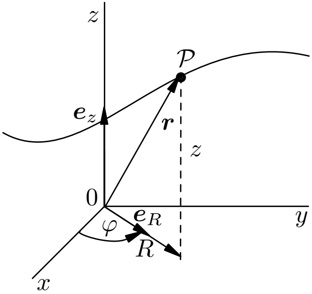
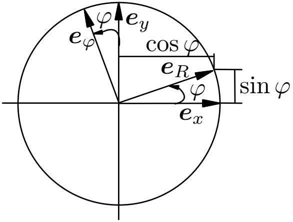
Drehgeschwindigkeit

Definition (Drehgeschwindigkeit)
Es seien $\boldsymbol{b}(t)$, $\boldsymbol{c}(t)$ *linear unabhängige differenzierbare vektorwertige Funktionen der Zeit* t *und es gelte* $\|\boldsymbol{b}(t)\| = const. > 0$, $\|\boldsymbol{c}(t)\| = const. > 0$ *sowie* $\|\boldsymbol{c}(t) - \boldsymbol{b}(t)\| = const. > 0$. *Dann heißt die eindeutige vektorwertige Funktion* $\boldsymbol{\omega}(t)$, *für die* $\dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{b}$ *und* $\dot{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}$ *gilt, die* **Drehgeschwindigkeit**.

Beispiel: zylindrische Koordinaten



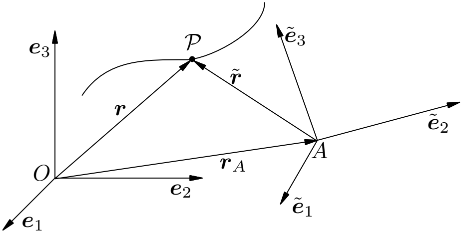


Drehgeschwindigkeit: $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_z$
Damit

$$\dot{\boldsymbol{e}}_R = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_R = \dot{\varphi}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_R) = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\varphi) = -\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_R$$

Ortsvektor



raumfestes Bezugssystem $O, \boldsymbol{e}_i,\ i = 1, 2, 3$
bewegtes Bezugssystem $A, \tilde{\boldsymbol{e}}_i,\ i = 1, 2, 3$
Ortsvektor: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_A(t) + \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \sum_{i=1}^{3} \tilde{x}_i(t)\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) = \tilde{x}_i(t)\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$$

Geschwindigkeit

Ortsvektor: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}_A(t) + \tilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}_A(t) + \tilde{x}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$

Geschwindigkeitsanteile:

1. Änderung des Bezugspunktes des Bezugssystems: $\dot{\boldsymbol{r}}_A(t)$
2. Änderung der Basisvektoren des Bezugssystems: $\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$
3. Änderung der Koordinaten im bewegten Bezugssystem: $\dot{\tilde{x}}_i(t)$

Daher

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \dot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \tilde{x}_i(t)\,\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) \\
&= \dot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \tilde{x}_i(t)\,\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) \\
&= \dot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{x}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) \\
&= \dot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) \\
&=: \boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}
\end{aligned}$$

Geschwindigkeit

Definition (Führungsgeschwindigkeit, Relativgeschwindigkeit)
Es sei $\boldsymbol{r}(t)$ *eine Bewegung des Massenpunkts* $\mathcal{P}$ *und* $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ *der Ortsvektor von* $\mathcal{P}$ *in einem bewegten Bezugssystem* A, $\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$ *und Drehgeschwindigkeit* $\boldsymbol{\omega}$. *Der Anteil*

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{F}} := \dot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t)$$

heißt **Führungsgeschwindigkeit** *und der Anteil*

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} := \dot{\tilde{x}}_i(t)\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$$

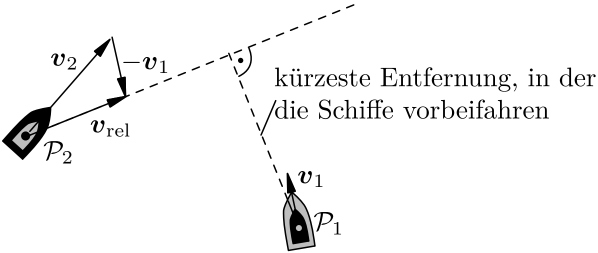
Relativgeschwindigkeit *des Massenpunkts.*

Führungsgeschwindigkeit: Geschwindigkeit, wenn der Massenpunkt relativ zum bewegten Bezugsystem ruhen würde. Translatorischer und rotatorischer Anteil.

