Lagrange-Gleichungen 2. Art

Formeln für die Übungen

Lagrange-Gleichungen 2. Art:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{\mathrm{d}}, \quad i = 1\ldots f}$$

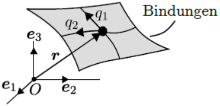
mit den generalisierten Koordinaten $q_i\,(i = 1\ldots f)$
zur vollständigen Beschreibung von f Freiheitsgraden

mit der Lagrange-Funktion :

$$\boxed{L = \underbrace{E}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{V}_{\text{potentielle Energie}}}$$

Variation der Verschiebung $\boldsymbol{r}$ nach q_i : $\delta \boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\delta q_i$

Variation der Verdrehung φ nach q_i : $\delta \varphi = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\delta q_i$



Variation der Arbeit W_a nach q_i : $\delta W_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{M} \underbrace{\left(\int_S \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{S}\,\mathrm{d}S + \int_V \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\cdot \boldsymbol{f}_\mathrm{V}\,\mathrm{d}V\right)}_{Q_i}\delta q_i$

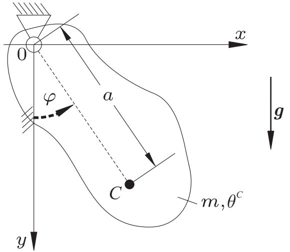
für Einzelkräfte : $\delta W_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{M} Q_i \,\delta q_i$

generalisierte Kraft $Q_i = Q_i^\mathrm{p} + Q_i^\mathrm{d}$

Q_i^p : konservative generalisierte Kraft

Q_i^d : dissipative generalisierte Kraft

Physikalisches Pendel



1 Freiheitsgrad, generalisierte Koordinate: φ

kinetische Energie: $E = \frac{1}{2}m(a\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\theta^C\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\theta^O\dot{\varphi}^2$

potentielle Energie: $V = -mga\cos\varphi$

Lagrange-Funktion: $L = E - V = \frac{\theta^O}{2}\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi$

keine potentiallosen Kräfte: $Q_\varphi \equiv 0$

Lagrange-Gleichung 2. Art: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$

Physikalisches Pendel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\ \ L = \frac{\theta^{O}}{2}\dot{\varphi}^2 + mga\cos\varphi$$

Ableitungen:

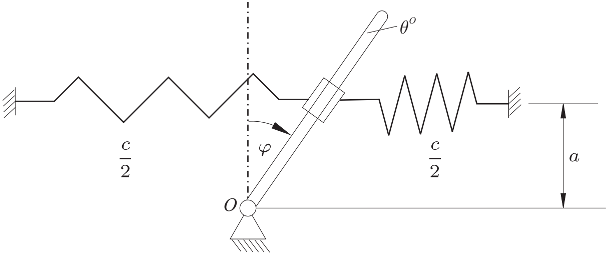
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \theta^{O}\dot{\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \theta^{O}\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mga\sin\varphi$$

Bewegungsgleichung:

$$\theta^{O}\ddot{\varphi} + mga\sin\varphi = 0$$

Pendel mit Gleitbuchse



1 Freiheitsgrad, generalisierte Koordinate: φ
kinetische Energie: $E = \frac{\theta^O}{2}\dot{\varphi}^2$

potentielle Energie: $V = \frac{1}{2}\frac{c}{2}(\Delta\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{2}(\Delta\ell)^2,$ mit $\Delta\ell = a\tan\varphi$

Lagrange-Funktion: $L = E - V = \frac{\theta^O}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{c}{2}a^2\tan^2\varphi$

keine potentiallosen Kräfte

Lagrange-Gleichung 2. Art: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$

Pendel mit Gleitbuchse

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,\;\; L = \frac{\theta^O}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{c}{2}a^2\tan^2\varphi$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \theta^O\dot{\varphi},\;\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \theta^O\ddot{\varphi}$$

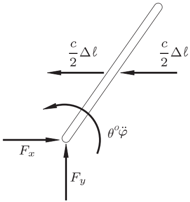
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -ca^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}$$

