

Nicht-holonome Bindungen

Nicht-integrierbare kinematische Bindung:

Beziehung zwischen Differentialen $d q_i$ der generalisierten Koordinaten

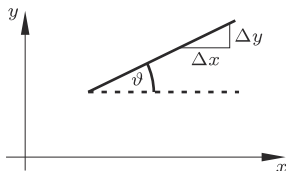
$$a_1 d q_1 + a_2 d q_2 + \dots + a_f d q_f + a_0 d t = 0,$$

die kein vollständiges Differential einer Funktion F ist.

Beispiel: Bewegung einer Schneide oder Kufe

Lage der Kufe:

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = \vartheta$$



global unabhängig

lokal: Bindung

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx}, \quad \text{d.h.} \quad \tan q_3 = \frac{dq_2}{dq_1} = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}$$

bzw.

$$\tan q_3 \, dq_1 - dq_2 = 0$$

Beispiel: Bewegung einer Schneide oder Kufe

Ist $\tan q_3 \, d q_1 - d q_2$ das vollständige Differential einer Funktion $F(q_1, q_2)$?

Annahme: $d F = \tan q_3 \, d q_1 - d q_2$, dann

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \tan q_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = -1$$

Widerspruch zum Vertauschungssatz von Schwarz, denn

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial \tan q_3}{\partial q_2}, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

Massenkinematische Größen eines Körpers

- werden aus Massendichte und kinematischen Größen gebildet
- Brücke zwischen Kinematik und Kinetik

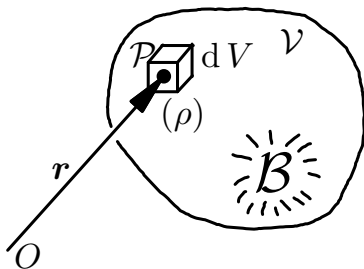
vier Größen:

1. statisches Massenmoment H^Q
2. Impuls I
3. Drall D^Q
4. kinetische Energie E

Massendichte

Axiom (Existenz einer Massendichte)

Es existiert eine skalare Ortsfunktion, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, welche im Volumengebiet \mathcal{V} der Momentanlage eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der Materieverteilung in \mathcal{V} darstellt. Sie wird **Massendichte** oder kurz **Dichte** genannt.



Masse

Definition (Masse)

Das Volumenintegral

$$m := \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV,$$

*erstreckt über die Momentanlage \mathcal{V} des Körpers \mathcal{B} , wird **Masse** von \mathcal{B} genannt.*

$dm := \rho \, dV$: **Massenelement**, damit $m = \int_{\mathcal{B}} dm$

Statisches Massenmoment

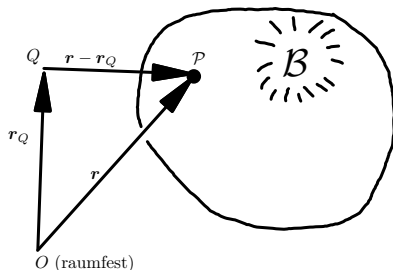
Definition (Statisches Massenmoment)

Das **statische Massenmoment** \mathbf{H}^Q eines Körpers \mathcal{B} , bezogen auf einen beliebigen (d.h. auch bewegten) Punkt Q ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{H}^Q = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \, dm$$

definierte physikalische Vektor.

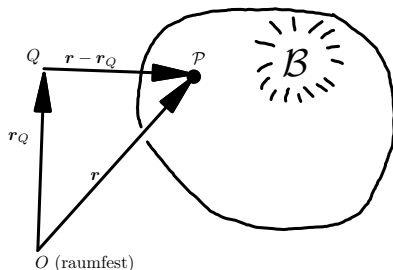
Für $Q \equiv O$ ($\mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$): $\mathbf{H}^O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm$



Statisches Massenmoment

Sonderfälle:

1. Massenpunkt (Masse m , Ortsvektor \mathbf{r}): $\mathbf{H}^O = m\mathbf{r}$.
2. Punkthaufen (Massen Δm_i , Ortsvektoren \mathbf{r}_i): $\mathbf{H}^O = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \mathbf{r}_i$.



