

Evaluation



Arbeit, Arbeitssätze und Energiesatz

Integration der inneren Leistung nach der Zeit:

$$E(t_E) - E(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} P_a dt - \int_{t_A}^{t_E} P_i dt$$

erster Term auf der rechten Seite:

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_E} P_a dt &= \int_{t_A}^{t_E} \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S dS dt + \int_{t_A}^{t_E} \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V dV dt \\ &= \int_S \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S dt dS + \int_V \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V dt dV \\ &= \int_S \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{f}_S \cdot \mathbf{v} dt dS + \int_V \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dt dV \\ &= \int_S \int_r \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{r} dS + \int_V \int_r \mathbf{f}_V \cdot d\mathbf{r} dV \end{aligned}$$

inneres Integral ist Kurvenintegral entlang der Bahn $\mathbf{r} = \chi(\mathbf{R}, t)$ der Bewegung des einzelnen materiellen Punktes zwischen t_A und t_E

Äußere Arbeit

Definition (Äußere Arbeit)

Die **Arbeit** W_a der (äußeren) \mathbf{f}_S , \mathbf{f}_V -Kraftdichteverteilung wird durch das Integral

$$W_a := \int_S \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{r} dS + \int_V \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_V \cdot d\mathbf{r} dV$$

definiert. W_a wird auch kurz **äußere Arbeit** genannt.

Äußere Arbeit einer diskreten Einzelkraft:

Konstanz von \mathbf{r} bezüglich ΔS :

$$W_{aE} = \int_{\Delta S} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{r} dS = \int_{\mathbf{r}} \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S dS \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r}$$

Äußere Arbeit beim starren Körper

$$W_a = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} \, dt + \int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C \, dt$$

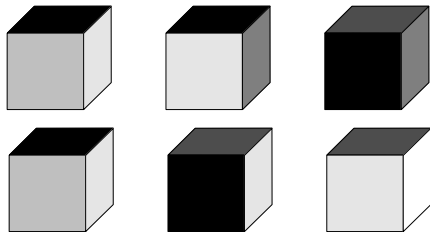
mit

$$\int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} \, dt = \int_{r_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$\int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} \, dt = \int_{\varphi} d\varphi$ i. Allg. wegabhängig,

da Rotationsdifferential $d\varphi = \boldsymbol{\omega} \, dt$ i. Allg. **nicht** vollständig

Nichtkommutativität endlicher Drehungen



für ebene Bewegung oder Drehung um eine feste Achse:
Rotationsdifferential vollständig, $\omega = \dot{\varphi}$.

zweiter Summand:

$$\int_{t_A}^{t_E} \omega \cdot \mathbf{M}^C dt = \int_{\varphi} \mathbf{M}^C \cdot d\varphi$$

insgesamt:

$$W_a = \int_{r_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\varphi} \mathbf{M}^C \cdot d\varphi$$

Innere Arbeit

Definition (Innere Arbeit)

Die **innere Arbeit** W_i ist der durch

$$W_i := \int_{t_A}^{t_E} P_i \, dt$$

definierte physikalische Skalar.

Allgemeiner Arbeitssatz

Satz (Allgemeiner Arbeitssatz)

Die gesamte innere Arbeit W_i eines Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_A und t_E ist gleich der Summe der inneren Arbeiten W_{i_1} , W_{i_2} , ..., W_{i_n} seiner n Teilsysteme: $W_i = \sum_{k=1}^n W_{i_k}$.

Spezielle Arbeitssätze

Satz (Arbeitssatz, masseloses deformierbares Element)

Für ein masseloses deformierbares Element ist $W_i = W_a$.

Beweis:

Wegen $\dot{\mathbf{E}} = 0$ verschwindet $E(t_E) - E(t_A)$.

Satz (Arbeitssatz, starrer Körper)

Für einen starren Körper ist $E(t_E) - E(t_A) = W_a$.

Beweis:

Aus $P_i = 0$ für den starren Körper folgt $W_i = 0$.

Spezielle Arbeitssätze

Satz (Arbeitssatz für ein deformierbares Kontinuum)

Für ein deformierbares Kontinuum ist $W_i = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{\epsilon} \, dV$ mit dem Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem linearisierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$.

Beweis:

Zeitableitung des linearisierten Verzerrungstensors:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \dot{\mathbf{u}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{u}})^T) = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}) + (\text{grad}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}))^T) \\ &= \frac{1}{2}(\text{grad } \dot{\mathbf{r}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{r}})^T) = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) =: \mathbf{D}\end{aligned}$$

innere Leistung für ein deformierbares Kontinuum:

$$P_i = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV$$

Allgemeiner Arbeitssatz

Zeitintegration:

$$W_i = \int_{t_A}^{t_B} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dV \, dt = \int_{\mathcal{V}} \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \, dt \, dV = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\epsilon} \, dV$$

Das Differential $\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\epsilon}$ ist i. Allg. nicht vollständig und die innere Arbeit daher i. Allg. vom Weg abhängig.

