Schwingungen

Einfreiheitsgradsystem: erzwungene Schwingungen

Erregung $\rightarrow$ Dauerschwingungen möglich
Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = \hat{F}\cos\Omega t$$

Standardform:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E x_0 \cos(\Omega t)$$

Parameter

$$2\delta = \frac{k}{m},\ \omega_0^2 = \frac{c}{m},\ D = \frac{\delta}{\omega_0},\ \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

rechte Seiten:

$$x_0 = \begin{cases} \frac{F_0}{c} \text{ bzw. } u_0, & \text{Krafterregung} \\ u_0, & \text{Dämpfungskrafterregung} \\ \frac{m_0}{m} r_0, & \text{Massenkrafterregung} \end{cases} \quad E = \begin{cases} 1 \\ 2D\eta \\ \eta^2 \end{cases}$$

Lösen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E x_0 \cos(\Omega t)$$

Lösung der Differentialgleichung: $x(t) = x_\mathrm{h}(t) + x_\mathrm{p}(t)$
partikuläre Lösung: Typ der rechten Seite $x_\mathrm{p}(t) = V x_0 \cos(\Omega t - \varepsilon)$
alternativer Ansatz:

$$\begin{aligned}
x_\mathrm{p}(t) &= V_1 \cos \Omega t + V_2 \sin \Omega t \\
\dot{x}_\mathrm{p}(t) &= \Omega(-V_1 \sin \Omega t + V_2 \cos \Omega t) \\
\ddot{x}_\mathrm{p}(t) &= -\Omega^2(V_1 \cos \Omega t + V_2 \sin \Omega t)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}
&(-V_1\Omega^2 + 2D\omega_0\Omega V_2 + \omega_0^2 V_1 - \omega_0^2 E x_0)\cos \Omega t \\
&\qquad + (-V_2\Omega^2 - 2D\omega_0\Omega V_1 + \omega_0^2 V_2)\sin \Omega t = 0
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned}
(\omega_0^2 - \Omega^2)V_1 + 2D\omega_0\Omega V_2 &= \omega_0^2 E x_0 \\
-2D\omega_0\Omega V_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)V_2 &= 0
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung

Lösung für V_1 und V_2:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_0^2 E x_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2} \\ V_2 &= \frac{2D\omega_0\Omega\omega_0^2 E x_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2} \end{aligned}$$

Amplitude:

$$A = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \frac{\omega_0^2 E x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}}$$

Vergrößerungsfunktion:

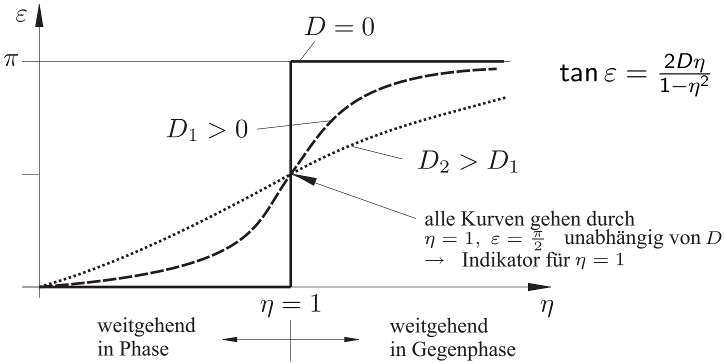
$$V = \frac{A}{x_0} = \frac{E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Phasenwinkel ε:

$$\tan\varepsilon = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2D\omega_0\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)} = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

Lösen der Differentialgleichung

- gleiche Frequenz wie die Erregung
- Amplituden kleiner ($V < 1$) oder größer ($V > 1$) als die statische Auslenkung x_0
- Phasenverschiebung unabhängig von der Art der Erregung (von E)