Massenmittelpunkt

Definition (Massenmittelpunkt)

Der **Massenmittelpunkt** eines Körpers \mathcal{B} ist derjenige Punkt C , dessen Ortsvektor \mathbf{r}_C die Gleichung

$$\mathbf{r}_C m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, d m$$

erfüllt.

- offenbar $\mathbf{r}_C m = \mathbf{H}^O$
- bei starrem Körper: **körperfester** Punkt

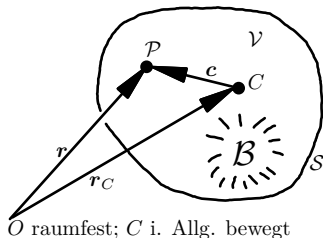
Statisches Massenmoment bzgl. Massenmittelpunkt

Satz

Das statische Massenmoment \mathbf{H}^C eines Körpers bezogen auf den Massenmittelpunkt C verschwindet.

Beweis:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^C &= \int_B \mathbf{c} \, d m = \int_B (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \, d m = \int_B \mathbf{r} \, d m - \int_B \mathbf{r}_C \, d m \\ &= \int_B \mathbf{r} \, d m - \mathbf{r}_C \int_B d m = \mathbf{0}\end{aligned}$$



Impuls

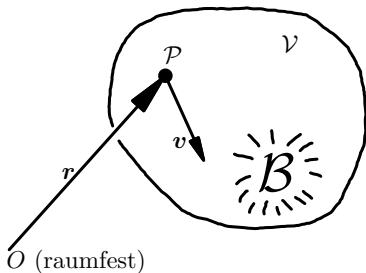
Definition (Impuls)

Der **Impuls** I eines Körpers \mathcal{B} ist der durch die Gleichung

$$I := \int_{\mathcal{V}} \dot{\mathbf{r}} \rho dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} dm$$

definierte physikalische Vektor, wobei $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld von \mathcal{B} und \mathcal{V} die Momentanlage von \mathcal{B} zur Zeit t sind.

$$I := \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}} dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} dm \right) = (\mathbf{r}_C m)' = m \dot{\mathbf{r}}_C = m \mathbf{v}_C$$



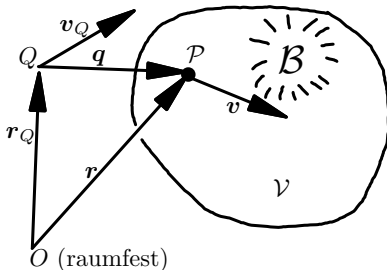
Drall

Definition (Drall)

Der **Drall** \mathbf{D}^Q eines Körpers \mathcal{B} bezogen auf einen beliebigen (also auch einen bewegten) Punkt Q , ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{D}^Q := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \rho dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} dm = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q) dm$$

definierte physikalische Vektor, wobei $\mathbf{q} := \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$ der relative Ortsvektor von \mathcal{P} bezüglich Q ist und folglich $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q$ die relative Geschwindigkeit von \mathcal{P} bezüglich Q ist.



Spezialfälle des Dralls

1. Punkt O als Bezugspunkt ($Q \equiv O, \mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$):

$$\mathbf{D}^O := \int_B \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm$$

2. Massenmittelpunkt C ($Q \equiv C, \mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_C$):

$$\mathbf{D}^C := \int_B (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_B \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm$$

Drall im Massenmittelpunkt

Satz (Drall im Massenmittelpunkt)

Für einen starren Körper besteht zwischen \mathbf{D}^O und \mathbf{D}^C die Beziehung

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C m + \mathbf{D}^C = \mathbf{r}_C \times \mathbf{I} + \mathbf{D}^C.$$

