

Eulersche Kreiselgleichungen im Hauptachsensystem

$$\dot{\omega} \cdot \Theta^C - \omega \cdot \Theta^C \times \omega = M^C$$

Hauptachsendarstellung: $\Theta^C = \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{\mathbf{e}}_{H_i} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_{H_i}$ und $\omega = \tilde{\omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_{H_i}$

Ableitung der Drehgeschwindigkeit:

$$\dot{\omega} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\mathbf{e}}_{H_i} + \tilde{\omega}_i \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_{H_i} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\mathbf{e}}_{H_i} + \underbrace{\tilde{\omega}_i (\omega \times \tilde{\mathbf{e}}_{H_i})}_{=\omega \times \tilde{\omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_{H_i} = \omega \times \omega = \mathbf{0}}$$

Somit: $\dot{\omega} \cdot \Theta^C = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\mathbf{e}}_{H_i} \cdot \tilde{\theta}_{H(j)}^C \tilde{\mathbf{e}}_{H_j} \otimes \tilde{\mathbf{e}}_{H_j} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{\mathbf{e}}_{H_i}$

Analog: $\omega \cdot \Theta^C = \tilde{\omega}_i \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{\mathbf{e}}_{H_i}$

Einsetzen und auswerten von $\omega \cdot \Theta^C \times \omega$:

$$\dot{\tilde{\omega}}_1 \tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \left(\tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\theta}_{H_3}^C \right) = \tilde{M}_1^C$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_1 \left(\tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\theta}_{H_1}^C \right) = \tilde{M}_2^C$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \left(\tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\theta}_{H_2}^C \right) = \tilde{M}_3^C$$

Spezialfall: Ebene Starrkörperbewegung

$$\dot{\tilde{\omega}}_1 \tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 \left(\tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\theta}_{H_3}^C \right) = \tilde{M}_1^C$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_2 \tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_1 \left(\tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\theta}_{H_1}^C \right) = \tilde{M}_2^C$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \left(\tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\theta}_{H_2}^C \right) = \tilde{M}_3^C$$

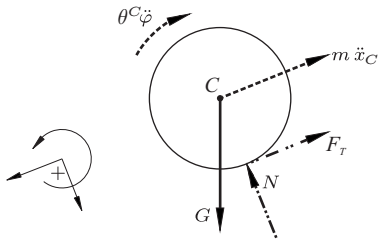
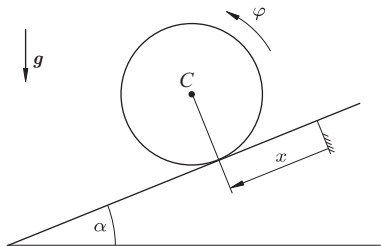
$\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = 0$, folglich $\dot{\tilde{\omega}}_1 = \dot{\tilde{\omega}}_2 = 0$:

$$0 = \tilde{M}_1^C$$

$$0 = \tilde{M}_2^C$$

$$\dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}_{H_3}^C = \tilde{M}_3^C$$

Beispiel: Starres Rad auf schiefer Ebene



Freischnitt nach d'Alembert:

$$G \sin \alpha - F_T - m\ddot{x}_C = 0$$

$$G \cos \alpha - N = 0$$

$$aF_T - \theta^C\ddot{\varphi} = 0$$

Beispiel: Starres Rad auf schiefer Ebene

$$G \sin \alpha - F_T - m\ddot{x}_C = 0$$

$$G \cos \alpha - N = 0$$

$$aF_T - \theta^C \ddot{\varphi} = 0$$

Reines Rollen

Haften \rightarrow Momentanpol: Kontaktpunkt zwischen Rad und schiefer Ebene ein Freiheitsgrad, kinematische Bindung: $\dot{x}_C = a\dot{\varphi}$

Ableiten nach der Zeit und einsetzen in die erste Gleichung:

$$G \sin \alpha - F_T - ma\ddot{\varphi} = 0$$

Mit $F_T = \frac{\theta^C \ddot{\varphi}}{a}$ (3. Gleichung):

$$G \sin \alpha - \left(\frac{\theta^C}{a} + ma \right) \ddot{\varphi} = 0$$

Auflösen nach $\ddot{\varphi}$, verwenden von $G = mg$ und $\theta^C = \frac{m}{2}a^2$:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g \sin \alpha}{3a}$$

Beispiel: Starres Rad auf schiefer Ebene

$$F_T = \frac{\theta^C \ddot{\varphi}}{a}, \quad \ddot{\varphi} = \frac{2g \sin \alpha}{3a}, \quad \theta^C = \frac{m}{2} a^2$$

Damit:

$$\ddot{x}_C = a \ddot{\varphi} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Prüfen der Haftbedingung:

$$F_T \leq \mu_0 N$$

Mit $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$ (2. Gleichung):

$$F_T = \frac{\theta^C \ddot{\varphi}}{a} = \frac{mg \sin \alpha}{3} \leq \mu_0 mg \cos \alpha, \quad \text{also } \tan \alpha \leq 3\mu_0$$

Beispiel: Starres Rad auf schiefer Ebene

$$G \sin \alpha - F_T - m\ddot{x}_C = 0$$

$$N - G \cos \alpha = 0$$

$$aF_T - \theta^C \ddot{\varphi} = 0$$

Gleitendes Rollen

Kontaktpunkt ist nicht mehr Momentanpol, zwei Freiheitsgrade

Reibgesetz: $F_T = \mu N = \mu mg \cos \alpha$

Damit Beschleunigungen:

$$\ddot{x}_C = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{2\mu g \cos \alpha}{a}$$

Wegen $\tan \alpha > 3\mu_0 \geq 3\mu$ und $0 \leq \alpha < \pi$: $\ddot{x}_C > 0$

Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua

Satz (Lokale Form des Impulsgesetzes)

Es gilt: $\rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_V + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}$

Beweis:

Betrachte bel. zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ der Momentanlage:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{v} \rho \, dV &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{f}_V \, dV + \int_{\partial \mathcal{U}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{f}_V \, dV + \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV \end{aligned}$$

Vertauschen von Zeitableitung und Integration:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{v} \rho \, dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}} \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}} \dot{\mathbf{v}} \, dm = \int_{\mathcal{U}} \dot{\mathbf{v}} \rho \, dV$$

wobei $\dot{\mathbf{v}}$ die materielle Zeitableitung ist!