Bewegungsgleichung:

$$\theta^O\ddot{\varphi} + ca^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0$$

Pendel mit Gleitbuchse

Überprüfen mit Drallgesetz, d'Alembert



Bewegungsgleichung:

$$\theta^O\ddot{\varphi} + \left(\frac{c}{2}\Delta\ell + \frac{c}{2}\Delta\ell\right) a = 0, \text{ mit } \Delta\ell = a\tan\varphi$$

Insgesamt:

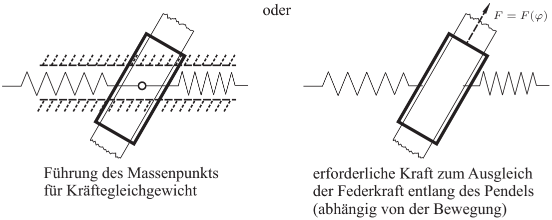
$$\theta^O\ddot{\varphi} + ca^2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = 0$$

vgl. Lagrange-Gleichung 2. Art:

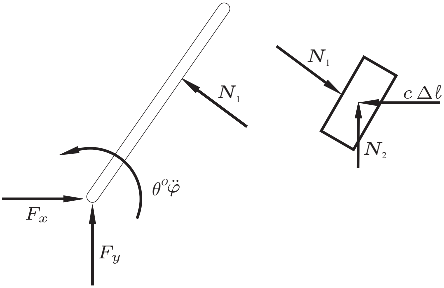
$$\theta^O\ddot{\varphi} + ca^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0$$

Pendel mit Gleitbuchse

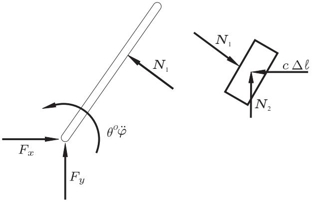
Führung bzw. Kraft benötigt, um den Punkt in $y = a$ zu halten



$\rightarrow$ Freischnitt muss angepasst werden!



Pendel mit Gleitbuchse



Buchse: horizontales Kräftegleichgewicht:

$$N_1 \cos\varphi - c\Delta\ell = 0, N_1 = c\frac{\Delta\ell}{\cos\varphi} = c\frac{a\tan\varphi}{\cos\varphi}$$

Pendelstab: Drallgesetz für den Drehpunkt

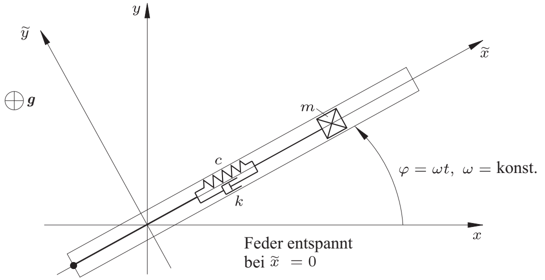
$$\theta^O\ddot{\varphi} + N_1\frac{a}{\cos\varphi} = 0$$

Bewegungsgleichung

$$\theta^O\ddot{\varphi} + ca^2\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = 0$$

Normalkraft für Lagrange-Gleichung 2. Art nicht erforderlich!

Relativbewegung: Massenpunkt in rotierendem Rohr



$n = 1,\ q_1 = \tilde{x}$

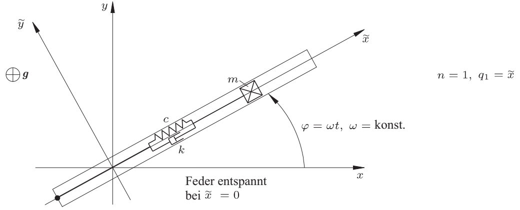
Ortsvektor:

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \tilde{x}\cos(\omega t) \\ \tilde{x}\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}\cos(\omega t) - \tilde{x}\omega\sin(\omega t) \\ \dot{\tilde{x}}\sin(\omega t) + \tilde{x}\omega\cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

