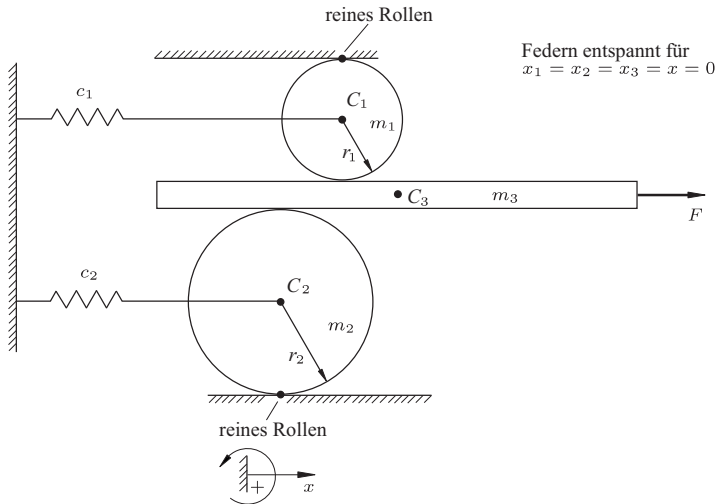
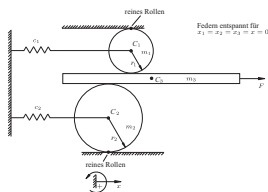


Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen



gegeben: Massen m_1 , m_2 , m_3 , Federsteifigkeiten c_1 , c_2 , konstante Kraft F
gesucht: Bewegungsgleichung der Stange
1 Freiheitsgrad

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen



kinematische Beziehungen:

obere Walze:

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}}{2r_1}$$

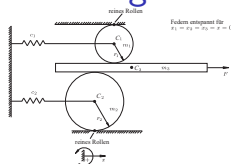
$$\dot{x}_1 = \omega_1 r_1 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_1 = \frac{x}{2}$$

untere Walze:

$$\omega_2 = -\frac{\dot{x}}{2r_2}$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_2 r_2 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x}{2}$$

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen



kinetische Energie und potentielle Energie des Systems:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_1^{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \theta_2^{C_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2$$

$$V = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 - Fx$$

mit $\theta_1^{C_1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$, $\theta_2^{C_2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$ und den kinematischen Beziehungen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \frac{m_1 \dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} m_1 \frac{r_1^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{4r_1^2} + \frac{1}{2} m_2 \frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{4r_2^2} + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2 \\ &= \left(\frac{3}{16} m_1 + \frac{3}{16} m_2 + \frac{1}{2} m_3 \right) \dot{x}^2 \end{aligned}$$

$$V = \frac{c_1}{2} \frac{x^2}{4} + \frac{c_2}{2} \frac{x^2}{4} - Fx = \frac{1}{8} (c_1 + c_2) x^2 - Fx$$

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen

$$E = \left(\frac{3}{16}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{1}{2}m_3 \right) \dot{x}^2$$
$$V = \frac{1}{8}(c_1 + c_2)x^2 - Fx$$

Energiesatz in integraler Form:

$$E + V = \left(\frac{3}{16}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{8}(c_1 + c_2)x^2 - Fx = \text{const.}$$

Ableitung nach t (Energiesatz in differentieller Form), Division durch \dot{x} :

$$\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + m_3 \right) \ddot{x} + \frac{1}{4}(c_1 + c_2)x - F = 0$$

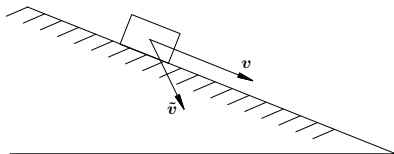
Analytische Methoden der Mechanik

Virtuelle Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen

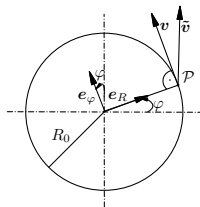
virtuelles Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathcal{P}, t)$: stückw. diffbar bzgl. Ortskoordinaten, sonst beliebig

Beispiele:

1. Starrer Klotz auf starrer schiefer Ebene



2. Kreisbewegung eines materiellen Punktes \mathcal{P} eines starren Körpers



Definition (Virtuelle Leistungen)

Es sei $\tilde{\mathbf{v}}$ ein virtuelles Geschwindigkeitsfeld. Dann ist

1. die **virtuelle Leistung der Massenbeschleunigungen** definiert als

$$\tilde{P}_{Mb} := \int_B \tilde{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m \quad (\text{analog zu } \dot{E} := \int_B \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m)$$

2. die **virtuelle äußere Leistung** definiert als

$$\tilde{P}_a := \int_S \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_V \, d V \quad (\text{analog zu } P_a)$$

3. die **virtuelle innere Leistung** definiert als

$$\tilde{P}_i := \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb} \quad (\text{analog zu } P_i := P_a - \dot{E})$$

Virtuelle Leistungen

Satz (Addierbarkeit der virtuellen inneren Leistungen)

Die virtuelle innere Leistung eines Systems aus n Körpern ist gleich der Summe der virtuellen inneren Leistungen der einzelnen Körper.

