Schwingungen

Erscheinungsformen, Einfreiheitsgradsystem: freie Schwingungen

---

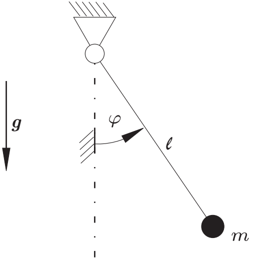
Definition (Schwingung)

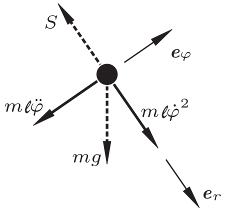
Eine **Schwingung** *ist eine zeitliche Änderung einer Zustandsgröße eines Systems, bei der im Allgemeinen diese Zustandsgröße abwechselnd zu- und abnimmt. (DIN 1311)*

- Schwingung kann eine feste Periodendauer besitzen
- Zustandsgröße: kinematische Größen, dynamische Größen, statistisch gemittelte Größen
- teilw. werden auch nichtperiodische Vorgänge (z.B. Kriechvorgänge) zu den Schwingungen gezählt

Beispiel: Mathematisches Pendel

Schwingungsfähiges mechanisches System:
Trägheit (kinetische Energie) und Rückstellung





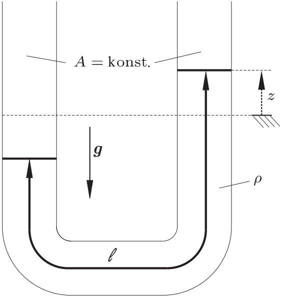
Auswertung des Impulsgesetzes in Umfangsrichtung:

$$-m\ell\ddot{\varphi} - mg\sin\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\sin\varphi = 0$$

$\rightarrow$ nichtlineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung
Linearisierung für $\varphi \ll 1$: $\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$
triviale Lösung: $\varphi \equiv 0$, häufig nicht mit den Anfangsbedingungen vereinbar

Beispiel: Flüssigkeit in einem Rohr



Masse der Flüssigkeit:$m = \rho A \ell$

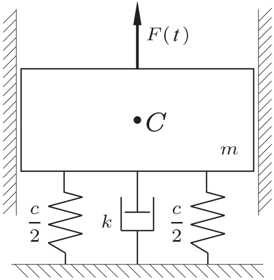
Rückstellkraft: Gewichtskraft $2zA\rho g$

Impulsgesetz:

$$\begin{aligned} -m\ddot{z} - 2zA\rho g &= 0 \\ \rho A \ell \ddot{z} + \rho A 2gz &= 0 \\ \ddot{z} + \frac{2g}{\ell} z &= 0 \end{aligned}$$

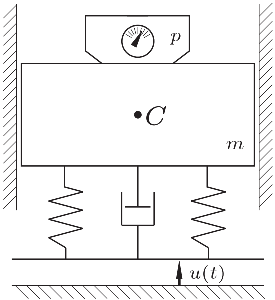
Beispiel: Schwingungsfundament, Entstörung

a) Aktiventstörung



Schutz der Umgebung
vor Erregerkraft *F(t)* einer
Maschine

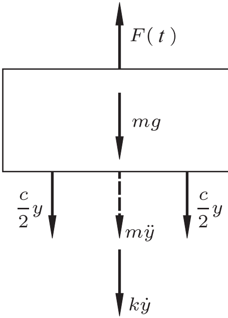
b) Passiventstörung



Schutz eines Gerätes
vor Erschütterungen der
Umgebung

Beispiel: Schwingungsfundament, Aktiventstörung

Freischnitt für Aktiventstörung:



$$F(t) - mg - cy - k\dot{y} - m\ddot{y} = 0 \;\rightarrow\; m\ddot{y} + k\dot{y} + cy + mg = F(t)$$

Beispiel: Schwingungsfundament, Aktiventstörung

$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy + mg = F(t)$$

statische Ruhelage für $F(t) = 0$: $y \equiv y_0$ aus $mg + cy_0 = 0$

Bewegung Δy um die statische Ruhelage: $y = y_0 + \Delta y,\ \dot{y} = \Delta\dot{y},\ \ddot{y} = \Delta\ddot{y}$

