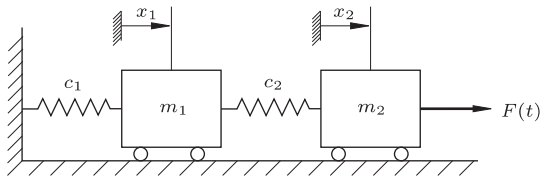


Schwingungen

Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden, Kontinuumschwingungen

Beispiel: ungedämpftes System mit zwei Freiheitsgraden



Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = F(t)$$

Schwingungen mit zwei Freiheitsgraden

Bewegungsgleichungen:

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = F(t)$$

1. System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen
2. inhomogen für $F(t) \neq 0$
3. n Differentialgleichungen bei n Freiheitsgraden, $2n$ Anfangsbedingungen benötigt
4. Dämpfungskräfte oder gyroskopische Kräfte \rightarrow zusätzliche Terme in \dot{x}_i
5. Differentialgleichungen i. Allg. gekoppelt, abhängig von der Wahl der Freiheitsgrade!

Freie (ungedämpfte) Schwingungen

$$m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) = 0$$

lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Ansatz:

$$x_k(t) = C_k \exp(i\omega t)$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen:

$$(c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) C_1 - c_2 C_2 = 0$$

$$-c_2 C_1 + (c_2 - m_2 \omega^2) C_2 = 0$$

notwendige Bedingung für nichttriviale Lösungen:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

charakteristische Gleichung:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2) \omega^2 + c_1 c_2 = 0$$

Freie (ungedämpfte) Schwingungen

charakteristische Gleichung:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2) \omega^2 + c_1 c_2 = 0$$

mit $\omega_{01} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}}$, $\omega_{02} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$, $\mu = \frac{m_2}{m_1}$:

$$\omega^4 - (\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2) \omega^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0$$

Lösungen:

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2)^2}{4} - \omega_{01}^2 \omega_{02}^2}$$

ω_1^2, ω_2^2 positiv \rightarrow **Eigenkreisfrequenzen** ω_1 und ω_2 reellwertig

Freie (ungedämpfte) Schwingungen

lineares Gleichungssystem für C_{1i} , C_{2i} , $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 - m_1\omega_i^2) C_{1i} - c_2 C_{2i} &= 0 \\ -c_2 C_{1i} + (c_2 - m_2\omega_i^2) C_{2i} &= 0\end{aligned}$$

Amplitudenverhältnis:

$$\mu_i = \frac{C_{2i}}{C_{1i}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_i^2}{c_2}$$

vollständige Lösung der homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t \\ x_2(t) &= \mu_1(A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) + \mu_2(A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t)\end{aligned}$$

Freie (ungedämpfte) Schwingungen

vollständige Lösung der homogenen Differentialgleichungen:

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t$$

$$x_2(t) = \mu_1(A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) + \mu_2(A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t)$$

Integrationskonstanten aus Anfangsbedingungen:

$$x_1(0) = x_{10}$$

$$\dot{x}_1(0) = v_{10}$$

$$x_2(0) = x_{20}$$

$$\dot{x}_2(0) = v_{20}$$

periodische Schwingung, wenn die Eigenkreisfrequenzen **kommensurabel** sind, d.h. wenn das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ rational ist

Freie (ungedämpfte) Schwingungen, Beispiel

$$m_1 = m_2, c_1 = c_2: \mu = 1, \omega_{01} = \omega_{02}$$

$$\text{Eigenkreisfrequenzen: } \omega_{1,2}^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5})}{2} \omega_{01}^2$$

$$\text{Amplitudenverhältnisse: } \mu_{1,2} = \frac{(7 \pm \sqrt{5})}{2}$$

Anfangsbedingungen:

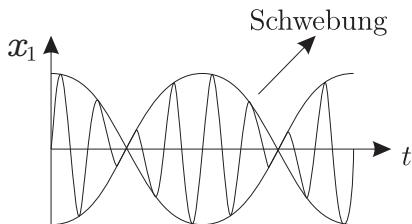
- $x_{20} = \mu_1 x_{10}, v_{20} = \mu_1 \omega_1 v_{10}$ bzw. $x_{20} = \mu_2 x_{10}, v_{20} = \mu_2 \omega_2 v_{10}$:
gleichläufige Bewegung
- $x_{20} = -\mu_1 x_{10}, v_{20} = -\mu_1 \omega_1 v_{10}$ bzw. $x_{20} = -\mu_2 x_{10}, v_{20} = -\mu_2 \omega_2 v_{10}$:
gegenläufige Bewegung

Freie (ungedämpfte) Schwingungen, Beispiel

$$x_{10} \neq 0, x_2(0) = \frac{7x_{10}}{2}, v_1(0) = v_2(0) = 0: A_1 = A_2 = 0, B_1 = B_2 = \frac{x_{10}}{2}$$