Beweis: Umformung von \mathbf{D}^O mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{c}$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}^O &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_C + \mathbf{c}) \times (\mathbf{r}_C + \dot{\mathbf{c}}) \, dm \\ &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C \, dm + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{c}} \, dm + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}_C \, dm + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm \\ &= \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C \underbrace{\int_{\mathcal{B}} dm}_{=m} + \mathbf{r}_C \times \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \, dm}_{=0} \right) + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \, dm}_{=0} \times \dot{\mathbf{r}}_C \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm}_{=\mathbf{D}^C}\end{aligned}$$

Dynamische Größen

Kraftdichten:

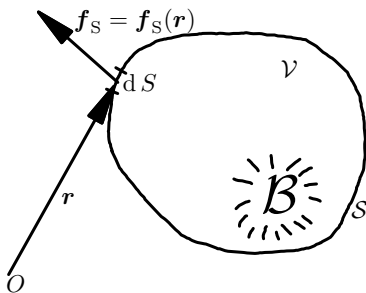
1. Flächenkraftdichten
2. Volumenkraftdichten

→ Kräfte und Momente als messbare Eigenschaften der mechanischen Einflüsse der **äußeren** Umgebung auf den Körper.

Flächenkraftdichte

Axiom (Existenz einer Flächenkraftdichte)

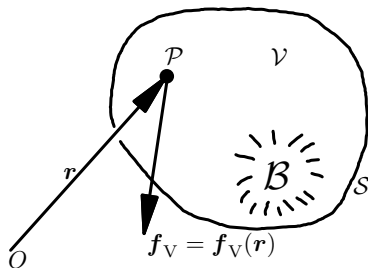
Es existiert ein Vektorfeld $\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{r})$, das auf der Oberfläche S eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der mechanischen Einflüsse der Umgebung auf die Oberfläche darstellt. Es wird **Flächenkraftdichte** oder (äußere) **Spannung** genannt.



Volumenkraftdichte

Axiom (Existenz einer Volumenkraftdichte)

Es existiert ein Vektorfeld $\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(\mathbf{r})$, das im Volumengebiet \mathcal{V} eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der mechanischen Einflüsse der Umgebung bezüglich der Momentanlage des Körpers darstellt. Es wird **Volumenkraftdichte** genannt.



Flächenkraft, Volumenkraft

Definition

Das Oberflächenintegral

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{f}_S dS \quad (S \text{ ist die Oberfläche von } \mathcal{B})$$

*heißt die (auf den Körper wirkende) **Flächenkraft** und das Volumenintegral*

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{f}_V dV \quad (V \text{ ist die Momentanlage von } \mathcal{B})$$

*heißt die (auf den Körper wirkende) **Volumenkraft**.*

Axiom (Additivität von Flächen- und Volumenkräften)

Flächenkräfte und Volumenkräfte sind addierbare Vektoren.

Resultierende Kraft

Definition

Der physikalische Vektor

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V$$

*wird die **resultierende Kraft** oder kurz die **Resultierende** genannt. Sie ist die gesamte auf den Körper wirkende Kraft.*

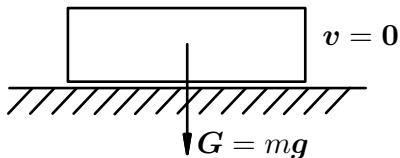
Beispiel: Gewichtskraft

Gewichtskraft: $\mathbf{G} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \, d m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \rho \, d V \approx m \mathbf{g}$

\mathbf{g} : Erdgravitationsfeldstärke.

\mathbf{g} ist **keine Beschleunigung!**

Beispiel: ruhender Klotz, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, aber $\mathbf{G} = m \mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$.



Moment einer Kraftdichte

Definition (Moment einer Kraftdichte)

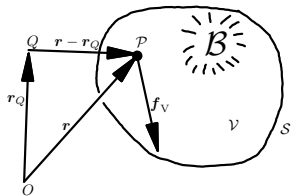
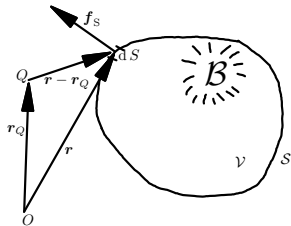
Das **Moment** M_S^Q der **Flächenkraftdichte** f_S bezüglich des Punktes Q ist der durch die Gleichung

$$M_S^Q = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_S dS$$

definierte physikalische Vektor. Das **Moment** M_V^Q der **Volumenkraftdichte** f_V bezüglich des Punktes Q ist der durch die Gleichung

$$M_V^Q = \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_V dV$$

definierte physikalische Vektor.