- bestimme für jeden Körper die virtuelle innere Leistung \tilde{P}_i
- zweckmäßig: den virtuellen Geschwindigkeiten entsprechen wirkliche Geschwindigkeiten, wo bspw. durch Bindungen der Geschwindigkeitszustand bereits bekannt ist
→ Verträglichkeit mit den Bindungen

Virtuelle innere Leistung: starrer Körper

$$\tilde{P}_i := \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb}$$

starrer Körper: virtuell starr (verträglich mit den inneren Bindungen) im Sinne von

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_C + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c} \quad (\text{analog zu } \mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})$$

Damit

$$\tilde{P}_{Mb} = \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \dot{\mathbf{i}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C \quad (\text{analog zu } \dot{E} = \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{i}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C)$$

und

$$\tilde{P}_a = \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{F} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{M}^C \quad (\text{analog zu } P_a = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C)$$

Folglich gilt unter Berücksichtigung von $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$:

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb} = 0, \quad \text{d.h. } \tilde{P}_a = \tilde{P}_{Mb}$$

Virtuelle innere Leistung: masseloses Verbindungselement

$$\tilde{P}_{Mb} = 0 \text{ (analog zu } \dot{E} = 0)$$

somit

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a \text{ (analog zu } P_i = P_a)$$

- Wirkung repräsentiert durch Einzelkraft \mathbf{F}_E :

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_E$$

$\Delta \tilde{\mathbf{v}}$: virtuelle Relativgeschwindigkeit

- Wirkung repräsentiert durch freies Moment \mathbf{M}

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\omega} \cdot \mathbf{M}$$

$\Delta \tilde{\omega}$: virtuelle relative Drehgeschwindigkeit

Virtuelle innere Leistung: diskrete Systeme

n starre Körper, M Einzelkräfte, max. ein freies Moment pro starrem Körper; ebene Bewegung (oder raumfeste Drehachse)

$$\tilde{P}_{Mb} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot \dot{\mathbf{i}}_k + \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k \cdot \dot{\mathbf{D}}_k^{C_k} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k \cdot \Theta_k^{C_k} \dot{\omega}_k$$

und

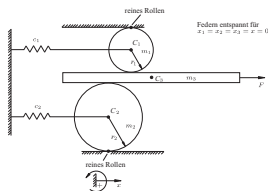
$$\tilde{P}_a = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k \cdot \mathbf{M}_k$$

$\tilde{\mathbf{v}}_m$: virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunktes der Einzelkraft \mathbf{F}_m , aus Starrkörpergeschwindigkeit mit $\tilde{\mathbf{v}}_C$ und $\tilde{\omega}$

Damit:

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\omega}_k \cdot \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\omega}_k \cdot \Theta_k^{C_k} \dot{\omega}_k \right) + \tilde{P}_i$$

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen



$$\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right) + \tilde{P}_i$$

$$\tilde{P}_a = \dot{\tilde{\mathbf{X}}} F$$

$$\tilde{P}_{Mb} = \dot{\tilde{x}}_1 m_1 \ddot{x}_1 + \tilde{\omega}_1 \theta_1^{C_1} \dot{\omega}_1 + \dot{\tilde{x}}_2 m_2 \ddot{x}_2 + \tilde{\omega}_2 \theta_2^{C_2} \dot{\omega}_2 + \dot{\tilde{x}}_3 m_3 \ddot{x}_3$$

$$\tilde{P}_i = \dot{\tilde{x}}_1 c x_1 + \dot{\tilde{x}}_2 c x_2$$

Beispiel: Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen

$$\dot{\check{x}}F = \dot{\check{x}}_1 m_1 \ddot{x}_1 + \tilde{\omega}_1 \theta_1^{C_1} \dot{\omega}_1 + \dot{\check{x}}_2 m_2 \ddot{x}_2 + \tilde{\omega}_2 \theta_2^{C_2} \dot{\omega}_2 + \dot{\check{x}}_3 m_3 \ddot{x}_3 + \dot{\check{x}}_1 c x_1 + \dot{\check{x}}_2 c x_2$$

