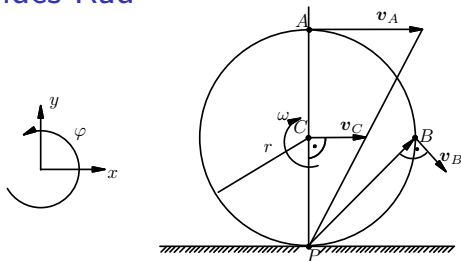


Beispiel: Rollendes Rad



Spurkurve: Gerade

Rollkurve: Rand des Rades

Geschwindigkeit im Mittelpunkt C :

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times r \mathbf{e}_y = \omega r \mathbf{e}_x, \quad v_C = \|\mathbf{v}_C\| = \omega r$$

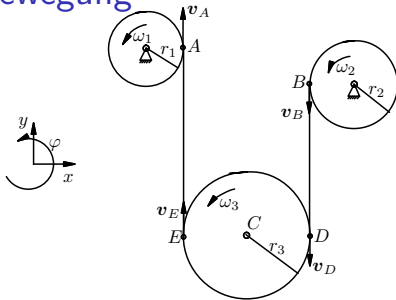
Geschwindigkeit im Punkt A :

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times 2r \mathbf{e}_y = 2\omega r \mathbf{e}_x = 2v_C \mathbf{e}_x$$

Geschwindigkeit im Punkt B :

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times (r \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_y) = \omega r (-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x) = v_C (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

Beispiel: Rollenbewegung



Geg.: $r_1, r_2, r_3, \omega_1, \omega_2$

Ges.: ω_3, \mathbf{v}_C

Abrollbedingungen für reines Rollen:

$$\mathbf{v}_A = \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y$$

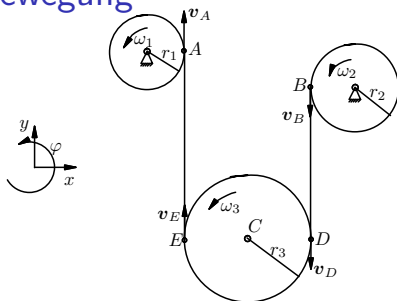
$$\mathbf{v}_B = -\omega_2 r_2 \mathbf{e}_y$$

kinematischen Bedingungen:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_A$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B$$

Beispiel: Rollenbewegung



Geschwindigkeit in D :

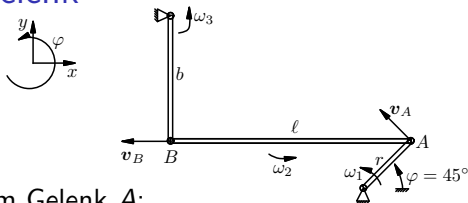
$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E + \boldsymbol{\omega}_3 \times 2r_3 \mathbf{e}_x = \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y + 2\omega_3 r_3 \mathbf{e}_y = (\omega_1 r_1 + 2\omega_3 r_3) \mathbf{e}_y$$

Aus $\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B$: $\omega_1 r_1 + 2\omega_3 r_3 = -\omega_2 r_2$, also $\omega_3 = -\frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2r_3}$

Geschwindigkeit im Punkt C :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_E + \boldsymbol{\omega}_3 \times r_3 \mathbf{e}_x = \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2r_3} r_3 \mathbf{e}_y \\ &= \left(\omega_1 r_1 - \frac{\omega_1 r_1}{2} - \frac{\omega_2 r_2}{2} \right) \mathbf{e}_y = \left(\frac{\omega_1 r_1}{2} - \frac{\omega_2 r_2}{2} \right) \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

Beispiel: Viereck



Geschwindigkeit im Gelenk A:

$$\mathbf{v}_A = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_y$$

Geschwindigkeit im Punkt B: zwei Möglichkeiten

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A - \omega_2 l \mathbf{e}_y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_x + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r - \omega_2 l\right) \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{v}_B = \omega_3 b \mathbf{e}_x$$

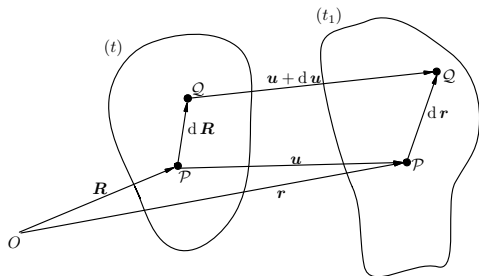
Koeffizientenvergleich:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r = \omega_3 b \Rightarrow \omega_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{b}\omega_1$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r - \omega_2 l = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 \frac{r}{l}$$

Kinematik der Kontinua

Verzerrungszustand eines deformierbaren Körpers



Bewegung von \mathcal{P} : $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}$

Verschiebung von \mathcal{P} : $\mathbf{u} := \mathbf{r} - \mathbf{R}$

Differentiale: $d\mathbf{u} = d\mathbf{r} - d\mathbf{R} \Rightarrow d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{u}$

Längenvergleich der beiden Relativvektoren

$$\begin{aligned}\|d\mathbf{r}\|^2 - \|d\mathbf{R}\|^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - (d\mathbf{r} - d\mathbf{u}) \cdot (d\mathbf{r} - d\mathbf{u}) \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - \|d\mathbf{u}\|^2\end{aligned}$$

- Aus $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ folgt $d\mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$
- Vernachlässigung von $\|d\mathbf{u}\|^2$

Damit:

$$\begin{aligned}\|d\mathbf{r}\|^2 - \|d\mathbf{R}\|^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} \\ &= d\mathbf{r} \cdot (\text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) + (\text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= d\mathbf{r} \cdot (\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T) \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$

Linearisierter Verzerrungstensor

Definition (Linearisierter Verzerrungstensor)

Sei \mathbf{r} der Ortsvektor des materiellen Punktes $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in der Momentanlage.
Der Tensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T).$$

heißt **linearisierter Verzerrungstensor**.

