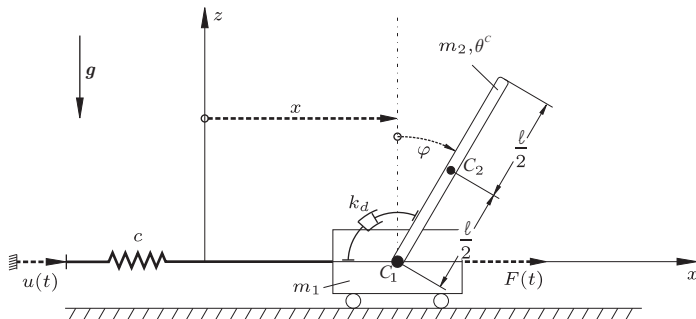


# System mit zwei Freiheitsgraden

Methode der virtuellen Verschiebungen vs. Lagrange-Gleichungen 2. Art



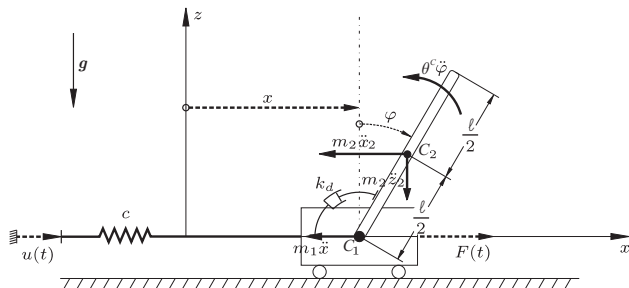
2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

# System mit zwei Freiheitsgraden

Methode der virtuellen Verschiebungen, Variation der Verschiebungen



2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

$$\delta W_i = \delta W_a + \delta W_{Tr}$$

$$\delta W_i = c(x - u)\delta x + k_d \dot{\varphi} \delta \varphi$$

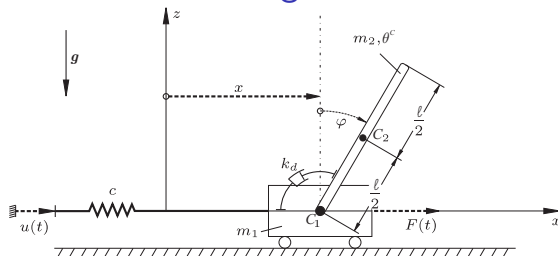
$$\delta W_a = F(t)\delta x - m_2 g \delta z_2$$

$$\delta W_{Tr} = -m_1 \ddot{x} \delta x - m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 - m_2 \ddot{z}_2 \delta z_2 - \theta^c \ddot{\varphi} \delta \varphi$$

Aufgaben:

- $\delta x_2$  und  $\delta z_2$  auf  $\delta x$  und  $\delta \varphi$  zurückführen
- $\ddot{x}_2$  und  $\ddot{z}_2$  auf Ableitungen von  $x$  und  $\varphi$  zurückführen

# System mit zwei Freiheitsgraden



2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

Ortsvektor des Massenmittelpunkts des Stabs:

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\ell}{2} \sin \varphi \\ \frac{\ell}{2} \cos \varphi \end{bmatrix}$$

virtuelle Verschiebungen, hier: Variation:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_{C_2} &= \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C_2}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{r}_{C_2}}{\partial \varphi} \delta \varphi \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \end{bmatrix} \delta \varphi = \begin{bmatrix} \delta x + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \delta \varphi \\ -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## System mit zwei Freiheitsgraden

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\ell}{2} \sin \varphi \\ \frac{\ell}{2} \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$\mathbf{r}_{C_2}$  zweimal nach der Zeit ableiten

$$\mathbf{v}_{C_2} = \dot{\mathbf{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_{C_2} = \dot{\mathbf{v}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} + \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \\ -\frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \end{bmatrix}$$

## System mit zwei Freiheitsgraden

$$\delta x_2 = \delta x + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \delta \varphi$$

$$\delta z_2 = -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi$$

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x} + \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

$$\ddot{z}_2 = -\frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)$$

$$\delta W_i = c(x - u)\delta x + k_d \dot{\varphi} \delta \varphi$$

$$\delta W_a = F(t)\delta x - m_2 g \delta z_2 = F(t)\delta x + m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi$$

$$\begin{aligned} \delta W_{Tr} &= -m_1 \ddot{x} \delta x - m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 - m_2 \ddot{z}_2 \delta z_2 - \theta^C \ddot{\varphi} \delta \varphi \\ &= -m_1 \ddot{x} \delta x - m_2 \left( \ddot{x} + \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \right) \left( \delta x + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \delta \varphi \right) \\ &\quad - m_2 \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi - \theta^C \ddot{\varphi} \delta \varphi \end{aligned}$$

