Massenpunktkinematik

Geschwindigkeit und Beschleunigung in der begleitenden Basis der Bewegungsbahn

---

Definition (Bahn)
Die Menge aller Punkte P, die durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{r}$ der kinematischen Bewegungsgleichung $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ eines Massenpunkts $\mathcal{P}$ bestimmt sind, wird die **Bahnkurve** *oder kurz die* **Bahn** *von $\mathcal{P}$ genannt.*

Beispiel: Kondensstreifen eines Flugzeugs

- Die Bahn ist das Ergebnis einer Bewegung.
- Die Bahn ist eine Raumkurve.
- Die Bahn lässt sich als Funktion $\bar{\boldsymbol{r}}(\lambda)$ eines Parameters λ darstellen.
- Parameterwechsel der Bahn erfordert eine stetige, bijektive und monoton wachsende Abbildung zwischen den Parametrisierungen.

Parametrisierung nach der Bogenlänge

Definition (Bogenlänge)
Es sei $\bar{\boldsymbol{r}}(\lambda)$ die Bahn eines Massenpunkts $\mathcal{P}$. Die Funktion

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \|\bar{\boldsymbol{r}}'(\tilde{\lambda})\| \,\mathrm{d}\,\tilde{\lambda}$$

heißt die **Bogenlänge** *der Bahn, wobei der Strich die Ableitung nach λ kennzeichnet.*

Notation: $\hat{\boldsymbol{r}}(s(t)) = \boldsymbol{r}(t)$.

Begleitende Basis

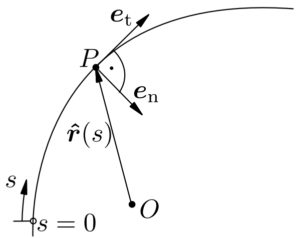
Definition (Begleitende Basis)
Es sei $\hat{\boldsymbol{r}}(s)$ *eine nach der Bogenlänge* s *parametrisierte Bahn und* $\frac{\mathrm{d}^2\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,s^2} \neq \mathbf{0}$.

$$\textit{Der } \textbf{Tangenteneinsvektor } \boldsymbol{e}_\mathrm{t} := \frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,s},$$

$$\textit{der } \textbf{Hauptnormaleneinsvektor } \boldsymbol{e}_\mathrm{n} := \frac{\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}\,s}}{\left\|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_t}{\mathrm{d}\,s}\right\|}$$

$$\textit{und der } \textbf{Binormaleneinsvektor } \boldsymbol{e}_\mathrm{b} := \boldsymbol{e}_\mathrm{t} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{n}$$

bilden die **begleitende Basis** *der Bahn.*

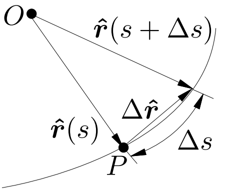


Orthogonalität der begleitenden Basis

Satz (Orthonormalität der begleitenden Basis)
Sei $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\,s} \neq \mathbf{0}$*, dann bilden* $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}$ *eine Orthonormalbasis.*

Beweis:
Bilde

$$\|\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}\| = \|\frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,s}\| = \|\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \hat{\boldsymbol{r}}}{\Delta s}\| = \|\frac{\lim_{\Delta s \to 0} \Delta \hat{\boldsymbol{r}}}{\lim_{\Delta s \to 0} \Delta s}\| = 1$$



$\to$ $\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$ Einsvektor

Orthogonalität der begleitenden Basis

Differenziere $1 = \|\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\|^2 = \boldsymbol{e}_\mathrm{t} \cdot \boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ nach s:

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} \cdot \boldsymbol{e}_\mathrm{t} + \boldsymbol{e}_\mathrm{t} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} \cdot \boldsymbol{e}_\mathrm{t} = 0.$$

$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} \perp \boldsymbol{e}_\mathrm{t}$, da $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} \neq \mathbf{0}$ vorausgesetzt

Daher $\boldsymbol{e}_\mathrm{n} := \frac{\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s}}{\|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s}\|} \perp \boldsymbol{e}_\mathrm{t}$, ferner $\|\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\| = 1$.

$\boldsymbol{e}_\mathrm{b} := \boldsymbol{e}_\mathrm{t} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ zu $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$, $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ orthogonal und

$$\|\boldsymbol{e}_\mathrm{b}\| = \|\boldsymbol{e}_\mathrm{t} \times \boldsymbol{e}_\mathrm{n}\| = \|\boldsymbol{e}_\mathrm{t}\|\|\boldsymbol{e}_\mathrm{n}\| \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

Krümmung

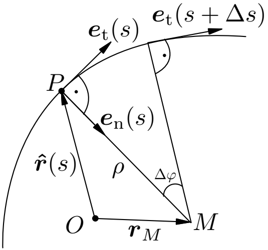
Definition (Schmiegebene, Krümmung, Krümmungsradius)
Die durch $\boldsymbol{e}_\mathrm{t}$ *und* $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$ *im Punkt* P *aufgespannte Ebene wird* **Schmiegebene** *genannt. Die skalare Größe*

$$K := \left|\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}\right| := \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|$$

wird die **Krümmung** *der Kurve im Punkt* P *genannt. Der Kehrwert*

$$\rho_\mathrm{K} := \frac{1}{K}$$

heißt der **Krümmungsradius** *der Kurve im Punkt* P.

