Massenträgheitstensor

Definition

Sei $\mathcal{B}$ ein starrer Körper und A ein körperfester Punkt. Der Tensor 2. Stufe

$$\boldsymbol{\Theta}^A := \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R} \otimes \boldsymbol{R}) \,\mathrm{d}\, m$$

heißt **Massenträgheitstensor** *von $\mathcal{B}$ bezüglich A.*

- symmetrischer Tensor 2. Stufe
- Drall hängt linear von der Drehgeschwindigkeit ab
- aber: linearer Zusammenhang durch einen Tensor 2. Stufe (kein Skalar!)

Massenträgheitsmomente

Mit $\boldsymbol{E} = \delta_{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j$ und $\boldsymbol{R} = X_i\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i = X_j\,\tilde{\boldsymbol{e}}_j$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}^A &= \int_{\mathcal{B}} \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{R}\otimes\boldsymbol{R}\right) \mathrm{d}\,m \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j - X_i X_j\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j\right) \mathrm{d}\,m \\
&= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij} - X_i X_j\right) \mathrm{d}\,m}_{=\tilde{\theta}_{ij}^A}\; \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j = \tilde{\theta}_{ij}^A\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j
\end{aligned}
$$

Definition (Massenträgheitsmomente)
Die Koordinaten $\tilde{\theta}_{ij}^A = \int_{\mathcal{B}} \left((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij} - X_i X_j\right) \mathrm{d}\,m$ *des Massenträgheitstensors* $\boldsymbol{\Theta}^A$ *heißen* **Massenträgheitsmomente**. *Für* $i = j$ *heißen sie* **axiale Massenträgheitsmomente**, *für* $i \neq j$ **Deviationsmomente**.

$\tilde{\theta}_{ij}^A = \text{const. bezgl. } t!$

Massenträgheitsmomente

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \int_{\mathcal{B}} \left((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij}\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j - X_i X_j\, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j \right) \mathrm{d}\, m$$

Matrixform:

$$\left[\tilde{\theta}_{ij}^A\right] = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}}(X_2^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\, m & -\int_{\mathcal{B}} X_1 X_2\,\mathrm{d}\, m & -\int_{\mathcal{B}} X_1 X_3\,\mathrm{d}\, m \\ -\int_{\mathcal{B}} X_2 X_1\,\mathrm{d}\, m & \int_{\mathcal{B}}(X_1^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\, m & -\int_{\mathcal{B}} X_2 X_3\,\mathrm{d}\, m \\ -\int_{\mathcal{B}} X_3 X_1\,\mathrm{d}\, m & -\int_{\mathcal{B}} X_3 X_2\,\mathrm{d}\, m & \int_{\mathcal{B}}(X_1^2 + X_2^2)\,\mathrm{d}\, m \end{bmatrix}$$

Hauptachsendarstellung:

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \tilde{\theta}_{\mathrm{H}_{(i)}}^A\, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i}$$

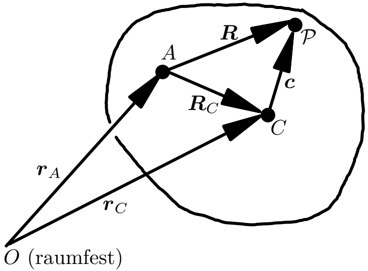
$\tilde{\theta}_{\mathrm{H}_i}^A$: Hauptträgheitsmomente

Massenträgheitstensor bzgl. des Massenmittelpunktes

$$\boldsymbol{\Theta}^C := \int_{\mathcal{B}} \left(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{c}\right) \mathrm{d}\, m$$

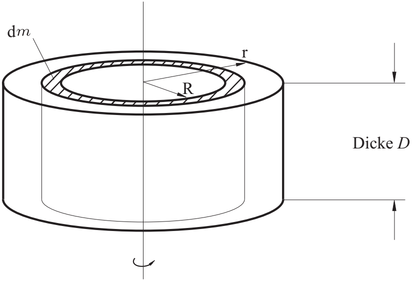
Damit:

$$\boldsymbol{D}^C = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\Theta}^C$$



Beispiel: Massenträgheitsmoment eines rotierenden Vollzylinders

Drehung um Hauptachse $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_3}$

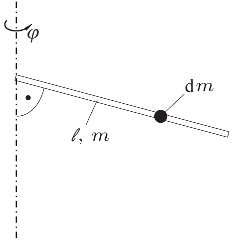


$$\tilde{\theta}^{O}_{\mathrm{H}_3} = \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_2^2)\,\mathrm{d}\,m = \int\limits_{\mathcal{B}} R^2\,\mathrm{d}\,m = \int\limits_0^r R^2 \rho 2\pi R D\,\mathrm{d}\,R$$

$$= 2\pi\rho D \int\limits_0^r R^3\,\mathrm{d}\,R = \frac{\pi\rho D}{2} r^4 = \underbrace{\pi r^2 \rho D}_{=m} \frac{r^2}{2} = \frac{m r^2}{2}$$