Relativbewegung: Massenpunkt in rotierendem Rohr



Geschwindigkeitsvektor: $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \cos(\omega t) - \tilde{x}\omega \sin(\omega t) \\ \dot{\tilde{x}} \sin(\omega t) + \tilde{x}\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}$

kinetische Energie:

$$E = \frac{m}{2} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{m}{2} (\dot{\tilde{x}}^2 + (\tilde{x}\omega)^2)$$

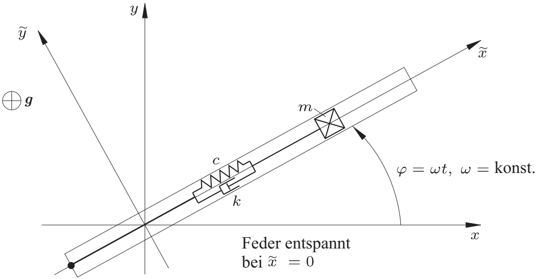
potentielle Energie:

$$V = \frac{c}{2} \tilde{x}^2$$

Lagrange-Funktion:

$$L = E - V = \frac{m}{2} (\dot{\tilde{x}}^2 + (\tilde{x}\omega)^2) - \frac{c}{2} \tilde{x}^2$$

Relativbewegung: Massenpunkt in rotierendem Rohr



$n = 1,\ q_1 = \tilde{x}$

potentiallose Kraft:

$$\delta W = -k\dot{\tilde{x}}\delta\tilde{x} = Q_{\tilde{x}}\delta\tilde{x} \text{ mit } Q_{\tilde{x}} = -k\dot{\tilde{x}}$$

Relativbewegung: Massenpunkt in rotierendem Rohr

Lagrange-Gleichung 2. Art:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = Q_{\tilde{x}}$$

mit

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\tilde{x}}^2 + (\tilde{x}\omega)^2) - \frac{c}{2}\tilde{x}^2,\ Q_{\tilde{x}} = -k\dot{\tilde{x}}$$

Ableitungen:

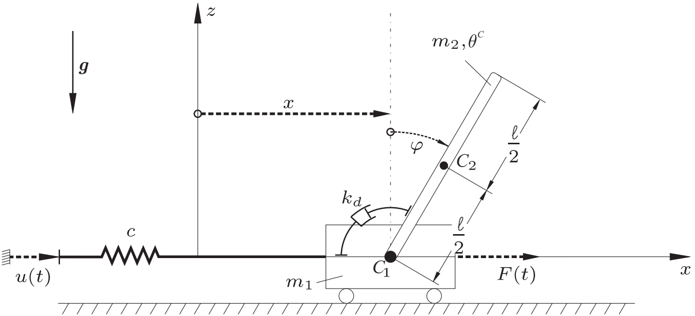
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}} = m\dot{\tilde{x}},\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}}\right) = m\ddot{\tilde{x}}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = m\omega^2\tilde{x} - c\tilde{x}$$

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{\tilde{x}} + k\dot{\tilde{x}} + (c - m\omega^2)\tilde{x} = 0$$

System mit zwei Freiheitsgraden

Methode der virtuellen Verschiebungen vs. Lagrange-Gleichungen 2. Art



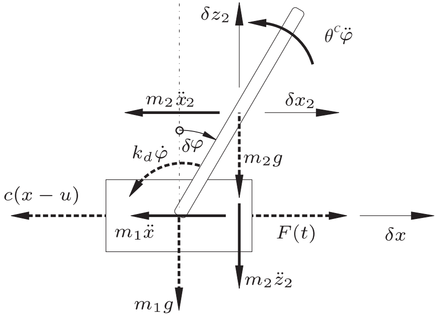
$2\,\mathrm{FHG}\ :\ x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x\ q_2 = \varphi$

