Darstellung allgemeiner Drehungen

Transformation mit Richtungskosinus:

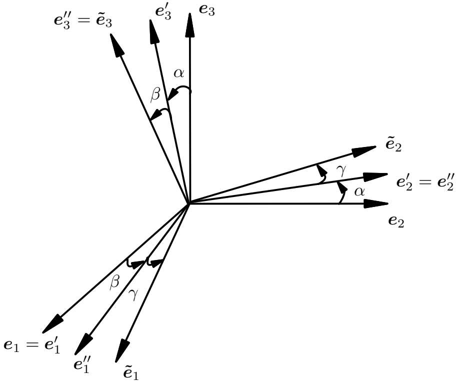
- 9 Richtungskosinus: $\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$
- liefern Transformationsmatrix $T_{ij} = \tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$, so dass $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T_{ij} \boldsymbol{e}_j$
- Transformationsmatrix ist orthogonal
- Transformation eines Vektors: $\tilde{\boldsymbol{r}} = \tilde{r}_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i = \tilde{r}_i T_{ij} \boldsymbol{e}_j =: r_j \boldsymbol{e}_j$,
  mit $r_j = \tilde{r}_i T_{ij} = T^T_{ji} \tilde{r}_i$, somit $\tilde{r}_i = T_{ij} r_j$

6 Nebenbedingungen (Orthonormalbasen):

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i \cdot \tilde{\boldsymbol{e}}_j = \begin{cases} 1\,, & i = j \\ 0\,, & i \neq j \end{cases}$$

$\rightarrow$ drei Parameter scheinen ausreichend zu sein

Kardan-Winkel

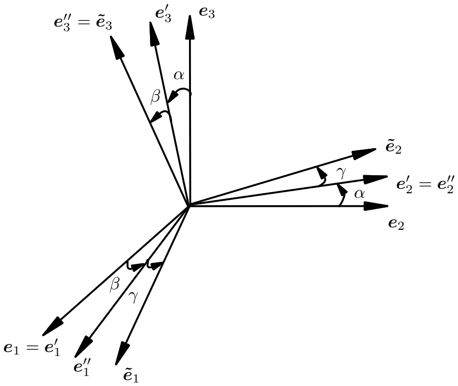


1. Elementardrehung

Winkel α um die $\boldsymbol{e}_1$-Achse

$$\boldsymbol{e}_i' = T_{ij}^{\alpha} \boldsymbol{e}_j, \text{ mit } [T_{ij}^{\alpha}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

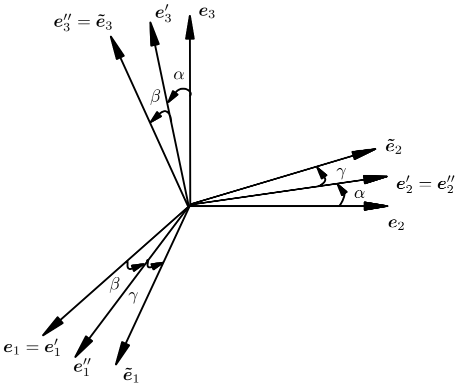
Kardan-Winkel



2. Elementardrehung
Winkel β um die $\boldsymbol{e}_2'$-Achse

$$\boldsymbol{e}_j'' = T_{ij}^{\beta} \boldsymbol{e}_j', \text{ mit } [T_{ij}^{\beta}] = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Kardan-Winkel



3. Elementardrehung
Winkel γ um die $\boldsymbol{e}_3''$-Achse

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T_{ij}^{\gamma} \boldsymbol{e}_j'', \text{ mit } [T_{ij}^{\gamma}] = \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kardan-Winkel

Hintereinanderausführung der Elementardrehungen: $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T^{\mathsf{K}}_{ij} \boldsymbol{e}_j$ mit

$$
\begin{aligned}
T^{\mathsf{K}}_{ij} &= T^{\gamma}_{ik} T^{\beta}_{kl} T^{\alpha}_{lj}, \\
[T^{\mathsf{K}}_{ij}] &= \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Bezeichnung der Elementardrehungen:
Rollen, Nicken, Gieren bzw. Wanken, Stampfen, Schlingern

Linearisierung für kleine Winkel:

$$
[T^{\mathsf{K}}_{ij}] \approx \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}
$$

Bestimmen der Kardan-Winkel aus den Richtungscosinus

$$[T_{ij}^{\mathsf{K}}] = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\gamma & \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma \\ -\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ \sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

- singuläre Lagen für $|\beta| = \frac{\pi}{2}$
- zwei Möglichkeiten für β:

$$\sin\beta = T_{31},\ \cos\beta = \pm\sqrt{1 - T_{31}^2}$$

- damit α:

$$\sin\alpha = -\frac{T_{32}}{\cos\beta},\ \cos\alpha = \frac{T_{33}}{\cos\beta}$$

- und γ:

$$\sin\gamma = -\frac{T_{21}}{\cos\beta},\ \cos\gamma = \frac{T_{11}}{\cos\beta}$$

Kardan-Winkel sind nicht eindeutig!

