

Kinematik der Kontinua

Bewegung eines Körpers: $\mathbf{r} = \kappa(\mathcal{P}, t)$ mit $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$, $t \in Z_t$

Bezugslage zum Zeitpunkt t_0 , materieller Ortsvektor:

$$\mathbf{R} = \kappa(\mathcal{P}, t_0) =: \kappa_0(\mathcal{P}) \rightarrow \text{materielle Koordinaten}$$

Umkehrung: $\mathcal{P} = \kappa_0^{-1}(\mathbf{R})$

materielle Parametrisierung der Bewegung:

$$\mathbf{r} = \kappa(\kappa_0^{-1}(\mathbf{R}), t) =: \chi(\mathbf{R}, t) \rightarrow \text{räumliche Koordinaten}$$

Umkehrung: $\mathbf{R} = \chi^{-1}(\mathbf{r}, t)$

Definition (Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eines Körpers)

Es sei \mathcal{B} ein Körper und $\chi(\mathbf{R}, t)$ die Bewegung des materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in materieller Parametrisierung. Dann heißt

1. die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) := \dot{\mathbf{r}} := \frac{\partial \chi(\mathbf{R}, t)}{\partial t}$$

das **Geschwindigkeitsfeld** von \mathcal{B} zum Zeitpunkt t in materieller Parametrisierung und

2. die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}, t) := \dot{\mathbf{v}} := \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}$$

das **Beschleunigungsfeld** von \mathcal{B} zum Zeitpunkt t in materieller Parametrisierung.

Übergang zur räumlichen Parametrisierung

Umparametrisierung:

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\chi^{-1}(\mathbf{r}, t), t),$$

$$\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{a}(\chi^{-1}(\mathbf{r}, t), t).$$

Alternative: Berechnung der Beschleunigung aus dem räumlich parametrisierten Geschwindigkeitsfeld

$$d\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} dt$$

Division durch dt :

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \bar{v}_z + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

Konvektive und lokale Beschleunigung

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \bar{v}_z + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

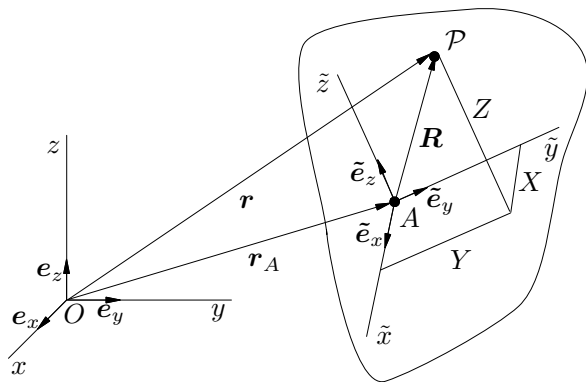
konvektive Beschleunigung:

$$\bar{\mathbf{a}}_k := \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \bar{v}_z$$

lokale Beschleunigung

$$\bar{\mathbf{a}}_l := \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

Materielle Parametrisierung der Bewegung des starren Körpers



Ortsvektorfeld:

$$\mathbf{r}(X, Y, Z, t) = \mathbf{r}_A(t) + \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$$

mit

$$\mathbf{R}(X, Y, Z, t) = X\tilde{\mathbf{e}}_x(t) + Y\tilde{\mathbf{e}}_y(t) + Z\tilde{\mathbf{e}}_z(t)$$

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers

Satz

Das Geschwindigkeitsfeld des starren Körpers ist

$$\mathbf{v}(X, Y, Z, t) = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$$

und das Beschleunigungsfeld ist

$$\mathbf{a}(X, Y, Z, t) = \mathbf{a}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)).$$

Dabei sind $\mathbf{v}_A(t)$ und $\mathbf{a}_A(t)$ Geschwindigkeit und Beschleunigung im körperfesten Punkt A , $\boldsymbol{\omega}(t)$ ist die Drehgeschwindigkeit des starren Körpers und $\mathbf{R}(X, Y, Z, t)$ der Ortsvektor von A zum Ort des materiellen Punktes \mathcal{P} .

Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers

1. Geschwindigkeit:

$$\mathbf{v}(X, Y, Z, t) = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$$

- a) $\mathbf{v}_A(t)$: translatorischer Anteil der Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{P}
- b) $\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$: rotatorischer Anteil der Geschwindigkeit des Punktes \mathcal{P} (Rotation um A)

2. Beschleunigung:

$$\mathbf{a}(X, Y, Z, t) = \mathbf{a}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t))$$

- a) $\mathbf{a}_A(t)$: translatorischer Anteil der Beschleunigung des Punktes \mathcal{P}
- b) $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$: rotatorischer Anteil aufgrund der Drehbeschleunigung
- c) $\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t))$: rotatorischer Anteil aufgrund der Zentripetalbeschleunigung

Quiz



<https://pingo.scc.kit.edu/822452>

Definition (Kinematik)

Es sei A ein körperfester Punkt, $\mathbf{v}_A(t)$ die Geschwindigkeit in diesem Punkt und $\boldsymbol{\omega}(t)$ die Drehgeschwindigkeit. Die kinematisch-geometrische Größe $(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$ heißt **Kinematik**.

Satz (Kinematenversetzung)

Es seien A und B zwei körperfeste Punkte eines starren Körpers. Zwischen den Kinematiken $(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$ und $(\mathbf{v}_B, B, \boldsymbol{\omega})$ des Geschwindigkeitsfelds besteht die Beziehung

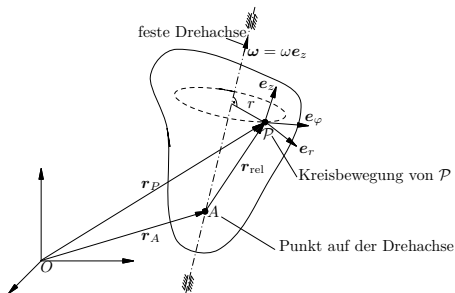
$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A).$$

Dabei sind \mathbf{r}_B und \mathbf{r}_A die von einem gemeinsamen Bezugspunkt aus bestimmten Ortsvektoren der Punkte A und B .