Geführte Bewegungen

Freie und geführte Bewegung, Freiheitsgrade

Definition (Freie Bewegung)

*Eine Bewegung, die keinen geometrischen Einschränkungen unterworfen ist, wird **freie Bewegung** genannt.*

Definition (Bindung, geführte Bewegung)

*Bedingungen, welche die Bewegung eines Körpers einschränken, werden **Bindungen** oder **Zwangsbedingungen** genannt. Eine Bewegung, die Zwangsbedingungen unterworfen wird, heißt **geführt**.*

Definition (Freiheitsgrad)

*Die Anzahl der **voneinander unabhängigen** Koordinaten oder Parameter, die zu einer eindeutigen Bestimmung der momentanen Lage eines Körpers oder Körpersystems notwendig sind, wird die **Anzahl der Freiheitsgrade** dieses Körpers oder Körpersystems genannt.*

Freiheitsgrade des Massenpunkts

1. im Fall einer freien Bewegung: **drei** Freiheitsgrade
 2. im Fall einer Bewegung auf einer Fläche: **zwei** Freiheitsgrade
 3. im Fall einer Bewegung auf einer Kurve: **einen** Freiheitsgrad
 4. im Fall einer Fixierung an einen Punkt: **null** Freiheitsgrade
-

Definition (Vollständige Bindung)

*Eine Bewegung mit null Freiheitsgraden heißt **vollständig gebunden** oder **eingepägt**.*

Freiheitsgrade deformierbarer Körper und materiell offener Systeme

Materielle Punkte eines deformierbaren Körpers (oder eines deformierbaren materiell offenen Systems) bewegt sich beeinflusst, aber ungebunden von anderen materiellen Punkten

→ Deformierbarer Körper hat „drei mal unendlich“ Freiheitsgrade, also unendlich viele Freiheitsgrade

Ebene Bewegung: „zwei mal unendlich“ viele Freiheitsgrade, also ebenfalls unendlich viele Freiheitsgrade

Freiheitsgrade des starren Körpers

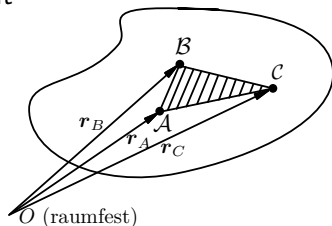
Satz (Freiheitsgrade des starren Körpers)

Ein sich frei im Raum bewegender starrer Körper besitzt **sechs** Freiheitsgrade.

Beweis:

Betrachte drei nichtkollineare materielle Punkte:

1. \mathcal{A} hat drei Freiheitsgrade
2. Durch \mathcal{B} kommen zwei Freiheitsgrade hinzu
3. Durch \mathcal{C} kommt ein Freiheitsgrad hinzu
4. Durch weitere materiellen Punkte ändert sich die Anzahl der Freiheitsgrade nicht



Freiheitsgrade des starren Körpers

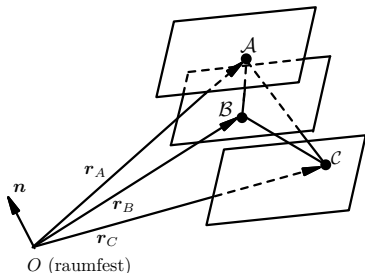
Ebene Bewegung des starren Körpers:

drei zusätzliche Zwangsbedingungen

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$

$$\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$

$$\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$



→ im Fall einer ebenen Bewegung: 3 Freiheitsgrade

Klassifikation von Bindungen

diskrete Systeme: Körpersysteme aus Massenpunkten und starren Körpern

Lageparameter: \mathbf{r}

Geschwindigkeitsparameter (inkl. Drehgeschwindigkeit): \mathbf{s}

1. **einseitige Bindung:** Ungleichung $f(\mathbf{r}, t) \geq 0$ bzw. $f(\mathbf{s}, t) \geq 0$;
zweiseitige Bindung: Gleichung $f(\mathbf{r}, t) = 0$ bzw. $f(\mathbf{s}, t) = 0$
2. **rheonom:** zeitabhängig; **skleronom:** zeitunabhängig
3. **explizite** Bindung: zweiseitige Bindung, ein Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter als Funktion der anderen Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter; **implizite** Bindung: zweiseitige Bindung ist Funktion aller Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter
4. **geometrische Bindung:** Bindung zwischen Lageparametern;
kinematische Bindung: Bindung auch von Geschwindigkeitsparametern abhängig
5. **holonome Bindung:** geometrische Bindung bzw. kinematische Bindung, die sich durch Integration in eine geometrische Bindung überführen lässt, sonst: **nichtholonom (anholonom)**

Beispiel: Mathematisches Pendel

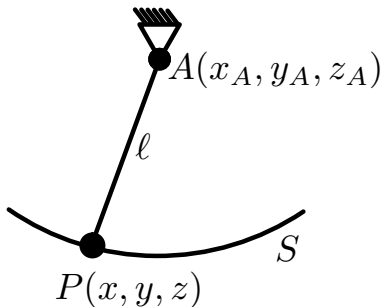
undehnbares Seil: $\overline{AP} \leq \ell$:

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \leq \ell^2$$

→ einseitige skleronome geometrische Bindung

bei starrer Stütze (starrer Pendelstab):

zweiseitige skleronome geometrische Bindung



Generalisierte Koordinaten

n Lageparameter

m zweiseitige geometrische und zweiseitige holonome kinematische Bindungen

$f = n - m$ Freiheitsgrade

generalisierte Koordinaten:

f voneinander unabhängige Größen q_1, q_2, \dots, q_f , die die Momentanlage des Systems vollständig bestimmen