Potential

Definition (Potential)

Es seien P_a die äußere Leistung und P_i die innere Leistung. Die Ortsfunktion V_i mit $\dot{V}_i = P_i$ heißt das **innere Potential**, und die Ortsfunktion V_a mit $\dot{V}_a = -P_a$ wird das **äußere Potential** genannt. Die Funktion $V := V_i + V_a$ heißt das (gesamte) **Potential** oder die **potentielle Energie**.

Definition (Konservative Kräfte)

Kräfte, deren Leistungen Potentiale besitzen, heißen **Potentialkräfte** oder **konservativ**.

Energiesatz

Satz (Energiesatz)

*Besitzt die Leistung ein Potential V , dann gilt der **Energiesatz in differentieller Form***

$$\dot{V} + \dot{E} = 0$$

*bzw. der **Energiesatz in integraler Form***

$$V + E = \text{const.}$$

Beweis:

Innere Leistung:

$$\dot{V}_i + \dot{V}_a + \dot{E} = 0 \text{ bzw. } \dot{V} + \dot{E} = 0$$

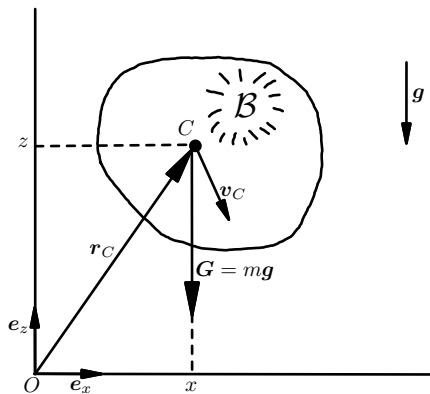
bzw. nach Integration

$$V + E = \text{const.}$$

Potentielle Energie konservativer Dynamen

Satz (Potential der Gewichtskraft)

Die Gewichtskraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ ist konservativ. Sie besitzt das äußere Potential $V_{aG} = mgz + C$, wobei C eine Konstante ist.



Potentielle Energie konservativer Dynamen

Beweis:

Äußere Leistung:

$$P_{aG} = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{G}$$

mit

$$\mathbf{v}_C := \dot{\mathbf{r}}_C = (x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z)' = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

und

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = mg(-\mathbf{e}_z)$$

folgt dann

$$P_{aG} = (\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{z} \mathbf{e}_z) \cdot (-\mathbf{e}_z)mg = -mg\dot{z}$$

Wegen $mg = \text{const.}$:

$$P_{aG} = -(mgz + C)'$$

also

$$P_{aG} = -\dot{V}_{aG} \text{ und } V_{aG} = mgz + C$$

Potentielle Energie konservativer Dynamen

Satz (Potential eines masselosen Verbindungselementes)

Es sei $F(x)$ das Kraftgesetz eines masselosen, deformierbaren Verbindungselementes, wobei x eine skalare Auslenkung bezeichnet, so dass die äußere Leistung durch $P_a = F(x)\dot{x}$ gegeben sei. Existiert zu $F(x)$ die Stammfunktion $F_{st}(x)$, dann ist das innere Potential des Verbindungselementes durch die Stammfunktion gegeben, es gilt also

$$V_{i_F} = F_{st}(x).$$

Potentielle Energie konservativer Dynamen

Beweis:

Wegen

$$P_i = P_a, \text{ mit } P_a = F(x)\dot{x}$$

muss gelten:

$$\frac{d}{dt} V_{i_F} = P_i = F(x)\dot{x}$$

Kettenregel:

$$\frac{d}{dt} V_{i_F} = \frac{d}{dx} V_{i_F} \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx} V_{i_F} \dot{x}$$

Für $V_{i_F} = F_{st}(x)$ ist

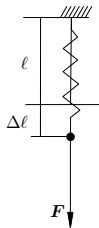
$$\frac{d}{dx} V_{i_F} = \frac{d F_{st}(x)}{dx} = F(x)$$

Potentielle Energie konservativer Dynamen

Korollar (Potential der Federkraft)