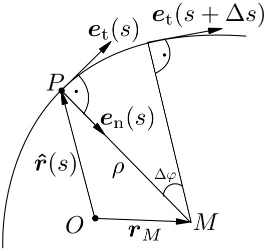


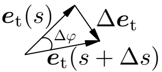
Krümmung

Wegen

$$\|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s}\| = \|\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,\varphi}\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}\| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\|\frac{\Delta\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\Delta\varphi}\||\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}| = \lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2\cdot 1\cdot\sin\frac{|\Delta\varphi|}{2}}{2\frac{|\Delta\varphi|}{2}}|\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}|$$

$$= 1|\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,s}| = K \text{ ist } \boldsymbol{e}_\mathrm{n} = \frac{1}{K}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s} = \rho_\mathrm{K}\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_\mathrm{t}}{\mathrm{d}\,s}$$





Geschwindigkeit, Beschleunigung

- Geschwindigkeit:

$$\boldsymbol{v} := \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\hat{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}\,s}\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = \dot{s}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}},$$

  also

$$\boldsymbol{v} = v_{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + 0\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + 0\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}}.$$

  Bahngeschwindigkeit: $\|\boldsymbol{v}\| = |v_{\mathrm{t}}| = \dot{s} \geq 0$

- Beschleunigung:

$$\boldsymbol{a} := \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \dot{s}\,\dot{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{t}} = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \dot{s}\,\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}}{\mathrm{d}\,s}\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t} = \ddot{s}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + \frac{\dot{s}^2}{\rho_{\mathrm{K}}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}},$$

  also

$$\boldsymbol{a} = a_{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}} + a_{\mathrm{n}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}} + 0\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{b}} \text{ mit } a_{\mathrm{t}} := \dot{v}_{\mathrm{t}} = \ddot{s} \text{ und } a_{\mathrm{n}} := \frac{\dot{s}^2}{\rho_{\mathrm{K}}}.$$

  Bahnkomponente: $a_{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{t}}$
  Normalkomponente: $a_{\mathrm{n}}\,\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}},\ a_{\mathrm{n}} \geq 0$
  Bahnbeschleunigung: $\|\boldsymbol{v}\|^{\boldsymbol{\cdot}} = \ddot{s} = a_{\mathrm{t}} \gtreqless 0$

Massenpunktkinematik

Geschwindigkeit und Beschleunigung in bewegten Bezugssystemen

bewegtes Bezugssystem häufig zweckmäßiger

Zeitableitung muss berücksichtigen:

1. Zeitliche Änderung des Bezugspunktes des Bezugssystems.
2. Zeitliche Änderung der Basisvektoren des Bezugssystems.
3. Zeitliche Änderung der Koordinaten des Ortsvektors im bewegten Bezugssystem.

1. und 2. erfordern Referenz(Inertial-)system!
für 2.: Euler-Poissonschen Differentiationsformel

Euler-Poissonsche Differentiationsformel

Satz (Euler-Poissonsche Differentiationsformel)
Es sei $\boldsymbol{b}(\lambda)$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion mit positivem konstanten Betrag ($\|\boldsymbol{b}(\lambda)\| = const. > 0$ für alle Werte λ). Dann existiert eine Vektorfunktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, so dass $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} = \boldsymbol{\omega}(\lambda) \times \boldsymbol{b}(\lambda)$.

Beweis:
Wegen const. $= \|\boldsymbol{b}\|^2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}$ ist
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} = 2\boldsymbol{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}$. Also $\boldsymbol{b} \perp \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}$ oder $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} = \mathbf{0}$.
Bilde $(\boldsymbol{b} \times \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}) \times \boldsymbol{b} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}\,(\underbrace{\boldsymbol{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}}_{0}) = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}\|\boldsymbol{b}\|^2$.

$$\boldsymbol{\omega}(\lambda) = \frac{\boldsymbol{b} \times \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$$

Jede Funktion $\boldsymbol{\omega}^*(\lambda) = \boldsymbol{\omega}(\lambda) + \mu\boldsymbol{b}(\lambda)$ liefert $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} = \boldsymbol{\omega}^*(\lambda) \times \boldsymbol{b}$.

Eindeutigkeit von $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$

I. Allg. $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$ **nicht** eindeutig, sondern Gerade durch $\frac{\boldsymbol{b}\times\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda}}{\|\boldsymbol{b}\|^2}$ in Richtung $\boldsymbol{b}$

Aber: Eindeutigkeit bei starr gedrehtem Dreieck

Satz (Eindeutigkeit der Funktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$)
Es seien $\boldsymbol{b}(\lambda)$, $\boldsymbol{c}(\lambda)$ linear unabhängige differenzierbare vektorwertige Funktionen mit positivem konstanten Betrag ($\|\boldsymbol{b}(\lambda)\| = const. > 0$, $\|\boldsymbol{c}(\lambda)\| = const. > 0$ für alle Werte λ). Es sei ferner $\|\boldsymbol{c}(\lambda) - \boldsymbol{b}(\lambda)\| = const. > 0$. Dann existiert genau eine vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, so dass

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b} \text{ und } \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}\,\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}.$$

Eindeutigkeit von $\omega(\lambda)$

Beweis:
$\|\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}\| = \text{const.}$ ableiten: $0 = (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{c} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{b}}{\mathrm{d}\,\lambda} + \boldsymbol{b} \cdot \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{c}}{\mathrm{d}\,\lambda} = 0$

Einsetzen der Differentiationsformeln: $\boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{\omega}_b \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \boldsymbol{c}) = 0$

Deuten als Spatprodukt: $(\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b) \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}) = 0$

Der Vektor $\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b$ steht auf $\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$ senkrecht,
er lässt sich in eindeutige Anteile in Richtung $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ zerlegen:

$$\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b = \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c}$$

Damit auch $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c - \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{\omega}_b + \beta \boldsymbol{b}$ eindeutig.