Resultierendes Moment einer Kraftdichte

Definition

Der Vektor

$$\mathbf{M}^Q = \mathbf{M}_S^Q + \mathbf{M}_V^Q$$

heißt das **resultierende Moment** der Kraftdichten.

Spezialfälle: Bezugspunkt O bzw. C

$$\mathbf{M}^O = \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V dV$$

$$\mathbf{M}^C = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_S dS + \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_V dV$$

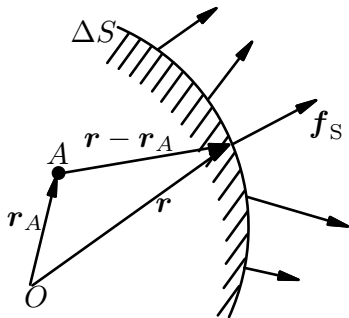
Dynamische Größen

Dynamie einer Kraftdichte

Hier am Beispiel einer Flächenkraftdichte \mathbf{f}_S auf ΔS :

Resultierende: $\mathbf{F} = \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S dS$

Moment \mathbf{M}^A : $\mathbf{M}^A = \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{f}_S dS$



Die Resultierende \mathbf{F} besitzt **keinen** Angriffspunkt.

Definition

Die an den Punkt A gebundene Resultierende

$$\mathbf{F} = \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S \, dS,$$

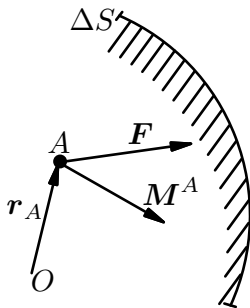
einer Spannungsverteilung \mathbf{f}_S und das auf den Punkt A bezogene resultierende Moment

$$\mathbf{M}^A = \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{f}_S \, dS$$

von \mathbf{f}_S bilden zusammen eine dynamisch-geometrische Größe, welche **Dyname** genannt wird und mit $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ bezeichnet wird. Es heißen \mathbf{F} der **Kraftwert**, \mathbf{M}^A der **Momentenwert** und A der **Angriffspunkt** der Dyname $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$.

Dynamie

- repräsentiert die auf A bezogene dynamische Wirkung der Kraftdichte
- ist bei gegebener Kraftdichte eindeutig
- Umkehrung (Dynamie gegeben, Kraftdichte gesucht) nicht eindeutig



Momentenversetzungsgleichung

Satz

Zwischen den Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ und $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ derselben Spannungsverteilung \mathbf{f}_S besteht die Beziehung

$$\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}.$$

Diese Gleichung wird **Momentenversetzungsgleichung** genannt, das Moment

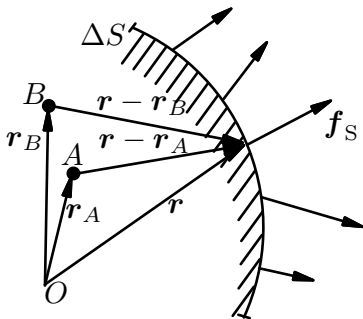
$$\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

heißt **Versetzungsmoment**.

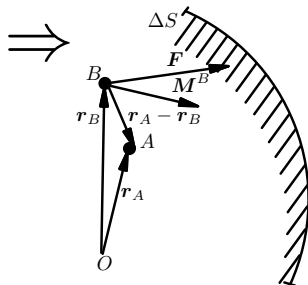
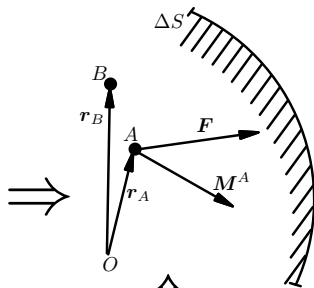
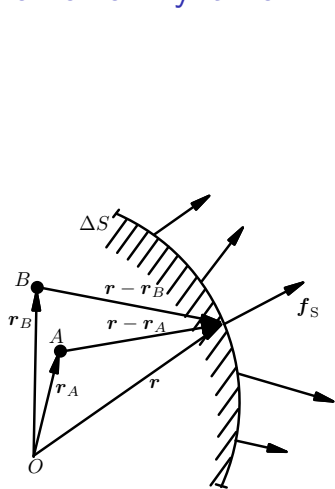
Momentenversetzungsgleichung