$\rightarrow$ Bewegungsgleichung: $m\Delta\ddot{y} + k\Delta\dot{y} + c(y_0 + \Delta y) + mg = F(t)$

Ausnutzen der Bedingung für die statische Ruhelage:

$$m\Delta\ddot{y} + k\Delta\dot{y} + c\Delta y = F(t)$$

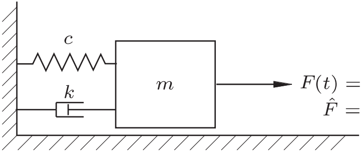
für $F(t) \neq 0$ ist $\Delta y(t) \equiv 0$ keine Lösung der Differentialgleichung für Δy

Erregerarten

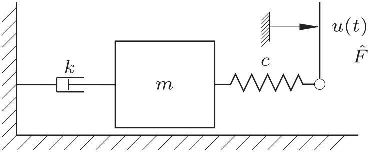
1. Krafterregung
   Kraft greift direkt oder als Federkraft (**Fußpunkterregung**) am Körper an, z.B. harmonische Krafterregung:

$$F(t) = \hat{F}\sin\Omega t \quad \text{bzw.} \quad F(t) = \hat{F}\cos\Omega t$$

   Erregerkreisfrequenz: Ω ($\Omega = 2\pi f,\ f$ in [Hz])
   Amplitude: $\hat{F} = F_0 = \text{const.}$



   Federfußpunkterregung $F(t) = c(u_0 \sin\Omega t - x(t))$

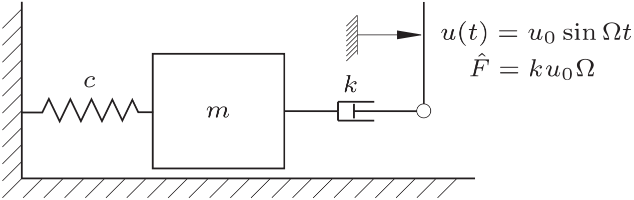


Erregerarten

2. Dämpfungskrafterregung
   Verschiebung des Dämpferfußpunkts, z.B. harmonisch:

$$F(t) = k(u_0 \Omega \cos \Omega t - \dot{x}(t)) = \hat{F} \cos \Omega t - k\dot{x}(t), \hat{F} \sim \Omega.$$

$\rightarrow$ Amplitude proportional zur Erregerkreisfrequenz

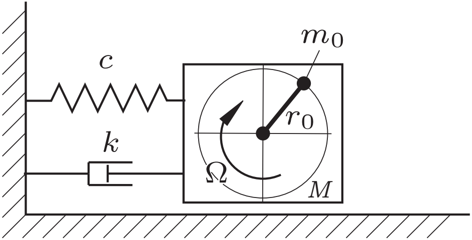


Erregerarten

3. Massenkrafterregung
   z.B. rotierende Unwuchten:

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad \text{bzw.} \quad F(t) = \hat{F} \cos \Omega t \quad \text{mit} \quad \hat{F} \sim \Omega^2$$

$\rightarrow$ Amplitude proportional zum Quadrat der Erregerkreisfrequenz



$$\hat{F} = m_0 r_0 \Omega^2$$

Bewegungsgleichung für das System mit einem Freiheitsgrad

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t) = \hat{F}(\Omega)\sin\Omega t \text{ bzw. } \hat{F}(\Omega)\cos\Omega t$$

Darin bezeichnen:
$x(t)$: Verschiebung oder Winkelkoordinate
m: Masse oder Drehmasse
k: Dämpfer- oder Drehdämpferkonstante
c: Feder- oder Drehfederkonstante
$F(t)$: Erregerkraft oder Erregermoment

Freie Schwingungen

falls $F(t) = 0$:

Bewegungsgleichung für das Einfreiheitsgradsystem

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

triviale Lösung: $x \equiv 0 \rightarrow$ nichttriviale Lösungen?

