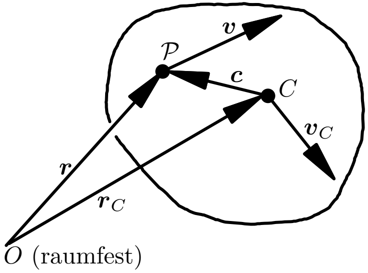
Kinetische Energie

Definition

Die **kinetische Energie** *eines Körpers $\mathcal{B}$ ist der durch die Gleichung*

$$E := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\rho\,\mathrm{d}\,V = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}^2\,\mathrm{d}\,m$$

definierte physikalische Skalar, wobei $\boldsymbol{v} := \dot{\boldsymbol{r}}$ das Geschwindigkeitsfeld von $\mathcal{B}$ ist und $\boldsymbol{v}^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^2$ ist.



Kinetische Energie des starren Körpers

Satz

Für einen starren Körper und einen beliebigen körperfesten Punkt A lautet die kinetische Energie:

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_A + m \boldsymbol{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega},$$

wobei $\boldsymbol{R}_C$ den Ortsvektor von A zum Massenmittelpunkt bezeichnet.

Kinetische Energie des starren Körpers

Beweis:

$$
\begin{aligned}
E =& \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\,m\\
=& \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}\,m\\
=& \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_A\,\mathrm{d}\,m+\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{v}_A\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}\,m\\
&+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}\,m\\
=& \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_A+\boldsymbol{v}_A\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{R}\,\mathrm{d}\,m)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\int_{\mathcal{B}}\boldsymbol{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R})\,\mathrm{d}\,m\\
=& \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_A\cdot\boldsymbol{v}_A+m\boldsymbol{v}_A\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{R}_C)+\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\underbrace{\boldsymbol{D}^A}_{=\boldsymbol{\Theta}^A\cdot\boldsymbol{\omega}}
\end{aligned}
$$

Kinetische Energie des starren Körpers

Satz
Für einen starren Körper und einen beliebigen körperfesten Punkt A lautet die kinetische Energie:

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_A + m \boldsymbol{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega},$$

wobei $\boldsymbol{R}_C$ den Ortsvektor von A zum Massenmittelpunkt bezeichnet.

Definition (Anteile der kinetischen Energie des starren Körpers)
Der Term $E_{\mathrm{tr}} := \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_A$ wird als **translatorischer Anteil** *und der Term $E_{\mathrm{rot}} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$ als* **rotatorischer Anteil** *der kinetischen Energie des starren Körpers bezeichnet, $m \boldsymbol{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C)$ heißt* **Wechselenergie**.

Kinetische Energie des starren Körpers, Spezialfälle

$$E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{v}_A + m \boldsymbol{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$$

- Massenmittelpunkt $A = C$:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{D}^C \end{aligned}$$

- Momentanpol $A = M$: $E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^M \cdot \boldsymbol{\omega}$,
  z.B. Punkt auf der Drehachse!

- Ebene Bewegung, rotatorischer Anteil

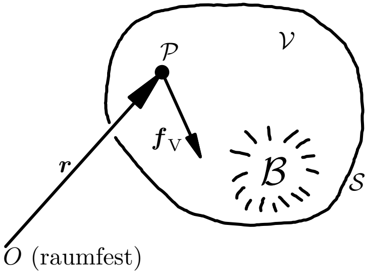
$$E_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_3 \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \cdot \tilde{\omega}_3 \left(\tilde{\theta}^C_{31} \tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \tilde{\theta}^C_{32} \tilde{\boldsymbol{e}}_2 + \tilde{\theta}^C_{33} \tilde{\boldsymbol{e}}_3 \right) = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_3^2 \tilde{\theta}^C_{33}$$

Äußere Leistung

Definition (Äußere Leistung)
Die **Leistung** P_a *der (äußeren)* $\boldsymbol{f}_\mathsf{S}$,$\boldsymbol{f}_\mathsf{V}$*-Kraftdichteverteilung wird durch die Gleichung*

$$P_\mathsf{a} := \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{S} \,\mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{V} \,\mathrm{d}\, V$$