→ Äquivalenz von Kinematiken

Spezielle Kinematen

1. **Translatorische Bewegung:** $(\mathbf{v}, A, \mathbf{0})$ für **jeden** körperfesten Punkt
2. **Drehung um einen festen Punkt A :** $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$
3. **Drehung um eine feste Achse:** $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$ für alle Punkte der Drehachse



Geschwindigkeit, mit $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\varphi$:

$$\mathbf{v}(R, t) = \omega R \mathbf{e}_\varphi$$

Beschleunigung, mit $\dot{\mathbf{e}}_\varphi = -\omega \mathbf{e}_R$:

$$\mathbf{a}(R, t) = \dot{\omega} R \mathbf{e}_\varphi - \omega^2 R \mathbf{e}_R$$

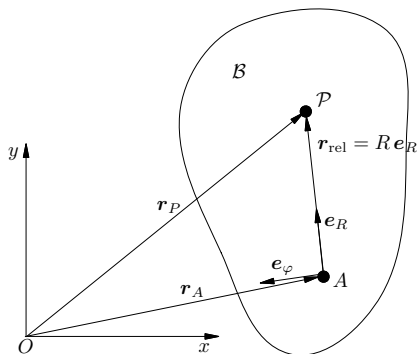
Ebene Bewegung

Zylinderkoordinaten ebenfalls zweckmäßig, da dann $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R$

→ Geschwindigkeit und Beschleunigung analog zur festen Drehachse, aber mit zusätzlicher Bewegung des Bezugspunkts A:

$$\mathbf{v}(R, t) = \mathbf{v}_A + \omega R \mathbf{e}_\varphi$$

$$\mathbf{a}(R, t) = \mathbf{a}_A + \dot{\omega} R \mathbf{e}_\varphi - \omega^2 R \mathbf{e}_R.$$



Momentanpol

Definition (Momentanpol)

Ein Punkt M eines starren Körpers, für den zu einem Zeitpunkt t der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_M(t)$ verschwindet, heißt **Momentanpol**.

Momentanpol \rightarrow aktuelle Kinemate $(\mathbf{0}, M, \boldsymbol{\omega})$

Ermittlung des Momentanpols:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \tilde{\mathbf{R}}_{AM}$$

und Auflösen nach $\tilde{\mathbf{R}}_{AM}$, i. Allg. nicht eindeutig

Ausnahme: ebene Bewegung

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -R_{AMy} \\ R_{AMx} \end{bmatrix}$$

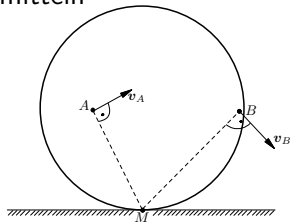
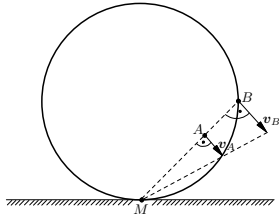
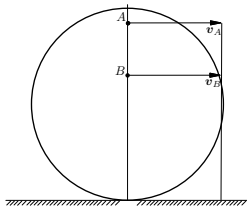
Ermittlung des Momentanpols (ebene Bewegung)

bei Vorgabe zweier Geschwindigkeiten

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -R_{AMy} \\ R_{AMx} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -R_{ABy} \\ R_{ABx} \end{bmatrix}$$

graphische Ermittlung, Fallunterscheidung:

- 1 beide Geschwindigkeitsvektoren gleich groß \rightarrow rein translatorische Bewegung
- 2 beide Geschwindigkeitsvektoren parallel, aber nicht gleich groß:
Gerade durch Anfangs- und Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren, Schnittpunkt ermitteln
- 3 Geraden senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor, durch Anfangspunkt des Geschwindigkeitsvektors, Schnittpunkt ermitteln



Spurkurve, Rollkurve

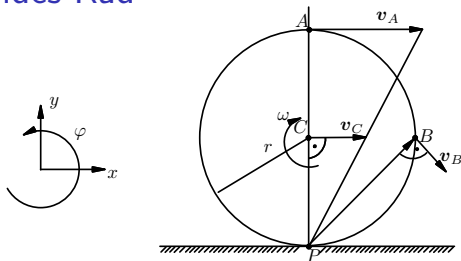
Momentanpol ist Punkt im Raum \rightarrow verändert seine Lage

Definition (Spurkurve, Rollkurve)

Die Kurve des Momentanpols im raumfesten Bezugssystem heißt

Spurkurve (oder Rastpolbahn, Polhodie), die Kurve des Momentanpols im körperfesten Bezugssystem heißt **Rollkurve** (oder Gangpolbahn, Herpolhodie).

Beispiel: Rollendes Rad



Spurkurve: Gerade

Rollkurve: Rand des Rades

Geschwindigkeit im Mittelpunkt C :

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times r \mathbf{e}_y = \omega r \mathbf{e}_x, \quad v_C = \|\mathbf{v}_C\| = \omega r$$

Geschwindigkeit im Punkt A :

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times 2r \mathbf{e}_y = 2\omega r \mathbf{e}_x = 2v_C \mathbf{e}_x$$

Geschwindigkeit im Punkt B :

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times (r \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_y) = \omega r (-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x) = v_C (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$