Freie ungedämpfte Schwingungen

$F(t) = 0$ und $k = 0 \rightarrow$ konservatives System, Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Standardform:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \text{ mit } \frac{c}{m} = \omega_0^2, \ \omega_0 \text{ (Eigenkreisfrequenz)}$$

allgemeine Lösung, Exponentialansatz:

$$x(t) = \tilde{C}\ \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, bestimmen von λ:

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)\tilde{C}\ \mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \ \rightarrow \ \lambda_{1,2} = \pm \mathrm{i}\omega_0$$

Gesamtlösung, Superpositionsprinzip:

$$x(t) = \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 t} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0 t}$$

mit Euler-Formel $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\,\sin\alpha$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{C}_1(\cos\omega_0 t + \mathrm{i}\sin\omega_0 t) + \tilde{C}_2(\cos\omega_0 t - \mathrm{i}\sin\omega_0 t) \\ &= (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)\cos\omega_0 t + \mathrm{i}(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Freie ungedämpfte Schwingungen

Ergebnis:

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

Eigenfrequenz: $f = \frac{\omega_0}{2\pi}$ (Einheit: [Hz])

andere Darstellung der allgemeinen Lösung:

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$$

A: **Amplitude**, α: **Phasenverschiebung**, **Phasenwinkel**

Umrechnung:

$$x(t) = A \sin \omega_0 t \cos \alpha + A \cos \omega_0 t \sin \alpha \overset{!}{=} C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

Daraus:

$$C_1 = A \cos \alpha, \quad C_2 = A \sin \alpha \ \Rightarrow A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}$$

Bestimmen der Integrationskonstanten aus Anfangsbedingungen

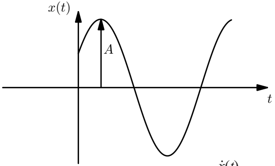
$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

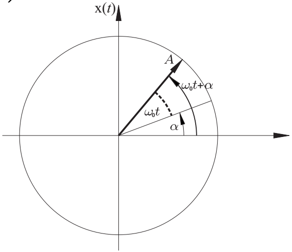
$\rightarrow$ **Anfangswertproblem**

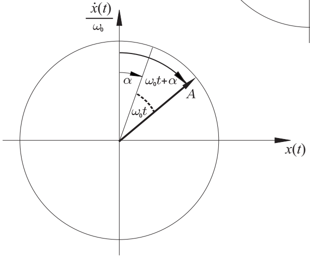
Grafische Darstellung

1. Ausschlag-Zeit-Diagramm
2. Vektordiagramm
3. Phasenportrait

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)^2 = A^2$$







Freie gedämpfte Schwingungen

für geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft: $F_D = -k\dot{x}$

Bewegungsgleichung des Einfreiheitsgradsystems:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$$

Standardform:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \text{mit } 2\delta = \frac{k}{m},\ \omega_0^2 = \frac{c}{m}$$

Exponentialansatz:

$$x(t) = \tilde{C}\ \mathrm{e}^{\lambda t}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung, bestimmen von λ:

$$\underbrace{\left[\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2\right]}_{=0}\underbrace{\tilde{C}\ \mathrm{e}^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0$$

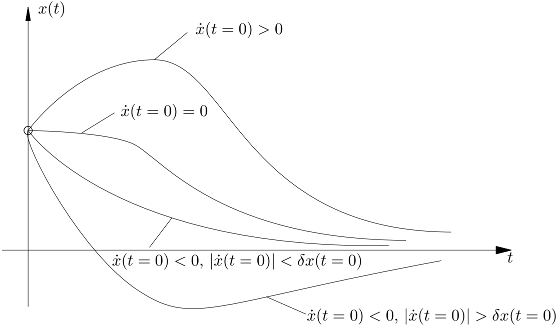
$\rightarrow\ \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Gesamtlösung, Superpositionsprinzip: $x(t) = \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{\lambda_2 t}$

Gedämpfte Schwingungen
Diskussion der Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1},\ \text{Lehr-Dämpfung: } D := \frac{\delta}{\omega_0}$$