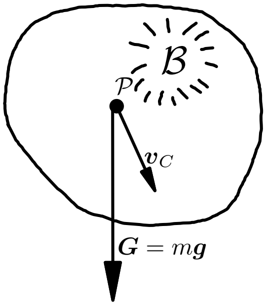
definiert. P_a *wird auch kurz* **äußere Leistung** *genannt.*



Äußere Leistung: Beispiele

1. Leistung P_{a_G} der Gewichtskraft $\boldsymbol{G}$ eines Körpers $\mathcal{B}$ mit $\boldsymbol{f}_{\mathsf{V}} = \rho \boldsymbol{g}$:

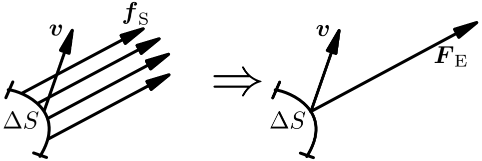
$$P_{\mathsf{a}_G} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \cdot \rho \boldsymbol{g} \, \mathrm{d} V = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \, \mathrm{d} m \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_C m \cdot \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_C \cdot m \boldsymbol{g} = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{G}$$



Äußere Leistung: Beispiele

2. Leistung $P_{\mathsf{a_E}}$ einer diskreten Einzelkraft $\boldsymbol{F}_\mathsf{E}$ mit $\boldsymbol{v} = \text{const.}$ in $\Delta\mathcal{S}$:

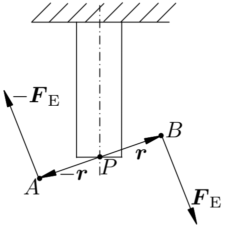
$$P_{\mathsf{a_E}} := \int_{\Delta\mathcal{S}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{S} \,\mathrm{d}\, S = \boldsymbol{v} \cdot \int_{\Delta\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_\mathsf{S} \,\mathrm{d}\, S = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}_\mathsf{E}$$



Äußere Leistung: Beispiele

3. Leistung für ein freies Moment $\boldsymbol{M}$:
   aufgebracht durch ein Paar diskreter Einzelkräfte $\boldsymbol{F}_\mathrm{E}$
   Kinematik: $\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$
   Dynamik: $\boldsymbol{M} = 2\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{E}$

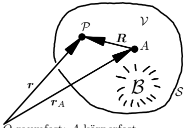
$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{a_M}} &= \int_{\Delta\mathcal{S}_A} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\Delta\mathcal{S}_B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S \\
&= \boldsymbol{v}_A \cdot \int_{\Delta\mathcal{S}_A} \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \boldsymbol{v}_B \cdot \int_{\Delta\mathcal{S}_B} \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S \\
&= (\boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{r})) \cdot (-\boldsymbol{F}_\mathrm{E}) + (\boldsymbol{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}_\mathrm{E} = 2(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}_\mathrm{E} \\
&= 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}_\mathrm{E}) = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}
\end{aligned}
$$



Äußere Leistung: Beispiele

4. Leistung P_a einer Dyname $(\boldsymbol{F}, A, \boldsymbol{M}^A)$ am starren Körper :
   Mit $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_A + \dot{\boldsymbol{R}}$:

$$P_\mathrm{a} = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{F} + \int_{\mathcal{S}} \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \,\mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} \dot{\boldsymbol{R}} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \,\mathrm{d}\, V.$$



Wegen $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}$:

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{a} &= \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{F} + \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \,\mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \,\mathrm{d}\, V \\
&= \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{F} + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f}_\mathrm{S}) \,\mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f}_\mathrm{V}) \,\mathrm{d}\, V \\
&= \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\left(\int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \,\mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{R} \times \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \,\mathrm{d}\, V \right)}_{=:\boldsymbol{M}^A} = \boldsymbol{v}_A \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}^A
\end{aligned}$$

Innere Leistung

Vorüberlegung

Massenmittelpunktsatz für den Impuls skalar mit $\boldsymbol{v}_C$ multipliziert:

$$m\dot{\boldsymbol{v}}_C \cdot \boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{F} =: P_{\mathrm{a}_F}$$

