

## Analogie zwischen Dynamik und Kinematik

Dynamik	Kinematik
$(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$	$(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$
Einzelkraft $(\mathbf{F}, A, \mathbf{0})$	Momentanpol $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$
freies Moment $(\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A)$	transl. Bewegung $(\mathbf{v}_A, A, \mathbf{0})$
Momentenversetzung $\mathbf{M}_A^B = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$	rot. Geschwindigkeitsanteil $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \boldsymbol{\omega}$

# Dynamische Axiome der Mechanik

Zwei grundlegenden massenkinematischen Größen:

a) Impuls

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}} \, d m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \rho \, d V$$

b) auf einen raumfesten Punkt bezogenen Drall

$$\mathbf{D}^O := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, d m = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho \, d V$$

Zwei grundlegenden dynamischen Größen:

$\alpha$ ) resultierende Kraft

$$\mathbf{F} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}_S \, d S + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_V \, d V$$

$\beta$ ) auf  $O$  bezogenes resultierendes Moment

$$\mathbf{M}^O := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_S \, d S + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V \, d V$$

# Newton-Eulersche Bewegungsgesetze

## **Axiom**

*Für jede beliebige Bewegung eines Körpers in einem Inertialsystem gelten die nachstehenden, voneinander unabhängigen, dynamischen Bilanzgleichungen:*

1. das **Impulsgesetz**

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{F} \quad (\text{Newton, 1686})$$

*und*

2. das **Drallgesetz**

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O \quad (\text{Euler, 1775}).$$

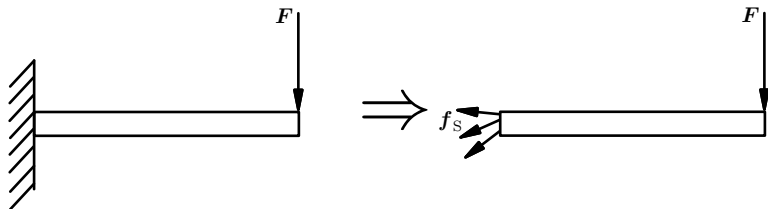
*Hier ist  $O$  ein im Inertialraum ruhender (also raumfester), aber sonst beliebiger Bezugspunkt.*

## Anmerkungen

1. Die Newton-Eulerschen Gesetze sind physikalische Axiome.
2. Die Newton-Eulerschen Gesetze können auch für materiell offene Systeme formuliert werden.
3. Die Newton-Eulerschen Gesetze gelten universell.
4. Die Existenz eines Inertialraumes und der Inertialzeit lässt sich nicht nachweisen.
5. Die Newton-Eulerschen Gesetze gelten nicht nur für einzelne Körper, sondern auch für beliebige Teile von Körpern.

# Eulersches Schnittprinzip

Systemgrenze ziehen: Körper von der Umgebung trennen



## **Axiom (Eulersches Schnittprinzip)**

*Jeder Körper kann von seiner Umgebung mechanisch abgetrennt werden. Ebenso kann jeder Teil des Körpers von seinem Rest mechanisch abgetrennt werden. Die durch das Abtrennen verlorenen mechanischen Einflüsse werden durch die entsprechenden Flächenkraft- und Volumenkraftdichten bzw. die dynamisch äquivalenten Kräfte und Momente ersetzt.*

# Schneiden

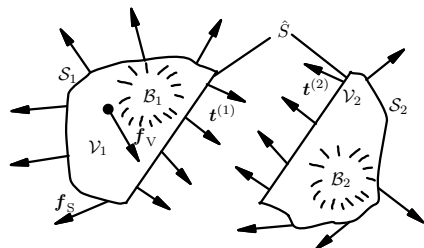
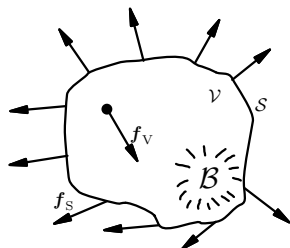
---

## Definition

Ein in Gedanken vollzogener Vorgang, durch den ein Körper bzw. ein Teil des Körpers von seiner Umgebung teilweise abgetrennt wird, nennt man **Schneiden**. Eine in Gedanken vollzogene, vollständige Trennung eines Körpers bzw. eines Teils des Körpers von der Umgebung nennt man **Freischneiden**.