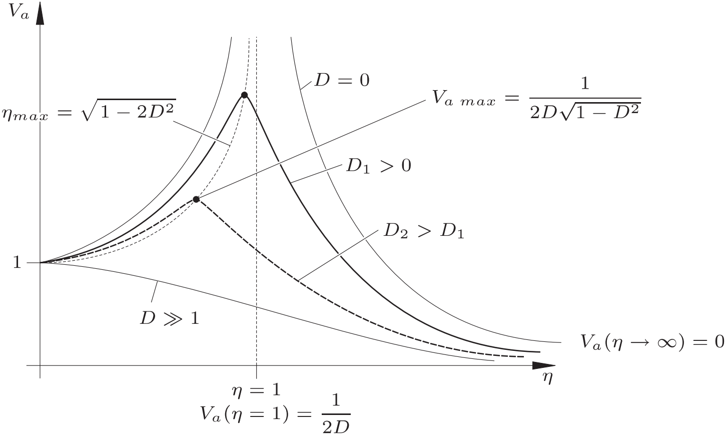


$$\tan\varepsilon = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

Vergrößerungsfunktion

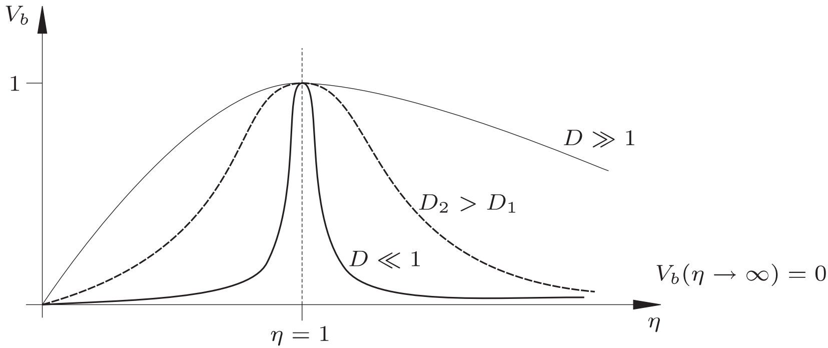
ist erregungsabhängig

1. Krafterregung $E = 1$, $V_a = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$



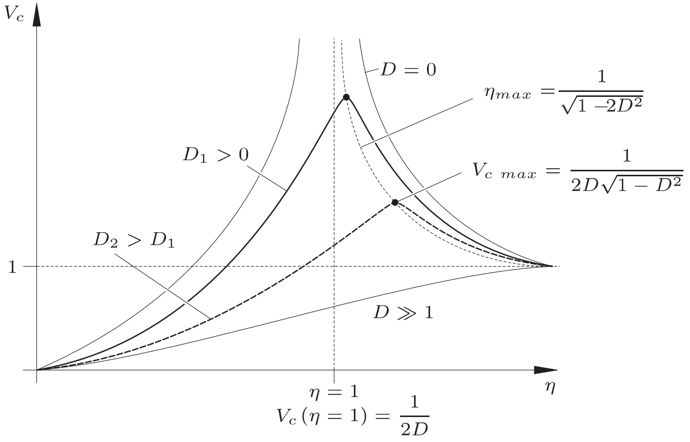
Vergrößerungsfunktion

2. Dämpfungskrafterregung $E = 2D\eta, V_b = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$



Vergrößerungsfunktion

3. Massenkrafterregung $E = \eta^2$, $V_c = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+(2D\eta)^2}}$

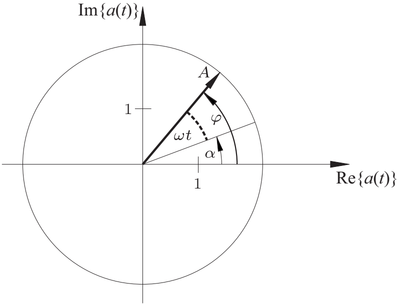


Quiz

https://pingo.scc.kit.edu/822452

Frequenzgangrechnung

für partikuläre Lösung mit komplexem Zeiger, umlaufend mit $\omega =$konst.



$$a(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\alpha)}$$

Euler-Formel:

$$a(t) = A(\cos(\omega t + \alpha) + \mathrm{i}\,\sin(\omega t + \alpha))$$

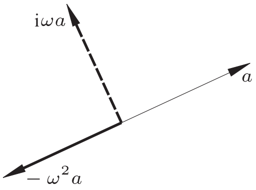
Frequenzgangrechnung

$$a(t) = A(\cos(\omega t + \alpha) + \mathrm{i}\,\sin(\omega t + \alpha))$$

Projektion auf die Achsen

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\{a(t)\} &= A\cos(\omega t + \alpha) \\ \mathrm{Im}\{a(t)\} &= A\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

Zeitableitung:



$$\begin{aligned} a &= A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \alpha)} \\ \dot{a} &= \mathrm{i}\omega\, A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \alpha)} = \mathrm{i}\omega a \\ \ddot{a} &= -\omega^2\, A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 a = (\mathrm{i}\omega)^2 a \end{aligned}$$