Wegen $\dot{E}_{\mathrm{tr}} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\boldsymbol{v}}_C \cdot \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_C \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_C\right) = m\dot{\boldsymbol{v}}_C \cdot \boldsymbol{v}_C$:

$$\dot{E}_{\mathrm{tr}} = P_{\mathrm{a}_F},\ \dot{E}_{\mathrm{tr}} - P_{\mathrm{a}_F} = 0$$

$\rightarrow$ $\dot{E}$ und P_{a_F} sind addierbar, folglich auch $\dot{E}$ und P_{a}

Experimenteller Befund für deformierbare Körper: $P_{\mathrm{a}} \neq \dot{E}$

Innere Leistung

Definition (Innere Leistung)
Die **innere Leistung** P_i *ist der durch die Gleichung*

$$P_\mathsf{i} := P_\mathsf{a} - \dot{E}$$

definierte physikalische Skalar.

Experimenteller Befund: $P_\mathsf{a} \geq \dot{E}$, d.h. $P_\mathsf{i} \geq 0$

zeitliche Ableitung $\dot{E}$ der kinetischen Energie:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\,m\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})^{\boldsymbol{\cdot}}\,\mathrm{d}\,m \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} (\dot{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})\,\mathrm{d}\,m = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}\,m\end{aligned}$$

Innere Leistung, Beispiele

Satz (Innere Leistung eines masselosen deformierbaren Elements)
Für ein masseloses Element ist $\dot{E} = 0$*, d.h.* $P_\mathrm{i} = P_\mathrm{a}$.

Beweis:
Wegen $\rho \equiv 0$ ist $E = \frac{1}{2} \int_\mathcal{B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \rho \, \mathrm{d}\, V \equiv 0$

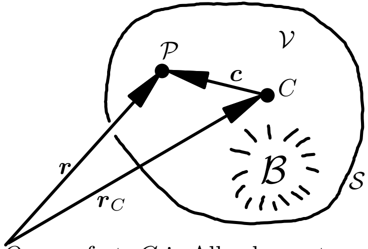
Innere Leistung, Beispiele

Satz (Innere Leistung des starren Körpers)
Für einen starren Körper ist $P_\mathrm{i} = 0$, d.h. $\dot{E} = P_\mathrm{a}$.

Beweis:
äußere Leistung, Dyname $(\boldsymbol{F}, C, \boldsymbol{M}^C)$:

$$P_\mathrm{a} = \boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{M}^C$$

Ableitung der kinetischen Energie:



O raumfest; C i. Allg. bewegt

Innere Leistung, starrer Körper

Ableitung der kinetischen Energie:

$$E = \frac{1}{2}\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}_C m + \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} \dot{\boldsymbol{c}} \cdot \dot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m, \ \dot{E} = \boldsymbol{v}_C \cdot \dot{\boldsymbol{I}} + \int_{\mathcal{B}} \dot{\boldsymbol{c}} \cdot \ddot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m$$

mit

$$\int_{\mathcal{B}} \dot{\boldsymbol{c}} \cdot \ddot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m = \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{c}) \cdot \ddot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m = \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{c} \times \ddot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m = \boldsymbol{\omega} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \underbrace{\left(\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{c} \times \dot{\boldsymbol{c}} \, \mathrm{d}\, m \right)}_{=:\boldsymbol{D}^C}$$

Damit:

$$\dot{E} = \boldsymbol{v}_C \cdot \dot{\boldsymbol{I}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\boldsymbol{D}}^C$$

Insgesamt:

$$P_{\mathrm{i}} := P_{\mathrm{a}} - \dot{E} = \boldsymbol{v}_C \cdot \underbrace{(\boldsymbol{F} - \dot{\boldsymbol{I}})}_{=\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{(\boldsymbol{M}^C - \dot{\boldsymbol{D}}^C)}_{=\mathbf{0}}$$

Innere Leistung, Beispiele

Satz (Innere Leistung für ein deformierbares Kontinuum)
Für ein deformierbares Kontinuum ist $P_\mathrm{i} = \int_\mathcal{V} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \, \mathrm{d}\, V$ *mit dem Cauchy-Spannungstensor* $\boldsymbol{\sigma}$ *und dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor*

