Stoßvorgänge

Stoßvorgänge: sehr kurze Dauer

Annahmen:

1. Lageänderung der Körper vernachlässigbar
2. Deformationen nur in der Berührungszone
3. Stoßkräfte sehr groß $\rightarrow$ andere eingeprägte Kräfte vernachlässigbar
4. keine Masseverluste während des Stoßes

Massenmittelpunktsätze in integraler Form

Satz
Für einen Körper gilt zwischen zwei Zeitpunkten t_A und t_E der **Massenmittelpunktsatz für den Impuls in integraler Form**

$$m\boldsymbol{v}_C(t_\mathsf{E}) - m\boldsymbol{v}_C(t_\mathsf{A}) = \int_{t_\mathsf{A}}^{t_\mathsf{E}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\,t,$$

wobei $\boldsymbol{v}_C$ die Geschwindigkeit im Massenmittelpunkt C und $\boldsymbol{F}$ die resultierende Kraft ist. Ferner gilt der **Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form**

$$\boldsymbol{D}^C(t_\mathsf{E}) - \boldsymbol{D}^C(t_\mathsf{A}) = \int_{t_\mathsf{A}}^{t_\mathsf{E}} \boldsymbol{M}^C\,\mathrm{d}\,t$$

mit dem auf den Massenmittelpunkt bezogenen resultierenden Moment $\boldsymbol{M}^C$.

Anwendung auf Stoßvorgänge

$$m(\boldsymbol{v}_C(t_\mathrm{E}) - \boldsymbol{v}_C(t_\mathrm{A})) = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{E}} \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}\,t$$

$$\boldsymbol{\Theta}^C \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_\mathrm{E}) - \boldsymbol{\omega}(t_\mathrm{A})) = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{E}} \boldsymbol{M}^C\,\mathrm{d}\,t$$

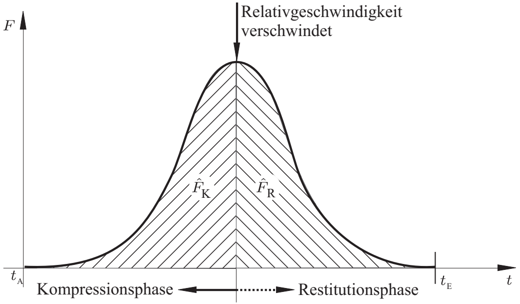
- $\boldsymbol{F}$ bzw. $\boldsymbol{M}^C$: Stoßkräfte bzw. die daraus resultierenden Momente und evtl. Reaktionskräfte/-momente
- Häufig gesucht: Kinematische Größen ($\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{\omega}$) vor oder nach dem Stoß
- Zusatzannahmen erforderlich!

Kompressions- und Restitutionsphase

1. Glatter Stoß: **Stoßkraft** wirkt im Berührpunkt in Richtung der Stoßnormalen
2. Kompressions- und Restitutionsphase:

$$\int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\, t = \hat{\boldsymbol{F}}_K + \hat{\boldsymbol{F}}_R$$

3. Übergang von der Kompressions- in die Restitutionsphase: gleiche Geschwindigkeit der Körper im Berührpunkt in Normalenrichtung
4. Stoßimpuls während der Restitutionsphase: $\hat{\boldsymbol{F}}_R = \varepsilon \hat{\boldsymbol{F}}_K$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 1$



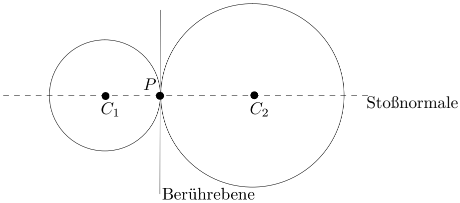
Stoßzahl

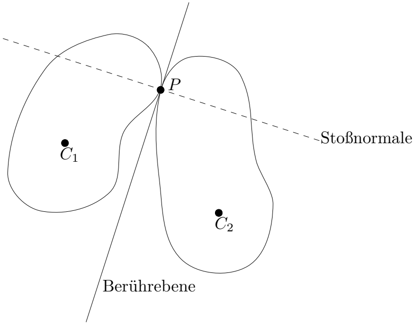
- ist von der Materialpaarung, der Oberflächenbeschaffenheit und weiteren Umgebungsbedingungen abhängig
- muss experimentell ermittelt werden
- $\varepsilon = 1$: **vollelastischer** Stoß
- $\varepsilon = 0$: **vollplastischer** Stoß