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^B - \mathbf{M}^A &= \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_S dS - \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{f}_S dS \\ &= \int_{\Delta S} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_S dS \\ &= (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S dS = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \end{aligned}$$



Versetzen einer Dyname



Regel für das Versetzen eines Dyname von A nach B

1. Die Kraft \mathbf{F} wird von A nach B parallel verschoben („versetzt“).
2. Es wird das neue Moment $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + \mathbf{M}_A^B$ mit dem Versetzungsmoment $\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ ermittelt.
3. Das neue Moment \mathbf{M}^B wird im Punkt B „aufgepflanzt“, das alte Moment \mathbf{M}^A „gelöscht“.

Linienflüchtigkeit:

Wird die Dyname längs der durch A und \mathbf{F} bestimmten Geraden versetzt, so ändert sich der Momentenwert nicht!

Äquivalenz von Dynamen

Definition

Zwei Dynamen $(\mathbf{F}_1, A, \mathbf{M}^A)$ und $(\mathbf{F}_2, B, \mathbf{M}^B)$, deren Resultierende \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 gleich sind ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 =: \mathbf{F}$), und deren Momente \mathbf{M}^A und \mathbf{M}^B die Momentenversetzungsgleichung $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ erfüllen, heißen **dynamisch äquivalent** oder **gleich**; in Zeichen:
 $(\mathbf{F}_1, A, \mathbf{M}^A) = (\mathbf{F}_2, B, \mathbf{M}^B)$.

Satz (Dynamenäquivalenz)

Zwei Dynamen ein und derselben Kraftdichteverteilung sind dynamisch äquivalent.

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Äquivalenten Dynamen können verschiedene Kraftdichteverteilungen zugrunde liegen.

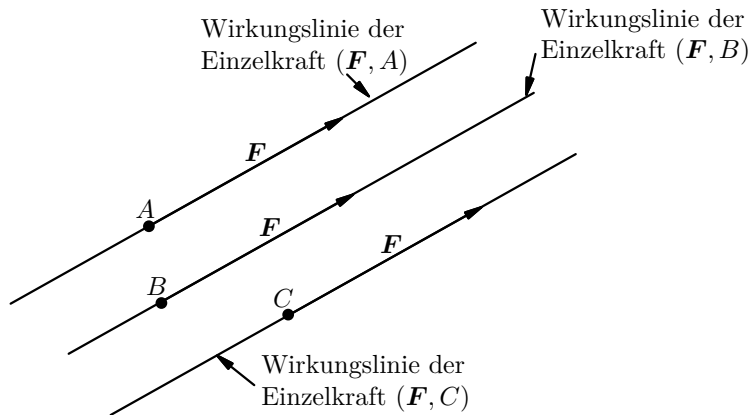
Definition (Einzelkraft, freies Moment)

1. Eine Dyname $(\mathbf{F}, A, \mathbf{0}) =: (\mathbf{F}, A)$ mit verschwindendem resultierendem Moment, d.h. mit $\mathbf{M}^A = \mathbf{0}$ heißt **Einzelkraft**. Es heißen \mathbf{F} der **Kraftwert**, A der **Angriffspunkt** und die durch A und \mathbf{F} bestimmte Gerade die **Wirkungslinie** der Einzelkraft (\mathbf{F}, A) .
 2. Eine Dyname mit verschwindender Resultierender $(\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A) =: \mathbf{M}$ heißt **freies Moment**.
-

freies Moment: Versetzungsmoment verschwindet, daher $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A!$

Einzelkräfte

bestehen aus resultierender Kraft **und** Angriffspunkt.