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T).$$

Beweis:
Impulsgesetz skalar mit dem Geschwindigkeitsfeld multiplizieren, Integration über die Momentanlage:

$$\dot{E} = \int_\mathcal{V} \dot{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} \rho \, \mathrm{d}\, V = \int_\mathcal{V} \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\, V + \int_\mathcal{V} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\, V$$

Umformung des zweiten Summanden mit Produktregel:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) = \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v}$$

Innere Leistung, Kontinuum

Symmetrie des Spannungstensors ausnutzen:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \operatorname{grad} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \frac{1}{2}(\operatorname{grad} \boldsymbol{v} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{v})^T) = \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D}$$

Damit: $\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\, V = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) \,\mathrm{d}\, V - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}\, V$

Satz von Gauß:
$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\, V &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\, S - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}\, V \\ &= \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{S}} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\, S - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}\, V \end{aligned}$$

zeitliche Ableitung der kinetischen Energie:

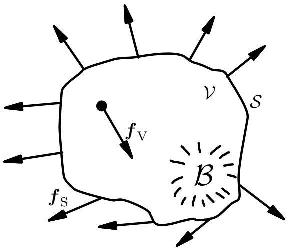
$$\dot{E} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{V}} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\, V + \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{f}_{\mathrm{S}} \cdot \boldsymbol{v} \,\mathrm{d}\, S}_{=: P_{\mathrm{a}}} - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}\, V$$

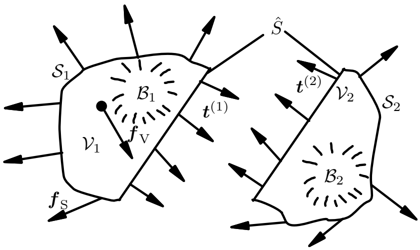
Damit:

$$P_{\mathrm{i}} = P_{\mathrm{a}} - \dot{E} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot\cdot \boldsymbol{D} \,\mathrm{d}\, V$$

Satz (Innere Leistung eines Körpers)
Teilt man einen Körper $\mathcal{B}$ in n Teilkörper $\mathcal{B}_k$ $(k = 1, 2, ..., n)$ und bezeichnet P_{i_k} die innere Leistung des $k$ten Teilkörpers, so gilt für die gesamte innere Leistung P_i des Körpers $\mathcal{B}$:

$$P_\mathrm{i} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{i}_k}.$$





Beweis: Additivität der inneren Leistung

Betrachte Zerlegung des Körpers $\mathcal{B}$ in zwei Teilkörper $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$
innere Leistung von $\mathcal{B}$:

$$P_\mathrm{i} := P_\mathrm{a} - \dot{E} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \, \mathrm{d}\, V - \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}\, m$$

innere Leistungen von $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$:

$$P_{\mathrm{i}_1} := \int_{\mathcal{S}_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\hat{\mathcal{S}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}^{(1)} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}_1} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \, \mathrm{d}\, V - \int_{\mathcal{B}_1} \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}\, m$$

$$P_{\mathrm{i}_2} := \int_{\mathcal{S}_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\hat{\mathcal{S}}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{t}^{(2)} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \, \mathrm{d}\, V - \int_{\mathcal{B}_2} \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}\, m$$

Addition unter Berücksichtigung von $\boldsymbol{t}^{(1)} = -\boldsymbol{t}^{(2)}$:

$$P_{\mathrm{i}_1} + P_{\mathrm{i}_2} = \int_{\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_{\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V} \, \mathrm{d}\, V - \int_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2} \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \, \mathrm{d}\, m$$

$\rightarrow P_\mathrm{i} = P_{\mathrm{i}_1} + P_{\mathrm{i}_2}$

Allgemeiner Leistungssatz

Satz (Innere Leistung eines Systems)
Die gesamte innere Leistung P_i *eines Systems ist gleich der Summe der inneren Leistungen* P_{i_1}, P_{i_2}, …, P_{i_n} *seiner* n *Teilsysteme, d.h. es gilt genauso wie im Fall eines Körpers:* $P_\mathrm{i} = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{i}_k}$.