

## „Prinzip von d'Alembert“

Impuls- und Drallgesetz bzw. Massenmittelpunktsätze umformulieren

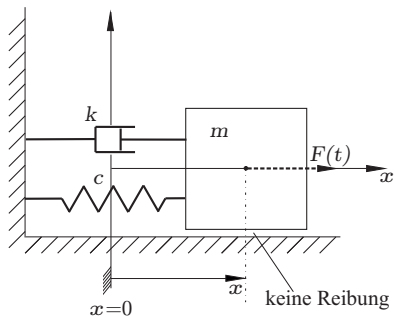
$$\mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}^C - \dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{0}$$

und als Gleichgewichtsbedingungen ( $\rightarrow$  Statik) deuten.

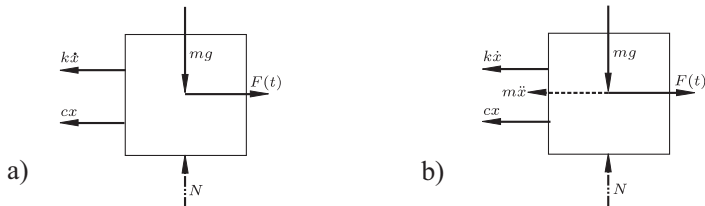
„Trägheitsreaktionen“ im Freischnitt in negative Beschleunigungsrichtung einzeichnen!

## Beispiel: Feder-Masse-Dämpfer-System



# Beispiel: Feder-Masse-Dämpfer-System

Freischnitte:



Massenmittelpunktsatz  $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ :

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) - k\dot{x} - cx \\ N - mg \end{bmatrix}$$

Freischnitt gemäß d'Alembert:

$$\rightarrow: -m\ddot{x} - k\dot{x} - cx + F(t) = 0$$

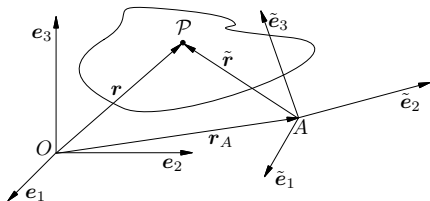
$$\uparrow: N - mg = 0$$

In beiden Fällen Bewegungsgleichung  $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)$

Zwangsbedingung  $N = mg$

# Impuls- und Drallgesetz im bewegten Bezugssystem

## Impuls im bewegten Bezugssystem



Relativgeschwindigkeit in Definition des Impulses einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, d m = \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t)) \, d m \\ &= \dot{\mathbf{r}}_A(t) m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^A + \mathbf{l}_{\text{rel}} \end{aligned}$$

$\mathbf{H}^A$ : statisches Moment bzgl. Ursprung des bewegten Bezugssystems

$$\mathbf{l}_{\text{rel}} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_{\text{rel}} \, d m$$

## Massenmittelpunktsatz für den Impuls im bewegten Bezugssystem

### Satz

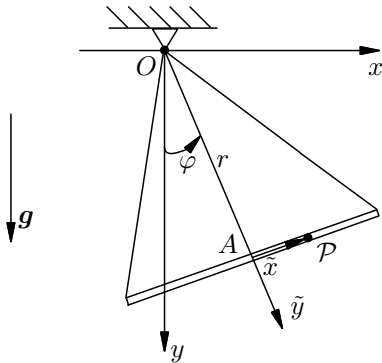
*Für ein bewegtes Bezugssystem lautet der Massenmittelpunktsatz für den Impuls*

$$m(\ddot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}_C(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C(t)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{C,\text{rel}} + \mathbf{a}_{C,\text{rel}}) = \mathbf{F}.$$

Keine zusätzlichen Trägheitsterme im Massenmittelpunktsatz für den Impuls, wenn:

1. der Bezugspunkt zu einem festen Zeitpunkt um einen Vektor verschoben ist
2. der Bezugspunkt sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt
3. das System der Basisvektoren des bewegten Bezugssystems um einen zeitlich konstante Drehung gegenüber dem raumfesten Bezugssystem verdreht ist