Additivität der Drehgeschwindigkeit

Satz (Hintereinanderausführung von Drehungen)
Werden zwei Drehungen des Bezugssystems mit Drehgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ und $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ hintereinander ausgeführt, dann addieren sich die Drehgeschwindigkeiten. Die Drehgeschwindigkeit der gesamten Drehung ist dann:
$\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_1(t) + \boldsymbol{\omega}_2(t)$.

Beweis:
Aus $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ folgt $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,t$

1. Drehung: $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,t$, $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r} + \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_1$
2. Drehung:
$\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{r}_1\,\mathrm{d}\,t = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r} + \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_1)\,\mathrm{d}\,t = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,t + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}(\mathrm{d}\,t)^2)$

insgesamt: $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_1 + \mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,t + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{r}\,\mathrm{d}\,t + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{r}(\mathrm{d}\,t)^2)$

also $\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \boldsymbol{r}$

Drehgeschwindigkeit, Kardan-Winkel

Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$:

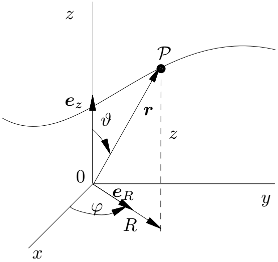
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot\alpha \boldsymbol{e}_1 + \dot\beta \boldsymbol{e}_2' + \dot\gamma \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= \dot\alpha T^{\gamma}_{ik} T^{\beta}_{k1} \tilde{\boldsymbol{e}}_i + \dot\beta T^{\gamma}_{i2} \tilde{\boldsymbol{e}}_i + \dot\gamma \tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \tilde\omega_i \tilde{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned}$$

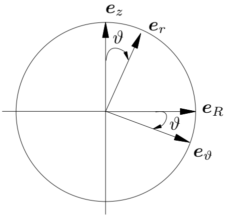
Ergebnis:

$$\begin{aligned}\tilde\omega_1 &= \dot\alpha \cos\beta \cos\gamma + \dot\beta \sin\gamma \\ \tilde\omega_2 &= -\dot\alpha \cos\beta \sin\gamma + \dot\beta \cos\gamma \\ \tilde\omega_3 &= \dot\alpha \sin\beta + \dot\gamma\end{aligned}$$

keine Winkelgeschwindigkeiten!

Beispiel: sphärische Koordinaten





1-Achse: $\boldsymbol{e}_z$, Drehung um $\alpha = \varphi$
2-Achse: $\boldsymbol{e}_x \to \boldsymbol{e}_R$, Drehung um $\beta = 0°$
3-Achse: $\boldsymbol{e}_y \to \boldsymbol{e}_\varphi$, Drehung um $\gamma = \vartheta$

Insgesamt: $(\boldsymbol{e}_z, \boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y) \to (\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\vartheta, \boldsymbol{e}_\varphi)$

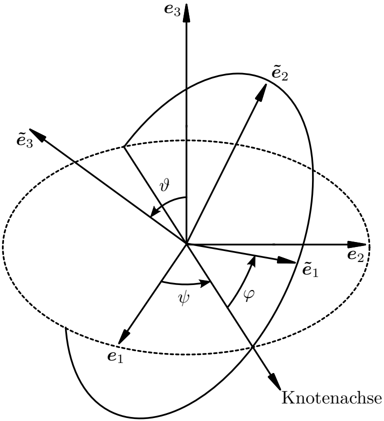
Ergebnis:

$$\omega_r = \tilde{\omega}_1 = \dot{\alpha}\cos\beta\cos\gamma + \dot{\beta}\sin\gamma = \dot{\varphi}\cos\vartheta$$

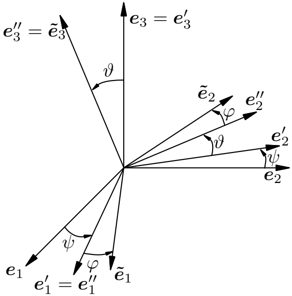
$$\omega_\vartheta = \tilde{\omega}_2 = -\dot{\alpha}\cos\beta\sin\gamma + \dot{\beta}\cos\gamma = -\dot{\varphi}\sin\vartheta$$

$$\omega_\varphi = \tilde{\omega}_3 = \dot{\alpha}\sin\beta + \dot{\gamma} = \dot{\vartheta}$$