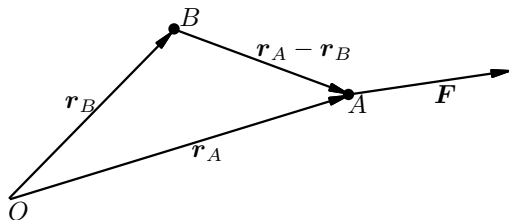
Moment einer Einzelkraft

Definition (Moment einer Einzelkraft)

Das Vektorprodukt

$$\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A) := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

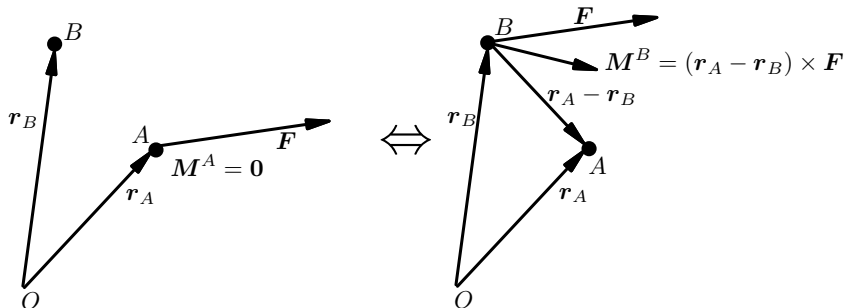
wird das **Moment** der (im Punkt A angreifenden) **Einzelkraft** (\mathbf{F}, A) bezüglich des Punktes B genannt.



offenbar: $\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A) = \mathbf{M}_A^B$

Versetzen einer Einzelkraft

Analog zur Dynamenversetzung, Einzelkraft $(\mathbf{F}, A) \rightarrow (\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$,
mit $\mathbf{M}^B = \mathbf{0} + \mathbf{M}_A^B = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A)$.



Jede Einzelkraft ist linienflüchtig.

Einteilung der Dynamen

1. eingeprägte Kräfte
2. Reaktionskräfte

Beispiele:

Eingeprägte Kräfte	Reaktionskräfte
Gewichtskraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$	Normalkraft N
Reibkraft $R = \mu N$	Haftkraft H
Federkraft $F = c\Delta\ell$	Lagerreaktionskräfte
Auftriebskraft $\mathbf{A} = -\gamma_M V_B \frac{\mathbf{g}}{\ \mathbf{g}\ } = \rho_M V_B \mathbf{g}$	
Widerstandskraft $\mathbf{W} = -\frac{\mathbf{v}}{\ \mathbf{v}\ } (a_0 + a_1 \ \mathbf{v}\ + \dots + a_n \ \mathbf{v}\ ^n)$	

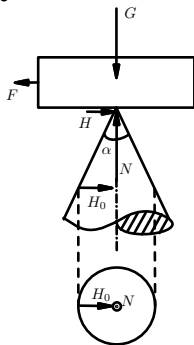
Haften und Gleiten

Haftkraft: Reaktionskraft, Berechnung aus den Bewegungsgleichungen
aber: Haften nur gewährleistet, wenn Reaktionskraft betragsmäßig nicht größer als Grenz-Haftkraft $\mu_0 N$.

Grenz-Haftzahl μ_0 hängt vom Material und dem Zustand der Berührflächen ab, nicht aber von der Größe der Berührungsfläche und der Kraft N .

Haftkegel

$\mu_0 = \text{const.}$ in alle Richtungen der Berührebene: Haftkegel mit Öffnungswinkel α , $\tan \frac{\alpha}{2} = \mu_0$



→ resultierende Berührungskraft aus H und N muss im Haftkegel liegen, um Haften zu gewährleisten

Für $|H| > H_0$: Bewegung zwischen den Berührungskörpern

→ Reibkraft R ist eingeprägte Kraft, $R = \mu N$ mit $\mu \leq \mu_0$