## System mit zwei Freiheitsgraden

$$\delta W_i = \delta W_a + \delta W_{Tr}$$

$$\delta W_i = c(x - u)\delta x + k_d \dot{\varphi} \delta \varphi$$

$$\delta W_a = F(t)\delta x + m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi$$

$$\begin{aligned} \delta W_{Tr} = & -m_1 \ddot{x} \delta x - m_2 \left( \ddot{x} + \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \right) \left( \delta x + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \delta \varphi \right) \\ & - m_2 \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi - \theta^C \ddot{\varphi} \delta \varphi \end{aligned}$$

Sortieren der Terme

$$\begin{aligned} 0 = & [-c(x - u) + F(t) - m_1 \ddot{x} - m_2 \ddot{x} - m_2 \frac{\ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)] \delta x \\ & + \left[ -k_d \dot{\varphi} + m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi - m_2 \ddot{x} \frac{\ell}{2} \cos \varphi \right. \\ & - m_2 \frac{\ell^2}{4} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \cos \varphi - m_2 \frac{\ell^2}{4} (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \sin \varphi \\ & \left. - \theta^C \ddot{\varphi} \right] \delta \varphi \end{aligned}$$

## System mit zwei Freiheitsgraden

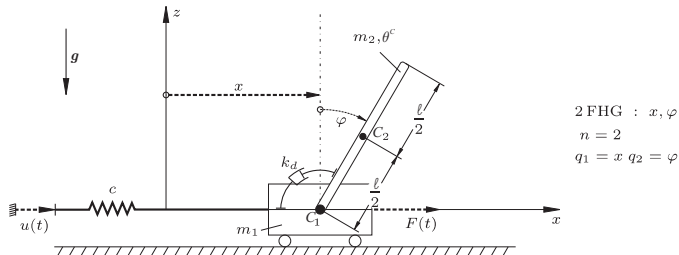
$$\begin{aligned} 0 = & [-c(x - u) + F(t) - m_1\ddot{x} - m_2\ddot{x} - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)]\delta x \\ & + \left[ -k_d\dot{\varphi} + m_2g\frac{\ell}{2}\sin \varphi - m_2\ddot{x}\frac{\ell}{2}\cos \varphi \right. \\ & - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)\cos \varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)\sin \varphi \\ & \left. - \theta^C \ddot{\varphi} \right] \delta \varphi \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + cx &= cu + F(t) \\ (\theta^C + \frac{m_2\ell^2}{4})\ddot{\varphi} + m_2\frac{\ell}{2}\cos \varphi \ddot{x} + k_d\dot{\varphi} - m_2g\frac{\ell}{2}\sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

# System mit zwei Freiheitsgraden

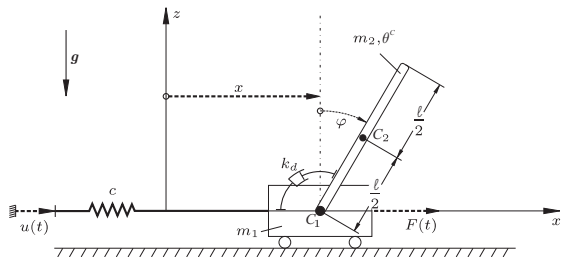
## Lagrange-Gleichungen 2. Art



kinetische Energie:  $E = \frac{m_1}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} (\mathbf{v}_{C_2} \cdot \mathbf{v}_{C_2}) + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2$   
mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_2} \cdot \mathbf{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{l}{2} \dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{l}{2} \dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{x} l \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &= \dot{x}^2 + \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \dot{x} l \dot{\varphi} \cos \varphi \end{aligned}$$

## System mit zwei Freiheitsgraden



2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

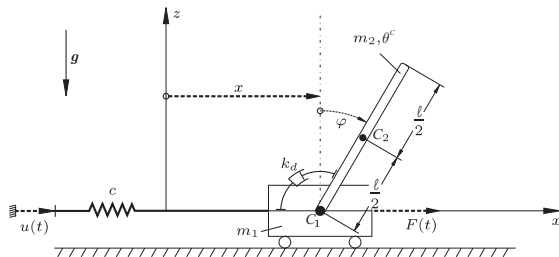
kinetische Energie:  $E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m_2}{2} \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2$

potentielle Energie:  $V = m_2 g z_2 + \frac{c}{2} (x - u)^2 = m_2 g \frac{l}{2} \cos \varphi + \frac{c}{2} (x - u)^2$