System mit zwei Freiheitsgraden

Methode der virtuellen Verschiebungen, Variation der Verschiebungen

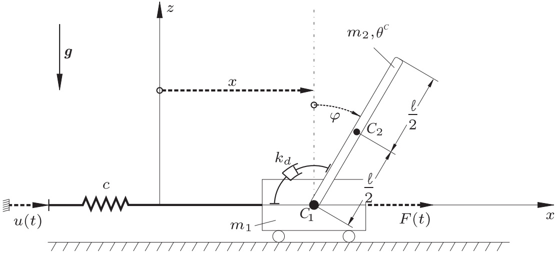


$$
\begin{aligned}
0 = \delta W_\mathsf{a} + \delta W_\mathsf{Tr} = & \left[F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u)\right]\delta x \\
& - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 - m_2 g\delta z_2 - m_2\ddot{z}_2\delta z_2 - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi
\end{aligned}
$$

Aufgaben:

- δx_2 und δz_2 auf δx und $\delta\varphi$ zurückführen
- $\ddot{x}_2$ und $\ddot{z}_2$ auf Ableitungen von x und φ zurückführen

System mit zwei Freiheitsgraden



$2\,\mathrm{FHG}\;:\;x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \; q_2 = \varphi$

Ortsvektor des Massenmittelpunkts des Stabs:

$$\boldsymbol{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \\ \frac{\ell}{2}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

virtuelle Verschiebungen, hier: Variation:

$$\delta\boldsymbol{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_{C_2}}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \boldsymbol{r}_{C_2}}{\partial \varphi}\delta\varphi$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\delta x + \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2}\cos\varphi \\ -\frac{\ell}{2}\sin\varphi \end{bmatrix}\delta\varphi = \begin{bmatrix} \delta x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\delta\varphi \\ -\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi \end{bmatrix}$$

System mit zwei Freiheitsgraden

$$\boldsymbol{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\ell}{2}\sin\varphi \\ \frac{\ell}{2}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{r}_{C_2}$ zweimal nach der Zeit ableiten

$$\boldsymbol{v}_{C_2} = \dot{\boldsymbol{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_{C_2} = \dot{\boldsymbol{v}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\ -\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) \end{bmatrix}$$

System mit zwei Freiheitsgraden

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u)]\,\delta x \\
& - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 - m_2 g\delta z_2 - m_2\ddot{z}_2\delta z_2 - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta x_2 &= \delta x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\delta\varphi \\
\delta z_2 &= -\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi \\
\ddot{x}_2 &= \ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) \\
\ddot{z}_2 &= -\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = {} & [F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u)]\delta x \\
& - m_2\left[\ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\right]\left(\delta x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\delta\varphi\right) \\
& - m_2 g\left(-\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi\right) - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi \\
& - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi
\end{aligned}
$$

System mit zwei Freiheitsgraden

$$
\begin{aligned}
0 =& [F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u)]\delta x \\
& - m_2\left[\ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\right]\left(\delta x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\delta\varphi\right) \\
& - m_2 g\left(-\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi\right) - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi \\
& - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi
\end{aligned}
$$

Sortieren der Terme

$$
\begin{aligned}
0 =& [F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u) - m_2\ddot{x} - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)]\delta x \\
& + \Big[- m_2\ddot{x}\frac{\ell}{2}\cos\varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\cos\varphi \\
& + m_2 g\frac{\ell}{2}\sin\varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\varphi \\
& - k_d\dot{\varphi} - \theta^C\ddot{\varphi}\Big]\delta\varphi
\end{aligned}
$$

System mit zwei Freiheitsgraden

$$
\begin{aligned}
0 =& \Big[F(t) - m_1\ddot{x} - c(x-u) - m_2\ddot{x} - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\Big]\delta x \\
&+ \Big[- m_2\ddot{x}\frac{\ell}{2}\cos\varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\cos\varphi \\
&+ m_2 g\frac{\ell}{2}\sin\varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\varphi \\
&- k_d\dot{\varphi} - \theta^C\ddot{\varphi}\Big]\delta\varphi
\end{aligned}
$$

Bewegungsgleichungen:

$$
(m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2\ell}{2}(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi) + cx = cu + F(t)
$$

$$
(\theta^C + \frac{m_2\ell^2}{4})\ddot{\varphi} + m_2\frac{\ell}{2}\cos\varphi\,\ddot{x} + k_d\dot{\varphi} - m_2 g\frac{\ell}{2}\sin\varphi = 0
$$