Schwebung:

$$x_1(t) = \frac{x_{10}}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$



Freie (ungedämpfte) Schwingungen, Beispiel

$$x_{10} \neq 0, x_2(0) = \frac{7x_{10}}{2}, v_1(0) = v_2(0) = 0: A_1 = A_2 = 0, B_1 = B_2 = \frac{x_{10}}{2}$$

Überlagerung von Schwebungen:

$$\begin{aligned}x_2(t) &= \frac{7}{4}x_{10}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \frac{\sqrt{5}}{4}x_{10}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\&= \frac{7}{2}x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \\&\quad - \frac{\sqrt{5}}{2}x_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\end{aligned}$$

Erzwungene Schwingungen

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (x_2 - x_1) &= F(t)\end{aligned}$$

Federfußpunkterregung: $F(t) = c_0 Y_0 \cos(\Omega t)$

Ansatz analog zur rechten Seite:

$$\begin{aligned}x_{1,p}(t) &= V_1 Y_0 \cos(\Omega t) \\x_{2,p}(t) &= V_2 Y_0 \cos(\Omega t)\end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned}(c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) V_1 - c_2 V_2 &= 0 \\-c_2 V_1 + (c_2 - m_2 \Omega^2) V_2 &= c_0\end{aligned}$$

Algebraisches Gleichungssystem:

$$(c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) V_1 - c_2 V_2 = 0$$

$$-c_2 V_1 + (c_2 - m_2 \Omega^2) V_2 = c_0$$

Lösung mit Hilfe der Cramer-Regel:

$$V_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}(\Omega)}{\Delta(\Omega)}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta(\Omega) &= m_1 m_2 \left(\Omega^4 - \frac{m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2}{m_1 m_2} \Omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \right) \\ &= m_1 m_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2) \end{aligned}$$

$$\Delta_1(\Omega) = c_2 c_0, \quad \Delta_2(\Omega) = (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) c_0$$

Erzwungene Schwingungen

Vergrößerungsfunktionen:

$$V_1 = \frac{\frac{c_2 c_0}{m_1 m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$V_2 = \frac{\frac{(c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) c_0}{m_1 m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$

1. **Resonanz** $\Delta_{1,2} \neq 0$, aber $\Delta = 0$ ($\Omega = \omega_1$ oder $\Omega = \omega_2$)
2. **Tilgung** $\Delta_1 = 0$ oder $\Delta_2 = 0$, aber $\Delta \neq 0$. Hier nur $\Delta_2 = 0$ für

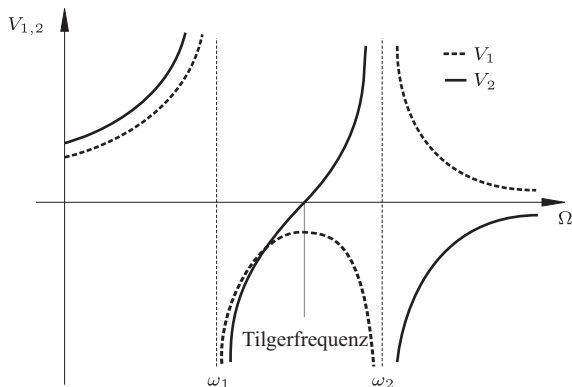
$$\Omega^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}$$

3. V_1 und V_2 in Lösungsansatz einsetzen \rightarrow Zwangsschwingungen als Funktion der Zeit
4. komplexe Frequenzgangrechnung möglich und sinnvoll, sofern lineares Differentialgleichungssystem

Verlauf der Vergrößerungsfunktionen

$$V_1 = \frac{\frac{c_2 c_0}{m_1 m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$

$$V_2 = \frac{(c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) c_0}{m_1 m_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}$$



Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen

- n Differentialgleichungen bei n Freiheitsgraden, $2n$ Anfangsbedingungen benötigt
- Differentialgleichungen i. Allg. gekoppelt, abhängig von der Wahl der Freiheitsgrade!
- freie Schwingungen:
 - ▶ Exponentialansatz $x_k(t) = C_k \exp(i\omega t)$, $k = 1, \dots, n$
 - ▶ homogenes LGS für C_k
 - ▶ nichttriviale Lösungen nur für ω Lösung des charakt. Polynoms
 - ▶ n Freiheitsgrade: bis zu n Eigenkreisfrequenzen, n Eigenvektoren
 - ▶ u.U. nichtperiodisch (bei inkommensurablen Eigenkreisfrequenzen)
- erzwungene Schwingungen:
 - ▶ Ansatz analog rechter Seite führt auf inhomogenes LGS für die Vergrößerungsfunktionen
 - ▶ n Freiheitsgrade: bis zu n Resonanzstellen
 - ▶ Schwingungstilgung möglich!