$\int_{\mathcal{U}} (\dot{\mathbf{v}} \rho - \mathbf{f}_V - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \, dV = \mathbf{0}$ für bel. Teilmenge \mathcal{U}

→ Integrand verschwindet!

Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua

Satz (Lokale Form des Drallgesetzes)

Der Spannungstensor σ ist symmetrisch.

Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua

Beweis:

Betrachte bel. zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. Drallgesetz:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V dV + \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS$$

Letzter Summand:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\mathcal{U}} \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) dV \\ &= \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial r_i}{\partial x_l} \sigma_{jk} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) dV + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j dV + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} dV \end{aligned}$$

Vertauschen von Zeitableitung und Integration:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_U} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm = \int_{\mathcal{B}_U} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) dm = \int_{\mathcal{B}_U} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} dm \\ &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho dV \end{aligned}$$

Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua

Somit:

$$\int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \underbrace{(\dot{\mathbf{v}}\rho - \mathbf{f}_V - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})}_{=0} dV = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j dV$$

Gilt für beliebige Teilmenge $\mathcal{U} \rightarrow$ Integrand verschwindet:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Wegen $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$ ist $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k$, daher

$$\sigma_{jk} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$$

Auswertung des Vektorprodukts liefert $\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0$

Statik als Sonderfall der Dynamik

Definition (Zustand der Ruhe)

*Ein Körper \mathcal{B} befindet sich zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ im **Zustand der Ruhe**, wenn die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte des Körpers zu diesem Zeitpunkt gleich dem Nullvektor sind, d.h. wenn $\mathbf{v}(\mathcal{P}, t_0) = \mathbf{0}$ für alle $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ gilt.*

Statik als Sonderfall der Dynamik

Satz (Gleichgewichtsbedingungen im Zustand der Ruhe)

Befindet sich ein Körper in einem Zeitintervall im Zustand der Ruhe, so gelten die nachstehenden Gleichungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{M}^O = \mathbf{0},$$

Gleichgewichtsbedingungen genannt. Hierin bezeichnen \mathbf{F} die resultierende Kraft auf den Körper und \mathbf{M}^O das resultierende Moment auf den Körper bezüglich eines beliebigen, raumfesten Punktes O in einem Inertialraum.

Beweis:

Setze $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{P}, t_0) = \mathbf{0}$ in Impulsgesetz $\dot{\mathbf{i}} = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, d m\right)' = \mathbf{F}$ und Drallgesetz $\dot{\mathbf{D}}^O = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d m\right)' = \mathbf{M}^O$ ein.

Gleichgewichtsbedingungen notwendig, aber **nicht hinreichend** für Ruhe.

Analytische Methoden der Mechanik

bisher: Axiome

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{i}} &= \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{D}}^O &= \mathbf{M}^O\end{aligned}$$

Massenmittelpunktsätze:

$$\begin{aligned}m\dot{\mathbf{v}}_C &= \mathbf{F} \\ \dot{\mathbf{D}}^C &= \mathbf{M}^C\end{aligned}$$

Ziel: Ermittlung der Bewegungsgleichungen/kinematischen Größen, ohne dass Schnittreaktionen auftreten

dafür erforderlich:

- mechanische Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen
- virtuelle Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen
- Lagrange-Gleichungen 2. Art

Analytische Methoden der Mechanik

mathematische Vorüberlegung: Gleichungssysteme

$$x + y + z = 3 \quad (1)$$

$$y + z = 2 \quad (2)$$

$$y - z = 0 \quad (3)$$

Lösung: $x = y = z = 1$, z.B.

$$(1) - (2) \rightarrow x$$

$$\frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(3) \rightarrow y$$

$$\frac{1}{2}(2) - \frac{1}{2}(3) \rightarrow z$$

Was wäre eine geeignete Vorgehensweise, wenn nur x gesucht ist?

Analytische Methoden der Mechanik

dazu: Formalisierung der Lösungsfindung:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} x + y + z \\ y + z \\ y - z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a} = \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ für alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$

speziell:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow x, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow y, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow z$$

- Kommt man von $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ wieder zu $\mathbf{a} = \mathbf{b}$?
Offenbar schon, wenn alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ betrachtet werden (z.B. alle Basisvektoren für \mathbf{c} einsetzen).
- Wie findet man geeignete \mathbf{c} , um Komponenten des Lösungsvektors auszurechnen?

Analytische Methoden der Mechanik

Auffinden geeigneter \mathbf{c} : Formulierung als lineares Gleichungssystem

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dann: $(\mathbf{Ax}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \rightarrow \mathbf{x} \cdot (\mathbf{A}^T \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

gesucht: \mathbf{c}_i , so dass $\mathbf{A}^T \mathbf{c}_i = \mathbf{e}_i$, also $\mathbf{c}_i = \mathbf{A}^{-T} \mathbf{e}_i$

hier:

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

aber: Ermittlung der \mathbf{c}_i erfordert bereits das Lösen eines linearen Gleichungssystems!

→ Physik benötigt, Projektion auf die Bahn der Bewegung mittels \mathbf{v}