kinematische Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_3 &= x, \quad \dot{\check{x}}_3 = \dot{\check{x}}, \quad x_1 = \frac{x}{2}, \quad \dot{\check{x}}_1 = \frac{\dot{\check{x}}}{2}, \quad x_2 = \frac{x}{2}, \quad \dot{\check{x}}_2 = \frac{\dot{\check{x}}}{2} \\ \omega_1 &= \frac{\dot{x}}{2r_1}, \quad \tilde{\omega}_1 = \frac{\dot{\check{x}}}{2r_1}, \quad \omega_2 = -\frac{\dot{x}}{2r_2}, \quad \tilde{\omega}_2 = -\frac{\dot{\check{x}}}{2r_2} \end{aligned}$$

führt mit $\theta_1^{C_1} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$, $\theta_2^{C_2} = \frac{1}{2} m_2 r_2^2$ nach Einsetzen auf

$$\dot{\check{x}}F = \dot{\check{x}} \left(\frac{3}{8} m_1 + \frac{3}{8} m_2 + m_3 \right) \ddot{x} + \dot{\check{x}} \left(\frac{1}{4} c_1 + \frac{1}{4} c_2 \right) x$$

Virtuelle Verschiebungen

jetzt: virtuelles Verschiebungsfeld $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\mathcal{P}, t)$

1. virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigungen

$$\tilde{W}_{Mb} := \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m \quad (\text{analog zu } d E := \int_{\mathcal{B}} d \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m)$$

2. virtuelle äußere Arbeit

$$\tilde{W}_a := \int_{\mathcal{S}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_{\mathcal{V}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_V \, d V \quad (\text{analog zu } d W_a)$$

3. virtuelle innere Arbeit

$$\tilde{W}_i := \tilde{W}_a - \tilde{W}_{Mb} \quad (\text{analog zu } d W_i := d W_a - d E)$$

alternativ: $\tilde{W}_i = \tilde{W}_a + \tilde{W}_{Tr}$, mit $\tilde{W}_{Tr} := -\tilde{W}_{Mb}$

Methode der virtuellen Verschiebungen

Prinzip der virtuellen Arbeit bzw. Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange

Satz (Addierbarkeit der virtuellen inneren Arbeiten)

Die virtuelle innere Arbeit eines Systems aus n Körpern ist gleich der Summe der virtuellen inneren Arbeiten der einzelnen Körper.

- stelle Verträglichkeit mit den Bindungen sicher
- bestimme virtuelle innere Arbeit \tilde{W}_i

äquivalent zur Methode der virtuellen Geschwindigkeiten

Virtuelle innere Arbeit: starrer Körper

$$\tilde{W}_i := \tilde{W}_a - \tilde{W}_{Mb}$$

Auswertung unter Beachtung von

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{c}$$

Für den starren Körper gilt

$$\tilde{W}_{Mb} = \tilde{\mathbf{r}}_C \cdot \dot{\mathbf{i}} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C$$

und

$$\tilde{W}_a = \tilde{\mathbf{r}}_C \cdot \mathbf{F} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M}^C$$

Folglich gilt (unter Berücksichtigung von $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$):

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a - \tilde{W}_{Mb} = 0, \text{ d.h. } \tilde{W}_a = \tilde{W}_{Mb} = -\tilde{W}_{Tr}$$

Virtuelle innere Arbeit: masseloses Verbindungselement

$$\tilde{W}_{Mb} = 0, \text{ d.h. } \tilde{W}_i = \tilde{W}_a$$

- Wirkung repräsentiert durch Einzelkraft \mathbf{F}_E :

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_E$$

$\Delta \tilde{\mathbf{r}}$: virtuelle Relativverschiebung

- Wirkung repräsentiert durch freies Moment \mathbf{M}

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\varphi} \cdot \mathbf{M}$$

$\Delta \tilde{\varphi}$: virtuelle relative Drehung

Virtuelle Arbeit: diskrete Systeme

n starre Körper, M Einzelkräfte, höchstens ein freies Moment pro starrem Körper; ebene Bewegung (oder raumfeste Drehachse)

$$\tilde{W}_{Mb} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k \cdot \Theta_k^{C_k} \dot{\omega}_k$$

und

$$\tilde{W}_a = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k \cdot \mathbf{M}_k$$

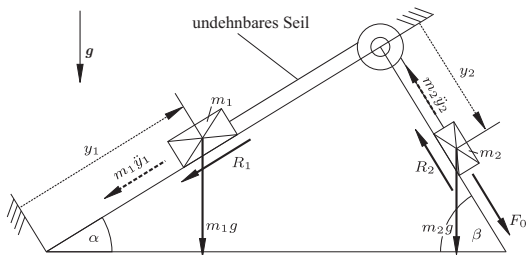
$\tilde{\mathbf{r}}_m$: virtuelle Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft \mathbf{F}_m , aus

$$\tilde{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_{C_k} + \tilde{\varphi}_k \times \mathbf{r}_{km}$$

Damit:

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\varphi}_k \cdot \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\varphi}_k \cdot \Theta_k^{C_k} \dot{\omega}_k \right) + \tilde{W}_i$$

Beispiel: Schiefe Ebene mit Umlenkrolle



1 Freiheitsgrad: $y = y_1 = y_2$

virtuelle Verschiebung: $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}$

virtuelle Arbeit am Klotz mit Masse m_1 :

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} = -R_1 \tilde{y}_1 - m_1 g \sin \alpha \tilde{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 \tilde{y}_1, \quad R_1 = \mu m_1 g \cos \alpha$$

virtuelle Arbeit am Klotz mit Masse m_2 :

$$\tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = -R_2 \tilde{y}_2 + m_2 g \sin \beta \tilde{y}_2 + F_0 \tilde{y}_2 - m_2 \ddot{y}_2 \tilde{y}_2, \quad R_2 = \mu m_2 g \cos \beta$$

Beispiel: Schiefe Ebene mit Umlenkrolle

virtuelle Arbeit am Klotz mit Masse m_1 :

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} = -\mu m_1 g \cos \alpha \tilde{y}_1 - m_1 g \sin \alpha \tilde{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 \tilde{y}_1$$

virtuelle Arbeit am Klotz mit Masse m_2 :

$$\tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = -\mu m_2 g \cos \beta \tilde{y}_2 + m_2 g \sin \beta \tilde{y}_2 + F_0 \tilde{y}_2 - m_2 \ddot{y}_2 \tilde{y}_2$$

Methode der virtuellen Verschiebungen:

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} + \tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = 0$$

Somit:

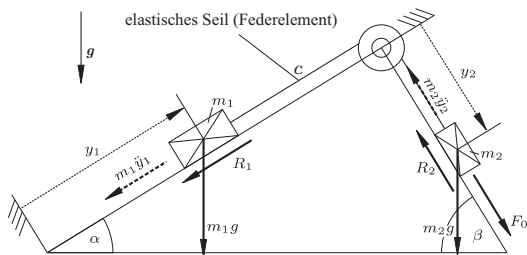
$$0 = (-\mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - m_1 \ddot{y} - \mu m_2 g \cos \beta + m_2 g \sin \beta + F_0 - m_2 \ddot{y}) \tilde{y}$$

\tilde{y} beliebig \rightarrow Bewegungsgleichung:

$$(m_1 + m_2) \ddot{y} + \mu g (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta) + g (m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta) - F_0 = 0$$

\rightarrow nur Bewegungsgleichung, keine Seilkraft!

Beispiel: Elastisches Seil



2 Freiheitsgrade: y_1, y_2

virtuelle Verschiebungen: $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_1 \neq \tilde{y}_2$

Methode der virtuellen Verschiebungen:

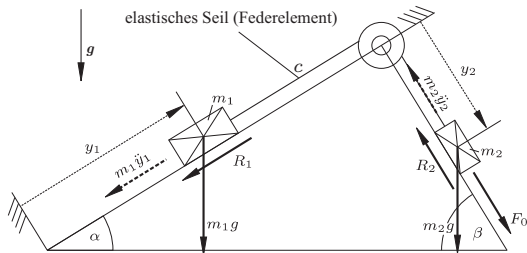
$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} + \tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = \tilde{W}_i$$

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} = -\mu m_1 g \cos \alpha \tilde{y}_1 - m_1 g \sin \alpha \tilde{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 \tilde{y}_1$$

$$\tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = -\mu m_2 g \cos \beta \tilde{y}_2 + m_2 g \sin \beta \tilde{y}_2 + F_0 \tilde{y}_2 - m_2 \ddot{y}_2 \tilde{y}_2$$

$$\tilde{W}_i = c(y_2 - y_1)(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)$$

Beispiel: Elastisches Seil



$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} = -\mu m_1 g \cos \alpha \tilde{y}_1 - m_1 g \sin \alpha \tilde{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 \tilde{y}_1$$

$$\tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = -\mu m_2 g \cos \beta \tilde{y}_2 + m_2 g \sin \beta \tilde{y}_2 + F_0 \tilde{y}_2 - m_2 \ddot{y}_2 \tilde{y}_2$$

$$\tilde{W}_i = c(y_2 - y_1)(\tilde{y}_2 - \tilde{y}_1)$$

Bewegungsgleichungen durch Koeffizientenvergleich:

$$\tilde{y}_1: m_1 \ddot{y}_1 + \mu m_1 g \cos \alpha + m_1 g \sin \alpha - c(y_2 - y_1) = 0$$

$$\tilde{y}_2: m_2 \ddot{y}_2 + \mu m_2 g \cos \beta - m_2 g \sin \beta - F_0 + c(y_2 - y_1) = 0$$