Relativgeschwindigkeit: Geschwindigkeit des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem.

Beispiel

Bewegung zweier Schiffe ($\mathcal{P}_1$ und $\mathcal{P}_2$) mit gegebener Anfangslage und konstanten Geschwindigkeiten $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$. Welche Relativgeschwindigkeit beobachtet ein Passagier auf $\mathcal{P}_1$?



$$\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$$

Beschleunigung

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{F}} = \ddot{\boldsymbol{r}}_A(t) + (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t))^{\cdot} = \ddot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}})$$

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{rel}} = \ddot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t)\,\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i(t) = \ddot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t) + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$$

Insgesamt (mit $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$):

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} + \ddot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$$

Definition (Führungs-, Coriolis-, Relativbeschleunigung)
Es sei $\boldsymbol{r}(t)$ eine Bewegung des Massenpunkts $\mathcal{P}$ und $\tilde{\boldsymbol{r}}(t)$ der Ortsvektor von $\mathcal{P}$ in einem bewegten Bezugssystem. Der Anteil

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{F}} := \ddot{\boldsymbol{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}}(t))$$

heißt **Führungsbeschleunigung**, *der Anteil*

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}$$

Coriolisbeschleunigung *und der Anteil*

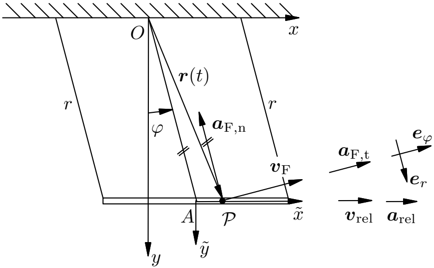
$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{rel}} = \ddot{\tilde{x}}_i(t)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i(t)$$

Relativbeschleunigung *des Massenpunkts.*

Beispiel

Ein Massenpunkt bewegt sich entlang der Koppel eines Parallelkurbelgetriebes. Welche Geschwindigkeit und welche Beschleunigung hat der Massenpunkt?

Beispiel



Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung: Kreisbewegung

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{F}} = r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{a}_{\mathsf{F}} = r\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{e}_r$$

Relativgeschwindigkeit und Relativbeschleunigung:

$$\boldsymbol{v}_{\mathsf{rel}} = \dot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x,\ \boldsymbol{a}_{\mathsf{rel}} = \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$$

Insgesamt:

$$\boldsymbol{v} = r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$$

$$\boldsymbol{a} = r\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{e}_r + \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$$

Beispiel

Transformation auf das raumfeste kartesische Bezugssystem

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\varphi &= \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_x - \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{e}_r &= \sin\varphi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y \\
\tilde{\boldsymbol{e}}_x &= \boldsymbol{e}_x
\end{aligned}$$

Somit

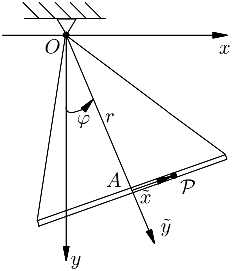
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= r\dot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi + \dot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x = (r\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\tilde{x}})\,\boldsymbol{e}_x + (-r\dot{\varphi}\sin\varphi)\,\boldsymbol{e}_y \\
\boldsymbol{a} &= r\ddot{\varphi}\,\boldsymbol{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2\,\boldsymbol{e}_r + \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x \\
&= (r\ddot{\varphi}\cos\varphi - r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + \ddot{\tilde{x}})\,\boldsymbol{e}_x + (-r\ddot{\varphi}\sin\varphi - r\dot{\varphi}^2\cos\varphi)\,\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}$$

- Ortsvektor $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r + \tilde{x}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x = (r\sin\varphi + \tilde{x})\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\varphi\,\boldsymbol{e}_y$ kann auch direkt abgeleitet werden
- keine Coriolisbeschleunigung, da Koppel stets parallel zur x-Achse

Beispiel

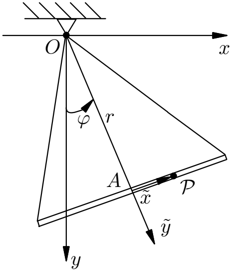
Jetzt: Koppel bewegt sich tangential zur Kreisbahn