---

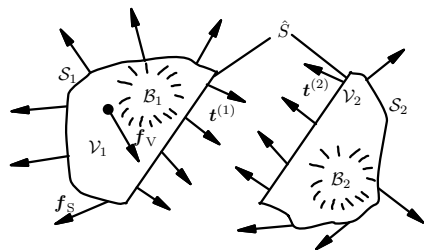
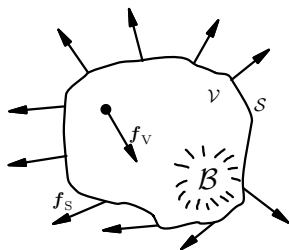
Beispiel:



# Cauchysches Spannungsprinzip

## Axiom

*Der Spannungsvektor in einem Punkt der Schnittfläche ist nur vom Ort und der Zeit sowie dem Normalenvektor in dem Punkt der Schnittfläche abhängig.*



# Dynamische Sätze der Mechanik

- Gegenwirkungssatz
- Massenmittelpunktsätze
- Impuls- und Drallgesetz in bewegten Bezugssystemen
- Räumliche Dynamik des starren Körpers
- Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua
- Statik als Sonderfall der Dynamik

## Gegenwirkungssatz

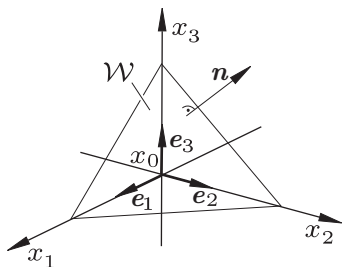
### **Satz (Existenz des Spannungstensors (Satz von Cauchy))**

*Es existiert ein eindeutiges Feld  $\sigma$  von Tensoren 2. Stufe, so dass*

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

*mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}$  der Oberfläche gilt. Der Tensor  $\sigma$  heißt Spannungstensor.*

# Gegenwirkungssatz



Beweis:

Fixiere  $t$  und  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ , betrachte Tetraeder  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$  mit Höhe  $\ell$

$$\text{Wegen } \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\mathcal{W})}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = 0 \text{ und } \mathbf{j} = \mathbf{F} : \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) \, ds}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = \mathbf{0}$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung:

$$\frac{\int_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) \, ds}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = \frac{1}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} (\mathbf{t}(\mathbf{z}, t, \mathbf{n}) \text{Fl}(\Sigma) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{z}_i, t, -\mathbf{e}_i) \text{Fl}(\Sigma_i))$$

## Gegenwirkungssatz

Da  $\text{Fl}(\Sigma_i) = n_i \text{Fl}(\Sigma)$  mit  $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ :

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Fl}(\Sigma)}{\text{Fl}(\partial \mathcal{W})} = \alpha \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Fl}(\Sigma_i)}{\text{Fl}(\partial \mathcal{W})} = n_i \alpha$$

Grenzübergang  $\ell \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{0} = \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n})\alpha + \sum_{i=1}^3 \alpha n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, -\mathbf{e}_i)$$

also

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) = - \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, -\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{e}_i)$$

Setze  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) := \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$

# Gegenwirkungssatz für Spannungen

## **Satz**

*Für die in einem Punkt einer Schnittfläche eines Körpers wirkenden Schnittspannungen  $\mathbf{t}^{(1)}$  und  $\mathbf{t}^{(2)}$  gilt die Beziehung*

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}$$

Beweis:

Wegen  $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}$  gilt:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{n}^{(2)}) = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{t}^{(2)}$$

# Gegenwirkungssatz für Schnittkräfte und -momente

## Satz

Für die Schnittkräfte

$$\mathbf{F}^{(1)} := \int_{\hat{S}} \mathbf{t}^{(1)} dS \text{ und } \mathbf{F}^{(2)} := \int_{\hat{S}} \mathbf{t}^{(2)} dS$$

gilt die Beziehung

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\mathbf{F}^{(2)} \quad (\text{Gegenwirkungssatz für Schnittkräfte})$$

und für die Schnittmomente

$$\mathbf{M}^{Q,1} := \int_{\hat{S}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{t}^{(1)} dS \text{ und } \mathbf{M}^{Q,2} := \int_{\hat{S}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{t}^{(2)} dS$$

die Beziehung

$$\mathbf{M}^{Q,1} = -\mathbf{M}^{Q,2} \quad (\text{Gegenwirkungssatz für Schnittmomente}).$$