	plastisch	Stahl/Stahl	Glas/Glas	elastisch
Stoßzahl	0	0.56	0.94	1

Klassifikation von Stoßvorgängen

1. **zentrischer** Stoß: **Stoßnormale** verläuft durch die Massenmittelpunkte der beiden Körper, sonst **exzentrischer** Stoß
2. **gerader** Stoß: Geschwindigkeit der beiden Körper im Berührpunkt in Richtung der Stoßnormalen, sonst **schiefer** Stoß





Gerader zentrischer Stoß

Massenmittelpunktsatz in integraler Form in Richtung der gemeinsamen Geraden, getrennt für die Kompressions- und die Restitutionsphase:

$$m_1 v_0 - m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{A}) = \hat{F}_\mathrm{K}$$
$$m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{E}) - m_1 v_0 = \varepsilon \hat{F}_\mathrm{K}$$
$$m_2 v_0 - m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{A}) = -\hat{F}_\mathrm{K}$$
$$m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{E}) - m_2 v_0 = -\varepsilon \hat{F}_\mathrm{K}$$

v_0: gemeinsame Geschwindigkeit am Ende der Kompressionsphase

$\rightarrow$ vier Gleichungen für vier Unbekannte ($v_{C_1}(t_\mathrm{E})$, $v_{C_2}(t_\mathrm{E})$, v_0, $\hat{F}_\mathrm{K}$)
Auflösen nach $v_{C_1}(t_\mathrm{E})$, $v_{C_2}(t_\mathrm{E})$:

$$v_{C_1}(t_\mathrm{E}) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{A}) + m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{A}) - \varepsilon m_2 (v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}))}{m_1 + m_2}$$
$$v_{C_2}(t_\mathrm{E}) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{A}) + m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{A}) + \varepsilon m_1 (v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}))}{m_1 + m_2}$$

Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß

$$v_{C_1}(t_\mathrm{E}) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{A}) + m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{A}) - \varepsilon m_2 (v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}))}{m_1 + m_2}$$

$$v_{C_2}(t_\mathrm{E}) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_\mathrm{A}) + m_2 v_{C_2}(t_\mathrm{A}) + \varepsilon m_1 (v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}))}{m_1 + m_2}$$

Relativgeschwindigkeit:

$$v_{C_1}(t_\mathrm{E}) - v_{C_2}(t_\mathrm{E}) = -\varepsilon \left(v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}) \right)$$

$\rightarrow$ Stoßzahl ist negatives Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoß

- **elastischer Stoß**: Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß bis auf das Vorzeichen identisch. Beide Massen gleich groß, dann Geschwindigkeitsaustausch: $v_{C_1}(t_\mathrm{E}) = v_{C_2}(t_\mathrm{A})$, $v_{C_2}(t_\mathrm{E}) = v_{C_1}(t_\mathrm{A})$.

- **vollplastischer Stoß**: Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß verschwindet; beide Körper bewegen sich nach dem Stoß mit v_0.

Kinetische Energie beim Stoß

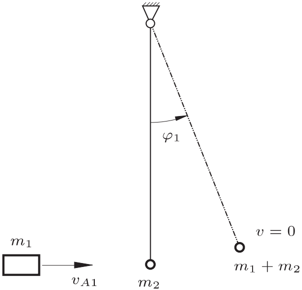
Umwandlungsverluste:

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}(m_1 v_{C_1}^2(t_\mathrm{A}) + m_2 v_{C_2}^2(t_\mathrm{A})) - \frac{1}{2}(m_1 v_{C_1}^2(t_\mathrm{E}) + m_2 v_{C_2}^2(t_\mathrm{E})) \\ &= \frac{1-\varepsilon^2}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(v_{C_1}(t_\mathrm{A}) - v_{C_2}(t_\mathrm{A}))^2\end{aligned}$$