Beispiel: Massenträgheitsmoment eines rotierenden Stabs

Drehachse am Stabende, Hauptachse $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_3}$

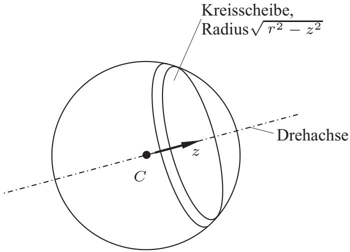


$$\tilde{\theta}^{O}_{\mathrm{H}_3} = \int\limits_{\mathcal{B}} R^2 \,\mathrm{d}\, m = \int\limits_0^{\ell} R^2 \frac{m}{\ell} \,\mathrm{d}\, R = \frac{m}{\ell} \int\limits_0^{\ell} R^2 \,\mathrm{d}\, R = \frac{m}{\ell}\frac{\ell^3}{3}$$

$$= m\frac{\ell^2}{3}$$

Verläuft die Drehachse durch die Stabmitte, so ist $\tilde{\theta}^{O}_{\mathrm{H}_3} = m\frac{\ell^2}{12}$

Beispiel: Massenträgheitsmoment einer rotierenden Kugel



$$\tilde{\theta}^C_{\mathsf{H}_3} = \int_{-r}^{r} \rho\pi(r^2 - z^2)\frac{(r^2 - z^2)}{2}\,\mathrm{d}\,z = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-r}^{r}(r^4 - 2r^2z^2 + z^4)\,\mathrm{d}\,z$$

$$= \frac{\pi\rho}{2}\left(r^4z - \frac{2}{3}r^2z^3 + \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_{-r}^{r} = \frac{8}{15}\pi\rho r^5 = \underbrace{\frac{4}{3}\pi\rho r^3}_{=m}\,\frac{2}{5}r^2$$

$$= \frac{2}{5}mr^2$$

Änderung des Bezugspunkts – Satz von Steiner

Satz (Satz von Steiner)
Zwischen $\boldsymbol{\Theta}^A$ bezogen auf einen körperfesten Punkt A und $\boldsymbol{\Theta}^C$ bezogen auf den Massenmittelpunkt gilt

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^C + \left(\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{R}_C) - \boldsymbol{R}_C \otimes \boldsymbol{R}_C\right) m,$$

wobei $\boldsymbol{R}_C$ der Ortsvektor von A nach C ist.

Beweis:
Setze $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{c}$ in Gleichung für den Massenträgheitstensor ein:

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \int_{\mathcal{B}} \left(\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{c}) \otimes (\boldsymbol{R}_C + \boldsymbol{c})\right) \mathrm{d}\, m$$

Wegen $\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{c}\, \mathrm{d}\, m = \boldsymbol{0}$:

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\left(\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{R}_C) - \boldsymbol{R}_C \otimes \boldsymbol{R}_C\right)}_{\text{konstant bzgl. Integration}} \mathrm{d}\, m + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left(\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c} \otimes \boldsymbol{c}\right) \mathrm{d}\, m}_{=:\boldsymbol{\Theta}^C}$$

Änderung des Bezugspunkts – Satz von Steiner

Beispiel:

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^C + \left(\boldsymbol{E}\,(\boldsymbol{R}_C \cdot \boldsymbol{R}_C) - \boldsymbol{R}_C \otimes \boldsymbol{R}_C\right) m$$

ausgewertet für $\tilde{\theta}^A_{33}$:

$$\tilde{\theta}^A_{33} = \tilde{\theta}^C_{33} + (R^2_{C1} + R^2_{C2} + R^2_{C3} - R^2_{C3})m = \tilde{\theta}^C_{33} + (R^2_{C1} + R^2_{C2})m$$

1. Stab der Länge ℓ, A am Stabende:

$$\tilde{\theta}^A_{33} = \tilde{\theta}^C_{33} + (\frac{\ell}{2})^2 m = m\frac{\ell^2}{12} + \frac{\ell^2}{4}m = m\frac{\ell^2}{3}$$

2. Vollzylinder, A auf der Zylindermantelfläche:

$$\tilde{\theta}^A_{33} = \tilde{\theta}^C_{33} + r^2 m = m\frac{r^2}{2} + r^2 m = \frac{3}{2}mr^2$$