Frequenzgangrechnung

$$\xrightarrow[y(t)]{\text{Eingang}} \boxed{\text{System}} \xrightarrow[x_\mathrm{p}(t)]{\text{Ausgang}}$$

Eingang (Erregung $y(t)$):

$$y(t) = y_0 \sin \Omega t = \operatorname{Im}\left\{y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right\} \text{ bzw. } y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

Ausgang (Antwort $x(t)$):

$$\begin{aligned} x_\mathrm{p}(t) &= V y_0 \sin(\Omega t - \varepsilon) = \operatorname{Im}\left\{V y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Omega t - \varepsilon)}\right\} \\ &= \operatorname{Im}\left\{V\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon}\ y_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right\} = \operatorname{Im}\left\{F(\mathrm{i}\Omega)\, y(t)\right\} \end{aligned}$$

bzw.

$$x_\mathrm{p}(t) = F(\mathrm{i}\Omega) y_0\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t} = F(\mathrm{i}\Omega) y(t)$$

$$\xrightarrow[y(t)=y_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}]{\text{Eingang}} \boxed{F(\mathrm{i}\Omega)} \xrightarrow[x_\mathrm{p}(t)=F(\mathrm{i}\Omega)y_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}]{\text{Ausgang}}$$

Berechnung des Frequenzgangs

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E y_0 \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\left((\mathrm{i}\Omega)^2 + 2D\omega_0(\mathrm{i}\Omega) + \omega_0^2\right) F(\mathrm{i}\Omega)\cancel{y_0}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}} = \omega_0^2\cancel{y_0}E\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}}$$

damit

$$F(\mathrm{i}\Omega) = \frac{\omega_0^2 E}{(\mathrm{i}\Omega)^2 + 2D\omega_0(\mathrm{i}\Omega) + \omega_0^2}$$

z.B. für Krafterregung ($E = 1$):

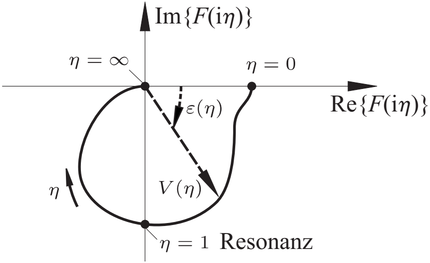
$$F(\mathrm{i}\Omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \Omega^2 + \mathrm{i}\,2D\omega_0\Omega}$$

oder mit $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ bei Krafterregung

$$F(\mathrm{i}\eta) = \frac{1}{1 - \eta^2 + \mathrm{i}\,2D\eta} = \frac{1 - \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} - \mathrm{i}\,\frac{2D\eta}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}$$

Ortskurve (Nyquist-Diagramm)

Auftragen des Frequenzgangs als Kurve in der komplexen Zahlenebene mit Ω als Parameter



$$V(\Omega) = |F(\mathrm{i}\Omega)| \qquad \text{Vergrößerungsfunktion}$$

$$\tan\varepsilon = -\frac{\mathrm{Im}\{F(\mathrm{i}\Omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(\mathrm{i}\Omega)\}} \qquad \text{Phasenverschiebung}$$

mit $V(\eta) = |F(\mathrm{i}\eta)| = \sqrt{\mathrm{Re}^2\{F(\mathrm{i}\eta)\} + \mathrm{Im}^2\{F(\mathrm{i}\eta)\}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$

und

$$\tan\varepsilon(\eta) = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

Reellwertige Systemantwort

Ausgang:

$$x_\mathsf{p}(t) = F(\mathrm{i}\Omega) y_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}$$

sinusförmige Erregung $\sin \Omega t$: $y(t) = \operatorname{Im}\left\{y_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right\}$

Antwort:

$$x_\mathsf{p}(t) = \operatorname{Im}\left\{F(\mathrm{i}\Omega) y_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right\} = V(\Omega) y_0 \sin\left(\Omega t - \varepsilon(\Omega)\right)$$

cosinusförmige Erregung $\cos \Omega t$: $y(t) = \operatorname{Re}\left\{y_0 e^{\mathrm{i}\Omega t}\right\}$

Antwort:

$$x_\mathsf{p}(t) = \operatorname{Re}\left\{F(\mathrm{i}\Omega) y_0 \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\right\} = V(\Omega) y_0 \cos\left(\Omega t - \varepsilon(\Omega)\right)$$

Quiz

https://pingo.scc.kit.edu/822452