- **elastischer Stoß**: kein Verlust an kinetischer Energie
- **vollplastischer Stoß**: Verlust an kinetischer Energie maximal

Beispiel: Ballistisches Pendel

vollplastischer Stoß, Aufprallgeschwindigkeit aus max. Pendelausschlag



Geschwindigkeit nach dem plastischen Stoß:

$$v_1(t_\mathrm{E}) = v_2(t_\mathrm{E}) = v_E = \frac{m_1 v_1(t_\mathrm{A})}{m_1 + m_2}$$

kinetische Energie nach dem Stoß:

$$E_0 = \frac{m_1 + m_2}{2} v_E^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2(t_\mathrm{A})}{m_1 + m_2}$$

potentielle Energie: $V_0 = 0$

Beispiel: Ballistisches Pendel

Bewegungsumkehr: $E_1 = 0,\ V_1 = (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos\varphi_1)$

Aus $E_0 + V_0 = E_1 + V_1$:

$$\frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2(t_\mathrm{A})}{m_1 + m_2} = (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos\varphi_1)$$

Ergebnis:

$$v_1(t_\mathrm{A}) = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{(2g\ell)(1 - \cos\varphi_1)}$$

Schiefer zentrischer Stoß

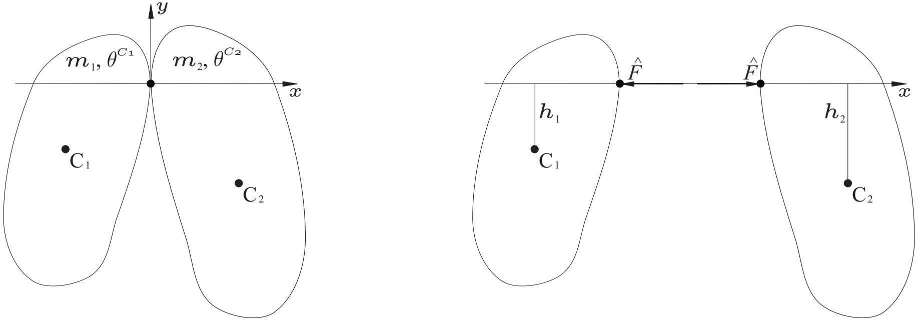
- zweckmäßig: Koordinatensystem an Stoßnormale ausrichten
- in Stoßnormalenrichtung: Gleichungen wie beim geraden Stoß!
- Tangentialrichtung: Geschwindigkeiten unverändert, da Tangentialanteile der Stoßkraft näherungsweise verschwinden!

Exzentrischer Stoß in der Ebene

zusätzlich: Massenmittelpunktsatz für den Drall (bzw. Drallgesetz) in integraler Form berücksichtigen

$$\theta^C(\omega(t_\mathsf{E}) - \omega(t_\mathsf{A})) = \int_{t_\mathsf{A}}^{t_\mathsf{E}} M^C \, \mathrm{d}\, t = h\hat{F}$$

$\hat{F}$: Stoßimpuls in Stoßnormalenrichtung, h Abstand zwischen dem Massenmittelpunkt und der Geraden durch den Berührpunkt in Richtung der Stoßnormalen



Exzentrischer Stoß in der Ebene

Insgesamt sechs Gleichungen, aber sieben Unbekannte:

$$
\begin{aligned}
m_1(v_{C_1,n}(t_\mathrm{E}) - v_{C_1,n}(t_\mathrm{A})) &= -\hat{F} \\
m_1(v_{C_1,t}(t_\mathrm{E}) - v_{C_1,t}(t_\mathrm{A})) &= 0 \\
\theta_1^C(\omega_1(t_\mathrm{E}) - \omega_1(t_\mathrm{A})) &= h_1\hat{F} \\
m_2(v_{C_2,n}(t_\mathrm{E}) - v_{C_2,n}(t_\mathrm{A})) &= \hat{F} \\
m_2(v_{C_2,t}(t_\mathrm{E}) - v_{C_2,t}(t_\mathrm{A})) &= 0 \\
\theta_2^C(\omega_2(t_\mathrm{E}) - \omega_2(t_\mathrm{A})) &= -h_2\hat{F}
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ Stoßzahl benötigt, muss aber modifiziert werden:

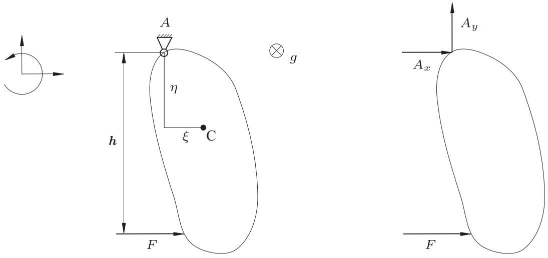
$$
\varepsilon = -\frac{v_{P_1,n}(t_\mathrm{E}) - v_{P_2,n}(t_\mathrm{E})}{v_{P_1,n}(t_\mathrm{A}) - v_{P_2,n}(t_\mathrm{A})}
$$

Bei gelagerten Körpern:

- Reaktionskräfte von gleicher Größenordnung wie die Stoßkräfte $\rightarrow$ müssen in den Massenmittelpunktsätzen berücksichtigt werden
- Anzahl der Unbekannten ändert sich nicht, da kinematische Bindungen vorliegen

Stoß auf einen drehbar gelagerten starren Körper

Gesucht: Lage des Gelenkpunkts A so, dass keine Reaktionskräfte in A



Hier: nur ein Körper, zunächst im Ruhezustand

$$m(v_{Cx}(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{F} + \hat{A}_x$$

$$m(v_{Cy}(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{A}_y$$

$$\theta^A(\omega(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{F}h$$

mit

$$\hat{A}_x := \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{E}} A_x \,\mathrm{d}\, t \text{ und } \hat{A}_y := \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{E}} A_y \,\mathrm{d}\, t$$

Stoß auf einen drehbar gelagerten starren Körper

$$m(v_{Cx}(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{F} + \hat{A}_x$$
$$m(v_{Cy}(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{A}_y$$
$$\theta^A(\omega(t_\mathrm{E}) - 0) = \hat{F}h$$

kinematischen Bedingungen: $v_{Cx} = \eta\omega$, $v_{Cy} = \xi\omega$

Unbekannte: $\hat{A}_x$, $\hat{A}_y$, $\omega(t_\mathrm{E})$; Stoßimpuls

Lagerkräfte:

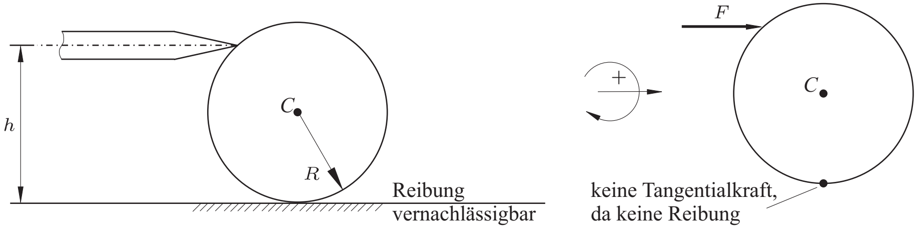
$$\hat{A}_x = \hat{F}\left(\frac{m\eta h}{\theta^A} - 1\right) \text{ und } \hat{A}_y = \hat{F}\frac{m\xi h}{\theta^A}$$

- Lagerkräfte verschwinden für $\eta = \frac{\theta^A}{mh}$, $\xi = 0 \rightarrow$ Stoßmittelpunkt
- liegt auf einer Geraden durch den Massenmittelpunkt, die senkrecht auf der Richtung der Stoßkraft steht
- Anwendungen: Hammer, Tennisschläger

Beispiel: Billardkugel

In welcher Höhe h führt ein parallel zur Rollebene der Kugel ausgeführter Stoß dazu, dass die Kugel rollt, ohne zu gleiten?

Geg.: $\theta^C = \frac{2}{5} mR^2$



Auflagepunkt ist Stoßmittelpunkt: $R = \frac{\theta^A}{mh}$

Einsetzen von $\theta^A = \theta^C + R^2 m = \frac{7}{5} mR^2$ und Auflösen nach h:

$$h = \frac{7}{5} R$$