Drehung des Bezugssystems

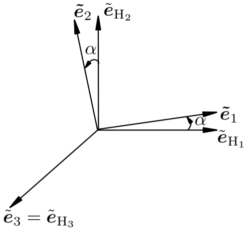
hier: Drehung um eine Achse des Hauptrichtungssystems

Satz (Massenträgheitsmomente bei gedrehten Basisvektoren)
$\tilde{\boldsymbol{e}}_1$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_2$, $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_3}$ gegenüber dem Hauptrichtungssystem um die $\tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_3}$-Richtung mit Winkel α gedreht. Dann:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\theta}^A_{11} &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2}) - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1})\cos(2\alpha),\\
\tilde{\theta}^A_{22} &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2}) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1})\cos(2\alpha),\\
\tilde{\theta}^A_{12} &= \tilde{\theta}^A_{21} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1})\sin(2\alpha),\\
\tilde{\theta}^A_{33} &= \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_3},\\
\tilde{\theta}^A_{13} &= \tilde{\theta}^A_{31} = \tilde{\theta}^A_{32} = \tilde{\theta}^A_{23} = 0
\end{aligned}
$$

Drehung des Bezugssystems

Beweis:



Koordinatentransformation:

$$\tilde{X}_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha$$
$$\tilde{X}_2 = -X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha$$

damit:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_{11}^A &= \int_{\mathcal{B}} (\tilde{X}_2^2 + \tilde{X}_3^2)\,\mathrm{d}\,m \\
&= \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 \cos^2\alpha - 2X_1X_2 \sin\alpha\cos\alpha + X_1^2 \sin^2\alpha + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \\
&= \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \cos^2\alpha + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \sin^2\alpha - 0 \\
&= \tilde{\theta}_{\mathrm{H}_1}^A \cos^2\alpha + \tilde{\theta}_{\mathrm{H}_2}^A \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Drehung des Bezugssystems

Koordinatentransformation:

$$\tilde{X}_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha$$
$$\tilde{X}_2 = -X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha$$

analog:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^A_{22} &= \int_{\mathcal{B}} (\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_3^2)\,\mathrm{d}\,m \\
&= \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 \cos^2\alpha + 2X_1X_2 \sin\alpha\cos\alpha + X_2^2 \sin^2\alpha + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \\
&= \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \cos^2\alpha + \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2)\,\mathrm{d}\,m \sin^2\alpha + 0 \\
&= \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2} \cos^2\alpha + \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1} \sin^2\alpha
\end{aligned}$$

Drehung des Bezugssystems

Koordinatentransformation:

$$\tilde{X}_1 = X_1 \cos\alpha + X_2 \sin\alpha$$
$$\tilde{X}_2 = -X_1 \sin\alpha + X_2 \cos\alpha$$

ferner:

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^A_{12} = \tilde{\theta}^A_{21} &= -\int_{\mathcal{B}} \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \,\mathrm{d}\, m \\
&= -\int_{\mathcal{B}} X_1 X_2 \,\mathrm{d}\, m (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 - X_2^2) \,\mathrm{d}\, m \cos\alpha \sin\alpha \\
&= 0 + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2 - X_2^2 - X_3^2) \,\mathrm{d}\, m \cos\alpha \sin\alpha \\
&= (\tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathrm{H}_1}) \cos\alpha \sin\alpha
\end{aligned}$$

Drehung des Bezugssystems

insgesamt:

$$\tilde{\theta}^A_{11} = \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} \cos^2\alpha + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} \sin^2\alpha$$
$$\tilde{\theta}^A_{22} = \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} \cos^2\alpha + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} \sin^2\alpha$$
$$\tilde{\theta}^A_{12} = \tilde{\theta}^A_{21} = (\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1}) \cos\alpha \sin\alpha$$

trigonometrische Beziehungen:

$$\cos^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$
$$\sin^2\alpha = \tfrac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$
$$\sin\alpha \cos\alpha = \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha$$

führt auf:

$$\tilde{\theta}^A_{11} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2}) - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1}) \cos(2\alpha)$$
$$\tilde{\theta}^A_{22} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2}) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1}) \cos(2\alpha)$$
$$\tilde{\theta}^A_{12} = \tilde{\theta}^A_{21} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1}) \sin(2\alpha)$$

Drehung des Bezugssystems

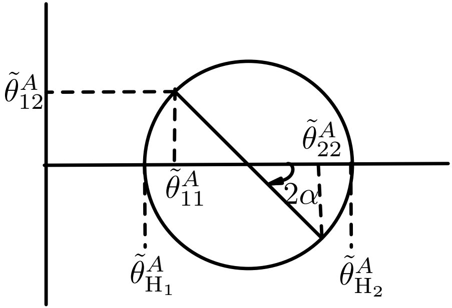
$$\tilde{\theta}^A_{11} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2}) - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1})\cos(2\alpha)$$

$$\tilde{\theta}^A_{22} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2}) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1})\cos(2\alpha)$$

$$\tilde{\theta}^A_{12} = \tilde{\theta}^A_{21} = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1})\sin(2\alpha)$$