Die linear-elastische Federkraft mit Betrag $F = c\Delta\ell$,
 c : Federkonstante, $\Delta\ell$: Längenänderung,
ist konservativ. Sie besitzt das innere Potential

$$V_{i_F} = \frac{1}{2}c(\Delta\ell)^2.$$

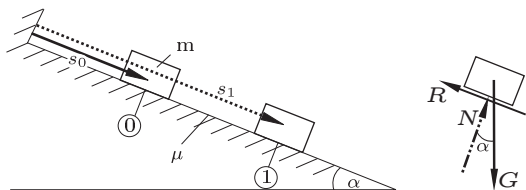


analog Drehfeder: $V_{i_D} = \frac{1}{2}c_D(\Delta\varphi)^2$

Beispiel: Klotz auf schiefer Ebene

Gegeben: α , μ , $v_0 = v(s_0)$

Gesucht: $v_1 = v(s_1)$



Kräftegleichgewicht vertikal zur Gleitebene: $N = mg \cos \alpha$

Reibkraft $R = \mu mg \cos \alpha$

Kraft entlang der Ebene: $F = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$

äußere Arbeit zwischen s_0 und s_1 :

$$W_a = \int_{s_0}^{s_1} mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) ds = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0)$$

Beispiel: Klotz auf schiefer Ebene

kinetische Energie:

$$\text{in der Anfangslage: } E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\text{in der Endlage: } E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Arbeitssatz:

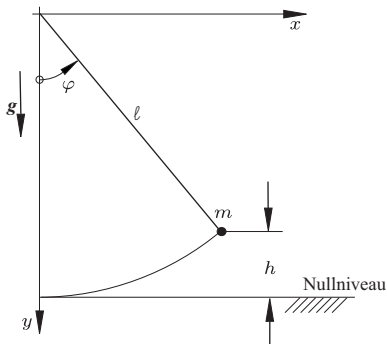
$$\begin{aligned} E_1 - E_0 &= \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) \\ &= \int_{s_0}^{s_1} mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) ds = mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0) \end{aligned}$$

auflösen nach v_1 :

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0)}$$

Beispiel: Mathematisches Pendel

gesucht: $\dot{\varphi}(\varphi)$



Energiesatz, kinetische Energie:

$$E = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2$$

potentielle Energie, Nullniveau bei $\varphi = 0$:

$$V = mgh = mgl(1 - \cos \varphi)$$

Beispiel: Mathematisches Pendel

Energiesatz in integraler Form:

$$E + V = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = E_{\text{ges}}$$

bzw.

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m} (E_{\text{ges}} - mgl(1 - \cos \varphi))}$$

Bestimmung von E_{ges} aus dem maximalen Pendelwinkel φ_1 :

$$E_{\text{ges}} = 0 + mgl(1 - \cos \varphi_1)$$

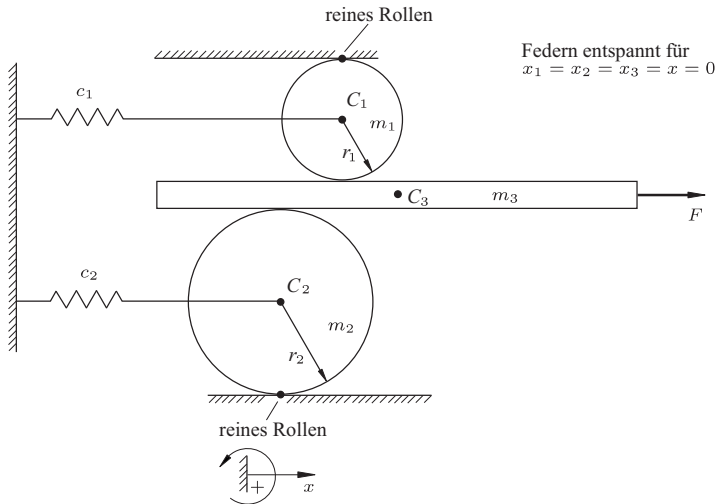
bzw. aus der Maximalgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$:

$$E_{\text{ges}} = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}_0^2 + 0$$

Zusammenhang zwischen Maximalgeschwindigkeit und maximalem Pendelwinkel:

$$\frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}_0^2 = mgl(1 - \cos \varphi_1) \text{ oder } \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (1 - \cos \varphi_1)}$$

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen

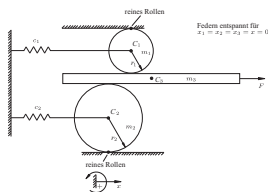


gegeben: Massen m_1 , m_2 , m_3 , Federsteifigkeiten c_1 , c_2 , konstante Kraft F

gesucht: Bewegungsgleichung der Stange

1 Freiheitsgrad

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen



kinematische Beziehungen:

obere Walze:

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}}{2r_1}$$

$$\dot{x}_1 = \omega_1 r_1 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_1 = \frac{x}{2}$$

untere Walze:

$$\omega_2 = -\frac{\dot{x}}{2r_2}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_2 r_2 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x}{2}$$