1. starke Dämpfung, $D > 1$ ($\delta > \omega_0$)
   $\lambda_{1,2}$ negativ $\rightarrow$ $x(t)$ exponentiell abklingend, aperiodische Bewegung



2. aperiodischer Grenzfall, $D = 1$ ($\delta = \omega_0$)
   $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ $\rightarrow$ aperiodische Bewegung, nicht realisierbar

schwache Dämpfung, $D < 1$ ($\delta < \omega_0$)

häufig $D \ll 1$

konjugiert komplexe Eigenwerte:

$$\lambda_{1,2} = \omega_0(-D \pm \mathrm{i}\sqrt{1-D^2})$$

Lösung ist komplexwertige Exponentialfunktion:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-D\omega_0 t}(\tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-D^2}t} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-D^2}t})$$

Mit Euler-Formel $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\alpha} = \cos\alpha \pm \mathrm{i}\,\sin\alpha$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{-D\omega_0 t}\left(\tilde{C}_1\left(\cos\omega_0\sqrt{1-D^2}t + \mathrm{i}\,\sin\omega_0\sqrt{1-D^2}t\right)\right. \\ &\qquad \left. + \tilde{C}_2\left(\cos\omega_0\sqrt{1-D^2}t - \mathrm{i}\,\sin\omega_0\sqrt{1-D^2}t\right)\right) \\ &= \mathrm{e}^{-D\omega_0 t}(\underbrace{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)}_{=:C_1}\cos\omega_0\sqrt{1-D^2}t + \underbrace{\mathrm{i}\,(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)}_{=:C_2}\sin\omega_0\sqrt{1-D^2}t) \end{aligned}$$

somit: $x(t) = \mathrm{e}^{-D\omega_0 t}\left(C_1\cos\omega_0\sqrt{1-D^2}t + C_2\sin\omega_0\sqrt{1-D^2}t\right)$

$\rightarrow$ Schwingungen, Amplitude exponentiell abklingend

schwache Dämpfung, $D < 1$ $(\delta < \omega_0^2)$

Kreisfrequenz der Schwingung:

$$\omega_\mathrm{d} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} < \omega_0$$

„Periodendauer": $T_\mathrm{e} = \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{d}} > T$

Schwingung nicht mehr periodisch:

$$x(t + T_\mathrm{e}) \neq x(t) \quad \text{denn} \quad \frac{x(t)}{x(t + T_\mathrm{e})} = \mathrm{e}^{D\omega_0 T_\mathrm{e}} \neq 1$$

logarithmisches Dekrement:

$$\ln \frac{x(t)}{x(t + T_\mathrm{e})} = D\omega_0 T_\mathrm{e} = D\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_\mathrm{d}} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}$$

$\rightarrow$ Bestimmung im Ausschwingversuch

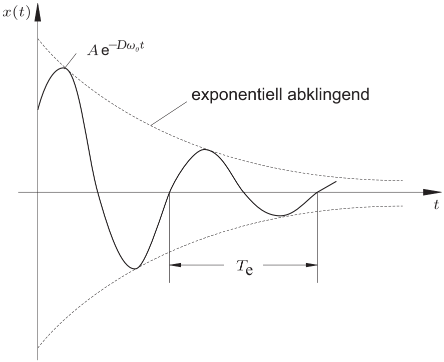
- freie Schwingungen klingen exponentiell schnell ab $\rightarrow$ praktisch bedeutungslos
- ω_0 bzw. ω_d wichtig zur Vermeidung von Resonanz bei erzwungenen Schwingungen

schwache Dämpfung, $D < 1$ $(\delta < \omega_0^2)$

alternative Darstellung:

$$x(t) = A\,\mathrm{e}^{-D\omega_0 t} \sin\left(\omega_0 \sqrt{1 - D^2}\, t + \varphi\right)$$

Amplitude: $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$, Phasenverschiebung φ: $\tan\varphi = \frac{C_2}{C_1}$



Quiz

https://pingo.scc.kit.edu/822452