Euler-Winkel



Euler-Winkel



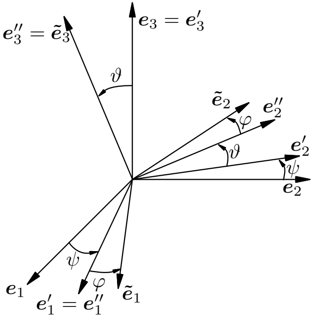
1. Elementardrehung mit ψ um die $\boldsymbol{e}_3$-Achse

$$\boldsymbol{e}_i' = T_{ij}^{\psi} \boldsymbol{e}_j, \text{ mit } [T_{ij}^{\psi}] = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Elementardrehung mit ϑ um die $\boldsymbol{e}_1'$-Achse

$$\boldsymbol{e}_j'' = T_{ij}^{\vartheta} \boldsymbol{e}_j', \text{ mit } [T_{ij}^{\vartheta}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Euler-Winkel



3. Elementardrehung mit φ um die $\boldsymbol{e}_3''$-Achse

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T_{ij}^{\varphi}\,\boldsymbol{e}_j'', \text{ mit } [T_{ij}^{\varphi}] = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euler-Winkel

Hintereinanderausführung der Elementardrehungen: $\tilde{\boldsymbol{e}}_i = T^{\mathsf{E}}_{ij}\boldsymbol{e}_j$ mit

$$T^{\mathsf{E}}_{ij} = T^{\varphi}_{ik}\,T^{\vartheta}_{kl}\,T^{\psi}_{lj}$$

$$[T^{\mathsf{E}}_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Linearisierung für kleine Winkel:

$$[T^{\mathsf{E}}_{ij}] \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi+\varphi & 0 \\ -\varphi-\psi & 1 & \vartheta \\ 0 & -\vartheta & 1 \end{bmatrix}$$

Bestimmen der Euler-Winkel aus den Richtungscosinus

$$[T_{ij}^{\mathrm{E}}] = \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

- singuläre Lagen für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$
- zwei Möglichkeiten für ϑ:

$$\sin\vartheta = \pm\sqrt{1 - T_{33}^2},\ \cos\vartheta = T_{33}$$

- damit ψ:

$$\sin\psi = \frac{T_{31}}{\sin\vartheta},\ \cos\psi = -\frac{T_{32}}{\sin\vartheta}$$

- und φ:

$$\sin\varphi = \frac{T_{13}}{\sin\vartheta},\ \cos\varphi = \frac{T_{23}}{\sin\vartheta}$$

- Knotenachse:

$$\boldsymbol{e}_1' = \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \tilde{\boldsymbol{e}}_3}{\|\boldsymbol{e}_3 \times \tilde{\boldsymbol{e}}_3\|}$$

Euler-Winkel sind nicht eindeutig!

Drehgeschwindigkeit, Euler-Winkel

Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \dot\psi\,\boldsymbol{e}_3 + \dot\vartheta\,\boldsymbol{e}_1' + \dot\varphi\,\boldsymbol{e}_3'' = \dot\psi\,\boldsymbol{e}_3' + \dot\vartheta\,\boldsymbol{e}_1'' + \dot\varphi\,\tilde{\boldsymbol{e}}_3 \\ &= \dot\psi\,T^{\varphi}_{ik}T^{\vartheta}_{k3}\tilde{\boldsymbol{e}}_i + \dot\vartheta\,T^{\varphi}_{i1}\tilde{\boldsymbol{e}}_i + \dot\varphi\,\tilde{\boldsymbol{e}}_3 = \tilde\omega_i\tilde{\boldsymbol{e}}_i\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\begin{aligned}\tilde\omega_1 &= \dot\psi\sin\vartheta\sin\varphi + \dot\vartheta\cos\varphi \\ \tilde\omega_2 &= \dot\psi\sin\vartheta\cos\varphi - \dot\vartheta\sin\varphi \\ \tilde\omega_3 &= \dot\psi\cos\vartheta + \dot\varphi\end{aligned}$$

keine Winkelgeschwindigkeiten!

Kinematik der Kontinua

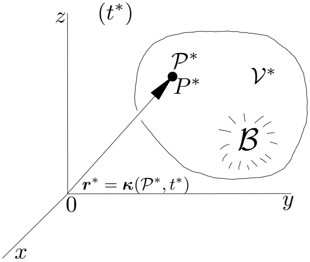
Bewegung eines Körpers, materielle und räumliche Parametrisierung

---

Definition (Bewegung eines Körpers)
Eine Funktion

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t) \text{ mit } \mathcal{P} \in \mathcal{B},\ t \in Z_t$$

die jedem materiellen Punkt $\mathcal{P}$ eines Körpers $\mathcal{B}$ zu jedem Zeitpunkt t des betrachteten Zeitintervalls Z_t einen Ort P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ zuordnet, wird die **kinematische Bewegungsgleichung** *von $\mathcal{B}$ oder kurz die* **Bewegung** *von $\mathcal{B}$ im Zeitintervall Z_t genannt.*