Veranschaulichung: Mohrscher Kreis

Mittelpunkt: $\frac{1}{2}(\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} + \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2})$, Radius: $\frac{1}{2}|\tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_1} - \tilde{\theta}^A_{\mathsf{H}_2}|$



Eulersche Kreiselgleichung

Satz

Es sei C der Massenmittelpunkt des starren Körpers und $\boldsymbol{\Theta}^C$ der Massenträgheitstensor des Körpers in einem an C gebundenen aber sonst **beliebigen** *Bezugssystem $(C, \tilde{\boldsymbol{e}}_i)$. Zwischen der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ und dem resultierenden Moment $\boldsymbol{M}^C$ gilt die Differentialgleichung*

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^C.$$

Eulersche Kreiselgleichung

Beweis:

Ableitung von $\boldsymbol{D}^C$ nach t: $\dot{\boldsymbol{D}}^C = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{\Theta}}^C$ mit

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\Theta}}^C &= \dot{\tilde{\theta}}_{ij}^C \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \, \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_j \\
&= \tilde{\theta}_{ij}^C \, (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{e}}_i) \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \underbrace{(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{e}}_j)}_{-\tilde{\boldsymbol{e}}_j \times \boldsymbol{\omega}} \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{\tilde{\theta}_{ij}^C \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j}_{=\boldsymbol{\Theta}^C} - \underbrace{\tilde{\theta}_{ij}^C \, \tilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_j}_{=\boldsymbol{\Theta}^C} \times \boldsymbol{\omega} \\
&= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}^C - \boldsymbol{\Theta}^C \times \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
\dot{\boldsymbol{D}}^C = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C + \underbrace{\cancel{\boldsymbol{\omega} \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\Theta}^C\right)}}_{=(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \boldsymbol{\Theta}^C} - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \times \boldsymbol{\omega}
$$

und $\dot{\boldsymbol{D}}^C = \boldsymbol{M}^C$

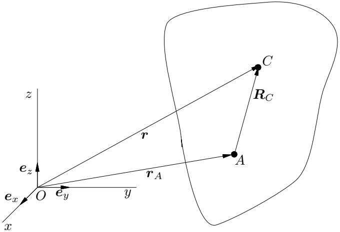
Eulersche Kreiselgleichung für körperfesten Bezugspunkt

es gilt weiterhin

$$\dot{\boldsymbol{D}}^A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \times \boldsymbol{\omega}$$

mit Drallsatz für bewegten Bezugspunkt:

$$\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{a}_A m + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^A$$



Zusatzterm $\boldsymbol{R}_C \times \boldsymbol{a}_A m$ verschwindet, falls

1. $A = C$ (A fällt mit dem Massenmittelpunkt zusammen)
2. $\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{0}$ (Bezugspunkt bewegt sich unbeschleunigt, z.B. auf der Drehachse) **oder**
3. $\boldsymbol{R}_C \parallel \boldsymbol{a}_A$

Eulersche Kreiselgleichungen im Hauptachsensystem

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}^C$$

Hauptachsendarstellung: $\boldsymbol{\Theta}^C = \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_{(i)}} \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i}$ und $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i}$

Ableitung der Drehgeschwindigkeit:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\tilde{\omega}}_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} + \tilde{\omega}_i \, \dot{\tilde{\boldsymbol{e}}}_{\mathrm{H}_i} = \dot{\tilde{\omega}}_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} + \underbrace{\tilde{\omega}_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i}\right)}_{=\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\omega}_i \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}}$$

Somit: $\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C = \dot{\tilde{\omega}}_i \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i} \cdot \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_{(j)}} \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_j} \otimes \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_j} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_{(i)}} \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{H}_i}$

Analog: $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C = \tilde{\omega}_i \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_{(i)}} \, \tilde{\boldsymbol{e}}_{H_i}$

Einsetzen und auswerten von $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \times \boldsymbol{\omega}$:

$$\dot{\tilde{\omega}}_1 \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_1} - \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \left(\tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_3}\right) = \tilde{M}^C_1$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_2} - \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_1 \left(\tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_3} - \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_1}\right) = \tilde{M}^C_2$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_3} - \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \left(\tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_1} - \tilde{\theta}^C_{\mathrm{H}_2}\right) = \tilde{M}^C_3$$