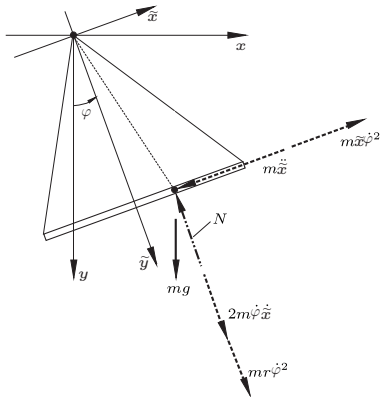
# Bewegung eines Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel



Konstante Winkelgeschwindigkeit:  $\ddot{\varphi} = 0$

# Bewegung eines Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel

Freischnitt nach d'Alembert:

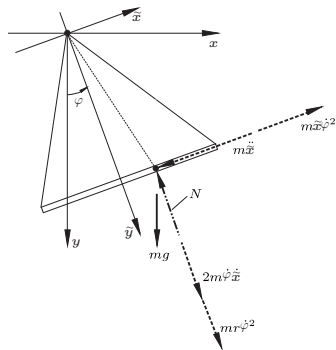


Führungsbeschleunigung:  $\mathbf{a}_F = -\dot{\varphi}^2(\tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_x + r\tilde{\mathbf{e}}_y)$

Coriolisbeschleunigung:  $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_y$

Relativbeschleunigung:  $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{e}}_x$

# Bewegung eines Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel



Auswertung des Freischnitts im bewegten A,  $\tilde{\mathbf{e}}_x$ ,  $\tilde{\mathbf{e}}_y$ -Bezugssystem:

$$\text{in } \tilde{x}\text{-Richtung: } -m\ddot{\tilde{x}} + m\dot{\varphi}^2\tilde{x} - mg \sin \varphi = 0$$

$$\text{in } \tilde{y}\text{-Richtung: } -N + mg \cos \varphi + mr\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{\tilde{x}} = 0$$

# Wirkung der Coriolisbeschleunigung auf einen Massenpunkt im Rhein bei Karlsruhe

Annahmen:

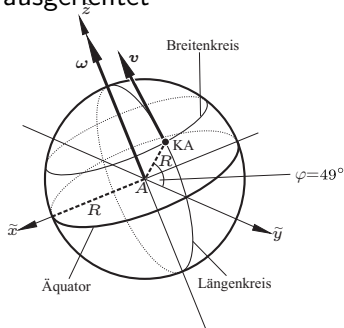
Rhein fließt genau Richtung Norden  
konstanten Fließgeschwindigkeit  $v$

bewegtes Bezugssystem:

A: Erdmittelpunkt

$\tilde{e}_y$ -Richtung zeigt zum Längengreis von Karlsruhe

$\tilde{e}_z$ -Achse nach Norden ausgerichtet



# Wirkung der Coriolisbeschleunigung

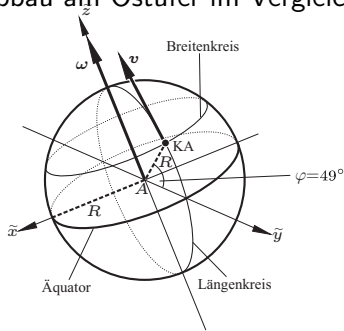
Relativgeschwindigkeit tangential an den Längenkreis:

$$\mathbf{v}_{C,rel} = -v \sin \varphi \tilde{\mathbf{e}}_y + v \cos \varphi \tilde{\mathbf{e}}_z$$

Coriolisbeschleunigung:  $\mathbf{a}_{Cor} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{C,rel}$ , mit  $\boldsymbol{\omega} = \omega \tilde{\mathbf{e}}_z$ :

$$\mathbf{a}_{Cor} = -2\omega v \sin \varphi (\tilde{\mathbf{e}}_z \times \tilde{\mathbf{e}}_y) = 2\omega v \sin \varphi \tilde{\mathbf{e}}_x$$

Coriolisbeschleunigung tangential zum Breitenkreis in Richtung Westen  
Trägheitswirkung im Sinne d'Alemberts Richtung Osten  
→ größerer Sedimentabbau am Ostufer im Vergleich zum Westufer



## Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt

### **Satz**

*Bezüglich eines bewegten Punkts A gilt*

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A.$$

*Darin ist  $\tilde{\mathbf{r}}_C$  der Ortsvektor von A zum Massenmittelpunkt C und  $\mathbf{a}_A$  die Absolutbeschleunigung von A.*

## Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt

Beweis:

Drall bezüglich eines raumfesten Punktes  $O$ :

$$\mathbf{D}^O = \int_B \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d m = \int_B (\mathbf{r}_A + \tilde{\mathbf{r}}) \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) \, d m$$

Berechnung der Drallanteile mit Hilfe des Massenmittelpunkts:

$$\begin{aligned} \int_B \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) \, d m &= \mathbf{r}_A \times \int_B (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) \, d m \\ &= \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C + \mathbf{v}_{C,\text{rel}}) m \\ &= \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_C m \end{aligned}$$

$$\int_B \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}_A \, d m = \int_B \tilde{\mathbf{r}} \, d m \times \mathbf{v}_A = m \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{v}_A$$

$$\int_B \tilde{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) \, d m =: \mathbf{D}^A$$

Insgesamt:  $\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_C m + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{v}_A m + \mathbf{D}^A$

## Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_{Cm} + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{v}_{Am} + \mathbf{D}^A$$

Zeitableitung des Dralls:

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_{Cm} + \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{Cm} + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \times \mathbf{v}_{Am} + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_{Am} + \dot{\mathbf{D}}^A$$

Mit  $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C$ :

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \times \mathbf{v}_{Am} = (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_{Am} = (\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A - \mathbf{0})m = -\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_{Cm}$$

Es verbleibt:

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{Cm} + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_{Am} + \dot{\mathbf{D}}^A$$

Drallgesetz, Momentenversetzung und Massenmittelpunktsatz liefern dann

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_{Cm} + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_{Am} + \dot{\mathbf{D}}^A &= \dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O \\ &= \mathbf{M}^A + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{M}^A + \mathbf{r}_A \times m\mathbf{a}_C \end{aligned}$$

Es verbleibt:

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_{Am} + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$$

## Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$$

Korollar:

Gilt für einen bewegten Punkt  $A$

1.  $A = C$  ( $A$  fällt mit dem Massenmittelpunkt zusammen),
2.  $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$  (Der Bezugspunkt bewegt sich unbeschleunigt) **oder**
3.  $\tilde{\mathbf{r}}_C \parallel \mathbf{a}_A$ ,

dann ist  $\dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$ .

→ Drallgesetz invariant in unbeschleunigten Bezugssystemen!

# Dynamische Sätze der Mechanik

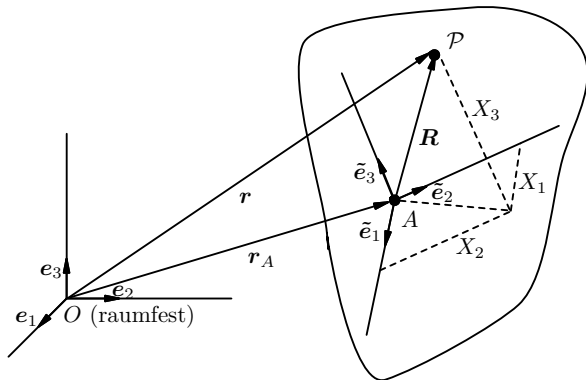
- Räumliche Dynamik des starren Körpers
- Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua
- Statik als Sonderfall der Dynamik

# Materielle Koordinaten des starren Körpers

körperfestes Bezugssystem:  $A, \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$

relative Ortsvektor von  $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A = X_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + X_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 + X_3 \tilde{\mathbf{e}}_3 = X_i \tilde{\mathbf{e}}_i, X_i = \text{const. bzgl. } t$$



Wegen  $\|\mathbf{R}\| = \text{const.}$  bzgl.  $t$ :  $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$

# Massenträgheitstensor

Drall bzgl. A:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^A &= \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_A) \, d m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \, d m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, d m \\ &= \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\boldsymbol{\omega}}_{=\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})} \, d m \\ &= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, d m = \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, d m}_{=:\boldsymbol{\Theta}^A}. \end{aligned}$$

mit  $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}$  und  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$