Beispiel



- $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \dot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$, wenn $\tilde{\boldsymbol{e}}_x$ entlang der Koppel ausgerichtet ist
- Führungsgeschwindigkeit muss die Bewegung des Bezugspunkts A auf der Kreisbahn **und** die Rotation des A, $\tilde{\boldsymbol{e}}_x$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_y$-Bezugssystems berücksichtigen
- Basisvektoren $\tilde{\boldsymbol{e}}_x$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_y$ fallen mit den Basisvektoren $\boldsymbol{e}_\varphi$ und $\boldsymbol{e}_r$ der Polarkoordinaten zusammen, $\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} = \dot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x = \dot{\tilde{x}}\,\boldsymbol{e}_\varphi$

Beispiel



Wegen

$$\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{x}\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Führungsgeschwindigkeit: $\boldsymbol{v}_\mathsf{F} = r\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - \tilde{x}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$
absolute Geschwindigkeit: $\boldsymbol{v} = (r\dot{\varphi} + \dot{\tilde{x}})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - \tilde{x}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$

Beispiel

Führungsgeschwindigkeit: $\boldsymbol{v}_\mathrm{F} = r\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - \tilde{x}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$

Beschleunigung:
Ableitung der Führungsgeschwindigkeit (mit $\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_x = -\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$, $\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_y = \dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$):

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{F} =& r\ddot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x + r\dot{\varphi}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_x - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y - \tilde{x}\ddot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y - \tilde{x}\dot{\varphi}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_y \\ =& r\ddot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - r\dot{\varphi}^2\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y - \tilde{x}\ddot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y - \tilde{x}\dot{\varphi}^2\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x\end{aligned}$$

Ableitung der Relativgeschwindigkeit:

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\mathrm{rel} = \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x + \dot{\tilde{x}}\,\dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_x = \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$$

Coriolisbeschleunigung: $\boldsymbol{a}_\mathrm{C} = -2\dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$
Führungsbeschleunigung: $\boldsymbol{a}_\mathrm{F} = (r\ddot{\varphi} - \tilde{x}\dot{\varphi}^2)\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - (r\dot{\varphi}^2 + \tilde{x}\ddot{\varphi})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$
Relativbeschleunigung: $\boldsymbol{a}_\mathrm{rel} = \ddot{\tilde{x}}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x$

Insgesamt: $\boldsymbol{a} = (r\ddot{\varphi} - \tilde{x}\dot{\varphi}^2 + \ddot{\tilde{x}})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_x - (r\dot{\varphi}^2 + \tilde{x}\ddot{\varphi} + 2\dot{\tilde{x}}\dot{\varphi})\,\tilde{\boldsymbol{e}}_y$

Bestimmen der Drehgeschwindigkeit

Satz (Drehgeschwindigkeit bei Drehung um eine Achse)
Wird das bewegte Bezugssystem um einen Basisvektor $\boldsymbol{e}$ um den Winkel $\varphi(t)$ gedreht, dann gilt für die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}(t) = \dot{\varphi}\boldsymbol{e}$.

Beweis:
Betrachtung des rotat. Anteils der Führungsgeschwindigkeit, dazu:

- $\mathcal{P}$ bewegt sich auf Kreisbahn um die Drehachse
- keine Bewegung des Bezugspunktes
- o.B.d.A. Zylinderkoordinaten als bewegtes Bezugssystem mit $\boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{e}$

Darstellung allgemeiner Drehungen

Transformation mit Richtungskosinus:

- 9 Richtungskosinus: $\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$
- liefern Transformationsmatrix $T_{ij} = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$, so dass $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T_{ij} \boldsymbol{e}_j$
- Transformationsmatrix ist orthogonal
- Transformation eines Vektors: $\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{r}_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{r}_i T_{ij} \boldsymbol{e}_j =: r_j \boldsymbol{e}_j$,
  mit $r_j = \tilde{r}_i T_{ij} = T^T_{ji} \tilde{r}_i$, somit $\tilde{r}_i = T_{ij} r_j$

6 Nebenbedingungen (Orthonormalbasen):

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_j = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$$

$\rightarrow$ drei Parameter scheinen ausreichend zu sein