## Massenmittelpunktsatz für den Impuls

### Satz

Für jeden Körper gilt die Beziehung

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F},$$

wonach das Produkt der Masse  $m$  des Körpers und der Beschleunigung  $\ddot{\mathbf{r}}_C$  des Massenmittelpunktes  $C$  gleich der resultierenden Kraft  $\mathbf{F}$  ist.

Beweis:

Wegen  $m = \text{const.}$ :

$$\mathbf{l} = m\mathbf{v}_C = m\dot{\mathbf{r}}_C$$

Nach  $t$  ableiten:

$$\mathbf{F} = \dot{\mathbf{l}} = (m\dot{\mathbf{r}}_C)' = m\ddot{\mathbf{r}}_C$$

$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t)$  stellt i. Allg. **keine materielle Bewegung** dar!

# Gleichförmige Bewegung kräftefreier Körper

## Satz

Der Massenmittelpunkt  $C$  eines kräftefreien Körpers bewegt sich gleichförmig, d.h. geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit.

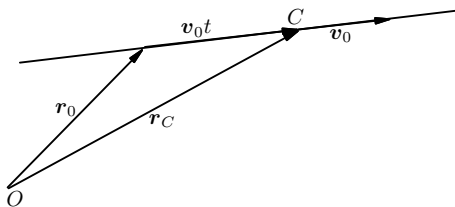
Beweis:

Aus  $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}$  nach Integration:  $\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{A}$  und  $\mathbf{r}_C = \mathbf{A}t + \mathbf{B}$

Anfangsbedingungen:  $\dot{\mathbf{r}}_C(t=0) =: \mathbf{v}_0$  und  $\mathbf{r}_C(t=0) = \mathbf{r}_0$

→  $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{r}_0$ :

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$$



vgl. Galileisches Trägheitsprinzip

# Massenmittelpunktsatz für den Drall

## Satz

Bezogen auf den Massenmittelpunkt  $C$  gilt:

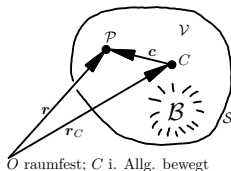
$$\dot{D}^C = M^C$$

mit

$$D^C = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, d m$$

und

$$M^C = \int_S \mathbf{c} \times \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \mathbf{c} \times \mathbf{f}_V \, d V.$$



## Massenmittelpunktsatz für den Drall

Beweis:

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_C \times \mathbf{l} + \mathbf{D}^C = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C m + \mathbf{D}^C$$

nach der Zeit  $t$  ableiten

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C}_{=0} m + \mathbf{r}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_C m + \dot{\mathbf{D}}^C$$

Umformen von  $\mathbf{M}^O$  mit  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^O &= \int_S (\mathbf{r}_C + \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_S dS + \int_V (\mathbf{r}_C + \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V dV \\ &= \mathbf{r}_C \times \underbrace{\left( \int_S \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{f}_V dV \right)}{=: \mathbf{F}} + \underbrace{\int_S \mathbf{c} \times \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{c} \times \mathbf{f}_V dV}_{=: \mathbf{M}^C} \end{aligned}$$

Einsetzen in das Drallgesetz  $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ :

$$\mathbf{r}_C \times \underbrace{(\ddot{\mathbf{r}}_C m - \mathbf{F})}_{=0} + \dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$$

## „Prinzip von d'Alembert“

Impuls- und Drallgesetz bzw. Massenmittelpunktsätze umformulieren

$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}^C - \dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{0}$$

und als Gleichgewichtsbedingungen ( $\rightarrow$  Statik) deuten.

„Trägheitsreaktionen“ im Freischnitt in negative Beschleunigungsrichtung einzeichnen!