Analytische Methoden der Mechanik

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Bewegung eines Systems als Funktion der generalisierten Koordinaten q_i:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\mathcal{P}, t, q_i) \text{ mit } q_i = q_i(t)$$

Änderung der Bewegung in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten?

$$\frac{\mathrm{d}\, f}{\mathrm{d}\, x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ ungeeignet}$$

Lösung bei Vektoren: Richtungsableitung!

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{h} = \frac{\partial}{\partial h} f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{v})|_{h=0}$$

Variation

Definition (Gâteaux-Differential, erste Variation)
Es sei $f(x(t))$ eine Funktion der Funktion $x(t)$ und $v(t)$ eine weitere Funktion. Die Ableitung

$$\delta_{v(t)} f(x(t)) = \frac{\partial}{\partial h} f(x(t) + hv(t))|_{h=0}$$

heißt das **Gâteaux-Differential** *oder die* **erste Variation** *von $f(x(t))$ an der Stelle $x(t)$ in Richtung der Funktion $v(t)$.*

Beispiel

Identitätsfunktional: $I_{t_0}(x(t)) = x(t_0)$

$$\delta_{v(t)} I_{t_0}(x(t)) = \frac{\partial}{\partial h} I_{t_0}(x(t) + hv(t))|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial h}(x(t_0) + hv(t_0))|_{h=0} = v(t_0)$$

Notation: $\delta x = v$

Kettenregel

Erinnerung: Richtungsableitung und partielle Ableitungen

$$D_{\boldsymbol{v}} f(\boldsymbol{x}) = \operatorname{grad} f \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i$$

Übertragung auf die erste Variation:

$$\delta_{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{t})} f(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial h} f(\boldsymbol{x}(t) + h\boldsymbol{v}(t))|_{h=0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} v_i(t)$$

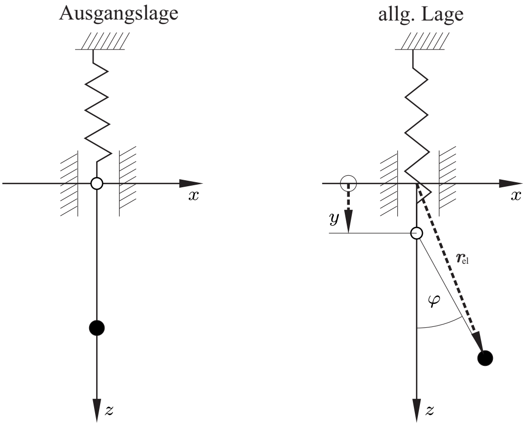
Notation:

$$\delta f(\boldsymbol{x}(t)) = \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\boldsymbol{x}(t)} \delta x_i(t)$$

$x_i(t)$ unabhängig $\rightarrow$ $\delta x_i(t)$ unabhängig $\rightarrow$ Koeffizientenvergleich möglich!
Beispiel: Ortsvektor, generalisierte Koordinaten

$$\delta \boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \delta q_i$$

Beispiel: Math. Pendel mit Fußpunktverschiebung



zwei Freiheitsgrade, generalisierte Koordinaten: $q_1 = y$, $q_2 = \varphi$

Ortsvektor der Pendelmasse:

$$\boldsymbol{r}_{\text{el}} = \begin{bmatrix} \ell \sin\varphi \\ y + \ell \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \sin q_2 \\ q_1 + \ell \cos q_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}_{\text{el}}(q_1,\, q_2)$$

Beispiel: Math. Pendel mit Fußpunktverschiebung

$$\boldsymbol{r}_{\mathrm{el}}(q_1,\ q_2) = \begin{bmatrix} \ell\ \sin q_2 \\ q_1 + \ell\ \cos q_2 \end{bmatrix}$$

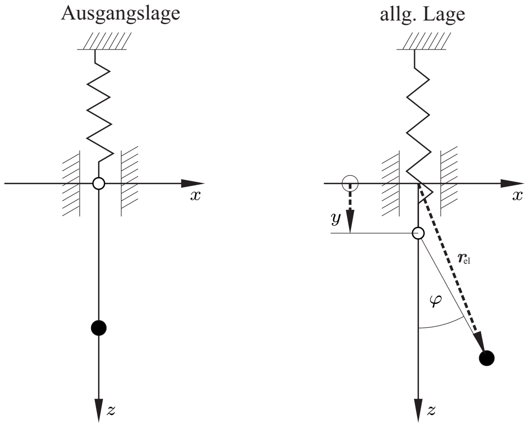
Variation des Ortsvektors bei Fußpunktverschiebung:

$$\delta \boldsymbol{r}_{\mathrm{el}}(q_1, q_2) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\mathrm{el}}}{\partial q_1}\ \delta q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\mathrm{el}}}{\partial q_2}\ \delta q_2$$

Somit

$$\delta \boldsymbol{r}_{\mathrm{el}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta q_1 + \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} \delta q_2 = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2\, \delta q_2 \\ \delta q_1 - \ell \sin q_2\, \delta q_2 \end{bmatrix}$$

Beispiel: Math. Pendel mit Fußpunktverschiebung



Führung des Fußpunkts: ein Freiheitsgrad, generalisierte Koordinate $q_2 = \varphi$
Ortsvektor:

$$\boldsymbol{r}_{gef} = \begin{bmatrix} \ell \sin \varphi \\ y_0 \sin(\omega t) + \ell \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \sin q_2 \\ y_0 \sin(\omega t) + \ell \cos q_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{r}_{gef}(q_2, t)$$