Lagrange-Funktion:

$$L = E - V = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m_2}{2} \frac{l^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2 - m_2 g \frac{l}{2} \cos \varphi - \frac{c}{2} (x - u)^2$$

## System mit zwei Freiheitsgraden



2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

potentiallose Kräfte:

$$\delta W = F(t)\delta x - k_d\dot{\varphi}\delta\varphi = Q_x\delta x + Q_\varphi\delta\varphi, \quad Q_x = F(t) \text{ und } Q_\varphi = -k_d\dot{\varphi}$$

Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_\varphi$$

## System mit zwei Freiheitsgraden

$$L = E - V = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} l \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m_2}{2} \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2 - m_2 g \frac{\ell}{2} \cos \varphi - \frac{c}{2} (x - u)^2$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m_1 + m_2) \dot{x} + \frac{m_2}{2} l \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = (m_1 + m_2) \ddot{x} + \frac{m_2}{2} l (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)$$

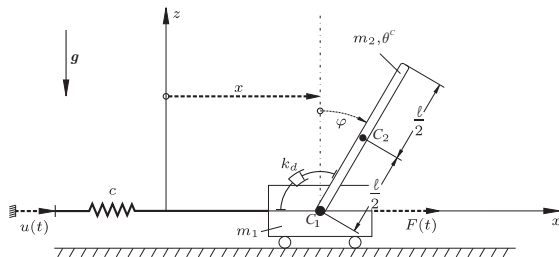
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -c(x - u)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m_2}{2} l \dot{x} \cos \varphi + m_2 \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi} + \theta^C \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{m_2 \ell}{2} (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \left( m_2 \frac{\ell^2}{4} + \theta^C \right) \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{m_2}{2} l \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi$$

# System mit zwei Freiheitsgraden



2 FHG :  $x, \varphi$

$n = 2$

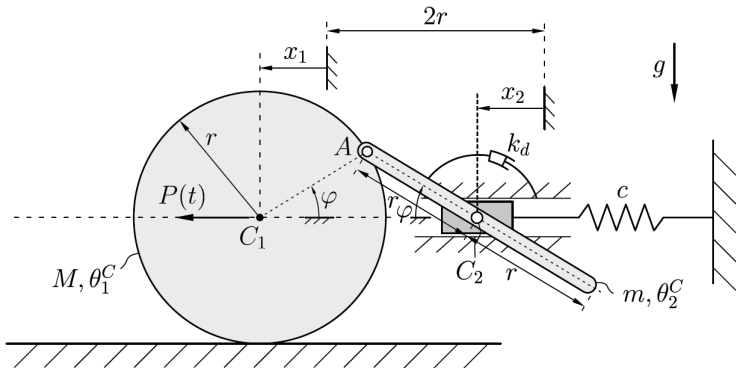
$q_1 = x \quad q_2 = \varphi$

Bewegungsgleichungen:

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2 l}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + cx = cu + F(t)$$

$$(m_2 \frac{l^2}{4} + \theta^C)\ddot{\varphi} + \frac{m_2 l}{2}\ddot{x} \cos \varphi + \frac{m_2}{2}l - m_2 g \frac{l}{2} \sin \varphi = -k_d \dot{\varphi}$$

# Übungsblatt 10, Aufgabe 1



2. Zusammenhänge  $x_1(\varphi), \dot{x}_1(\dot{\varphi}), x_2(\varphi), \dot{x}_2(\varphi, \dot{\varphi})$ ; Virtuelle Verschiebungen:

Rollbedingung:  $\dot{x}_1 = r\dot{\varphi}$  (1)  $\rightarrow$   $x_1 = r\varphi$  (2), da  $x_1(\varphi = 0) = 0$ .

Geometrie :  $x_2 = 2r(1 - \cos \varphi) + x_1$  (3), mit (2):  $x_2 = 2r(1 - \cos \varphi) + r\varphi$  (4)

$\hookrightarrow \dot{x}_2 = r\dot{\varphi}(1 + 2 \sin \varphi)$  (5)

Virtuelle Verschiebungen:  $\tilde{x}_1 = r\tilde{\varphi}$  (6),  $\tilde{x}_2 = r\tilde{\varphi}(1 + 2 \sin \varphi)$  (7)