Momentanlage

Definition (Momentanlage)
Die Menge der Orte aller materiellen Punkte des Körpers zum Zeitpunkt t^*, d.h. die Menge aller Punkte mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t^*)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$, wird die **Momentanlage** *des Körpers $\mathcal{B}$ zum Zeitpunkt t^* genannt.*

Bewegung: einparametrige Folge der Abbildungen des Körpers auf seine Momentanlagen

Bei festgehaltenem materiellen Punkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$:

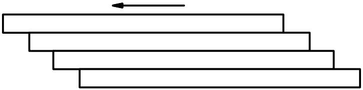
$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}^*, t)$$

$\rightarrow$ gleiche Darstellung wie im Fall der Kinematik des Massenpunkts

Ebene Bewegung

Definition (Ebene Bewegung)
Bewegt sich jeder materielle Punkt eines Körpers oder eines materiell offenen Systems in einer Ebene und verlaufen alle Bewegungsebenen parallel, so nennt man einen solchen Vorgang **ebene Bewegung** *dieses Körpers oder dieses materiell offenen Systems.*

Beispiel: Schichtströmung (Laminarströmung)



Materielle und räumliche Koordinaten

zweckmäßig: $\mathcal{P}$ durch Koordinaten adressieren

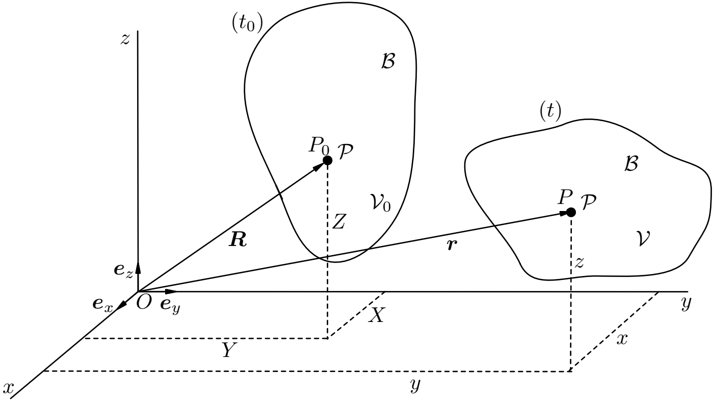
Definition

Die der analytischen Kennzeichnung materieller Punkte dienenden Koordinaten werden **materielle Koordinaten** *genannt. Die Ortskoordinaten der materiellen Punkte eines Körpers in der jeweiligen Momentanlage des Körpers werden* **räumliche Koordinaten** *genannt.*

Bezugslage und Bezugskonfiguration

Definition

Die Momentanlage $\mathcal{V}_0$ von $\mathcal{B}$ zu einen bestimmten, jedoch frei gewählten Zeitpunkt t_0 wird die **Bezugslage** *bzw. die* **Bezugskonfiguration** *von $\mathcal{B}$ genannt. Der Zeitpunkt t_0 heißt* **Bezugszeit***.*



Materielle und räumliche Ortsvektoren

Definition (Materielle und räumliche Ortsvektoren und Koordinaten)
Der Ortsvektor $\boldsymbol{R}$ *des materiellen Punkts* $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ *in der Bezugslage heißt der* **materielle** *Ortsvektor von* $\mathcal{P}$*. Seine Koordinaten* X*,* Y*,* Z *heißen* **materielle Koordinaten***.*
Der Ortsvektor $\boldsymbol{r}$ *des materiellen Punkts* $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ *in der Momentanlage heißt der* **räumliche** *Ortsvektor von* $\mathcal{P}$*. Seine Koordinaten* x*,* y*,* z *heißen* **räumliche Koordinaten***.*

Es gilt:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t_0) =: \boldsymbol{\kappa}_0(\mathcal{P})$$

Umkehrung:

$$\mathcal{P} = \boldsymbol{\kappa}_0^{-1}(\boldsymbol{R})$$

Materielle und räumliche Parametrisierung

materielle Parametrisierung der Bewegung:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa}_0^{-1}(\boldsymbol{R}), t) := \chi(\boldsymbol{R}, t)$$

Umkehrung:

$$\boldsymbol{R} = \chi^{-1}(\boldsymbol{r}, t)$$

- materiellen Koordinaten werden in einem gemeinsamen Bezugssystem definiert
- häufig zweckmäßig: materielle Koordinaten in bewegtem Bezugssystem (**nicht** im Zusammenhang mit der Anfangslage)