Beispiel: Math. Pendel mit Fußpunktverschiebung

$$\boldsymbol{r}_{\text{gef}}(q_2, t) = \begin{bmatrix} \ell \sin\, q_2 \\ y_0 \sin(\omega t) + \ell \cos\, q_2 \end{bmatrix}$$

Variation des Ortsvektors bei Fußpunktführung:

$$\delta \boldsymbol{r}_{\text{gef}}(q_2, t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\text{gef}}}{\partial q_2}\, \delta q_2$$

Somit

$$\delta \boldsymbol{r}_{\text{gef}} = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} \delta q_2 = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2\, \delta q_2 \\ -\ell \sin q_2\, \delta q_2 \end{bmatrix}$$

Vergleich mit Differential der Funktion $\boldsymbol{r}_{\text{gef}}(q_2, t)$:

$$\mathrm{d}\, \boldsymbol{r}_{\text{gef}}(q_2, t) = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\text{gef}}}{\partial q_2}\, \mathrm{d}\, q_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{\text{gef}}}{\partial t}\, \mathrm{d}\, t = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} \mathrm{d}\, q_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \mathrm{d}\, t$$

$$= \begin{bmatrix} \ell \cos q_2\, \mathrm{d}\, q_2 \\ -\ell \sin q_2\, \mathrm{d}\, q_2 + y_0 \omega \cos(\omega t)\, \mathrm{d}\, t \end{bmatrix}$$

Generalisierte Kräfte

Freischnitt der n starren Körper, $\mathcal{S}$ gesamte Oberfläche des Systems
Variation der äußeren Arbeit:

$$\delta W_\mathsf{a} := \underbrace{\left(\int_\mathcal{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_\mathcal{V} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{V} \, \mathrm{d}\, V\right)}_{=:Q_i} \delta q_i$$

generalisierte Kräfte:

$$Q_i := \left(\int_\mathcal{S} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{S} \, \mathrm{d}\, S + \int_\mathcal{V} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{f}_\mathsf{V} \, \mathrm{d}\, V\right), \; i = 1, ..., f$$

Beispiele

1. Einzelkraft $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}^T$

$$\delta W_\mathrm{a} = F_i\, \delta q_i = F_x\, \delta x + F_y\, \delta y + F_z\, \delta z$$

daher

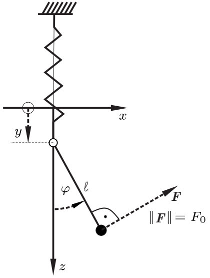
$$Q_x = F_x,\ Q_y = F_y,\ Q_z = F_z$$

2. Freies Moment M bei ebener Bewegung

$$\delta W_\mathrm{a} = M\delta\varphi$$

$\rightarrow \delta \boldsymbol{q} = \delta\varphi,\ Q = M$

Beispiel: Elastisch aufgehängtes Pendel mit äußerer Kraft



$$\text{äußere Kraft: } \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cos\varphi \\ -F_0 \sin\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos q_2 \\ -F_0 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

Variation der äußeren Arbeit:

$$\delta W_\mathrm{a} = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}_\mathrm{el} = \begin{bmatrix} F_0 \cos q_2 \\ -F_0 \sin q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \, \delta q_2 \\ \delta q_1 - \ell \sin q_2 \, \delta q_2 \end{bmatrix}$$
$$= -F_0 \sin q_2 \, \delta q_1 + F_0 \ell \, \delta q_2$$

Vergleich mit $\delta W_\mathrm{a} = Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2$ liefert:

$$Q_1 = -F_0 \sin\, q_2, \;\; Q_2 = F_0 \ell$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Wegen $\delta W_{\mathrm{i}} = 0$ ist

$$\delta W_{\mathrm{Mb}} := \left(\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \,\mathrm{d}\, m \right) \delta q_i = Q_i \delta q_i$$

Variationen δq_i sind unabhängig, daher

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \,\mathrm{d}\, m = Q_i \quad (i = 1, 2, ..., f)$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Integrand, linke Seite:

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{v}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) \cdot \boldsymbol{v}$$

$$\text{Wegen } \boldsymbol{v} := \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\frac{\mathrm{d}\,q_i}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\dot{q}_i \text{ gilt } \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$$

ferner

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}\right) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i}$$

somit

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \boldsymbol{v}\right) - \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial q_i} \cdot \boldsymbol{v} \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}}{2}\right)\end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Damit linke Seite:

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \,\mathrm{d}\, m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \left(\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2} \right) \mathrm{d}\, m \right) - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2} \right) \mathrm{d}\, m$$

Vertauschen von Integration und Differentiation:

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \,\mathrm{d}\, m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2} \right) \mathrm{d}\, m}_{=:E} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}}{2} \right) \mathrm{d}\, m}_{=:E}$$

Lagrangesche Gleichungen 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\, t} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \;\; i = 1, 2, ..., f$$

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Zerlegung von Q_i:

$$Q_i = Q_i^{\mathrm{p}} + Q_i^{\mathrm{d}}$$

Q_i^{p}: konservative generalisierte Kräfte, $Q_i^{\mathrm{p}} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$
Q_i^{d}: dissipative generalisierte Kräfte

Damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^{\mathrm{d}},\ i = 1, 2, ..., f$$

Setze $L := E - V$ (**Lagrange-Funktion**), dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\mathrm{d}},\ i = 1, 2, ..., f,$$

da $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$