vartheta \mathbf{e}_z) \\ &= \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R = -\dot{\varphi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)$$

Darstellung in sphärischen Koordinaten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_r &= \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta, & \dot{\mathbf{e}}_\vartheta &= \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_r, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta)\end{aligned}$$

- Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &:= \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\dot{r}^2 + (r \sin \vartheta \dot{\varphi})^2 + (r \dot{\vartheta})^2}\end{aligned}$$

- Beschleunigung:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &:= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \sin \vartheta \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \dot{r} \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \dot{\vartheta} \dot{\mathbf{e}}_\vartheta = a_r \mathbf{e}_r + a_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi \\ a_r &= \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta\end{aligned}$$

mit

$$a_\vartheta = 2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta$$

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + r\ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\vartheta^2 + a_\varphi^2}$$

Beispiel

$$\vartheta = \frac{\pi}{2}: \sin \vartheta = 1, \cos \vartheta = 0, \dot{\vartheta} = 0$$

$$r = R, \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_R$$

Damit:

$$\mathbf{v} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi$$

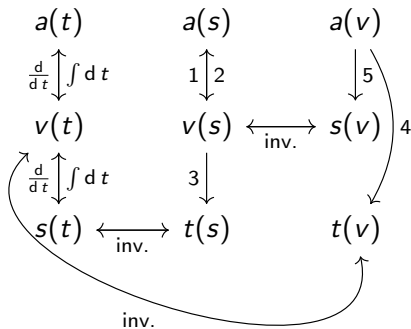
→ Geschwindigkeit und Beschleunigung in Polarkoordinaten

Quiz



<https://pingo.scc.kit.edu/822452>

Kinematische Grundaufgaben



$$\textcircled{1} \quad a(s) = \frac{dv}{ds} v(s) = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (v(s))^2$$

$$\textcircled{2} \quad v(s) = \pm \sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^s a(\bar{s}) d\bar{s}}$$

$$\textcircled{3} \quad t(s) = t_0 + \int_{s_0}^s \frac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$$

$$\textcircled{4} \quad t(v) = t_0 + \int_{v_0}^v \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

$$\textcircled{5} \quad s(v) = s_0 + \int_{v_0}^v \frac{\bar{v} d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$