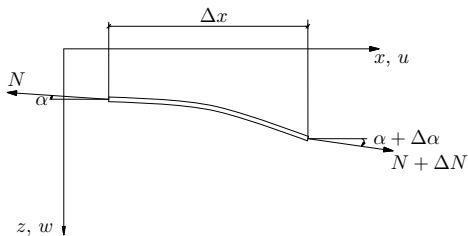
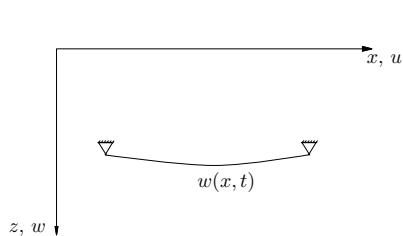


Schwingende Kontinua

- werden beschrieben durch partielle Differentialgleichungen
- Anfangsrandwertproblem zu lösen
- hier:
 - ▶ nur Kontinuumsschwinger vom Typ Wellengleichung
 - ▶ nur freie Schwingungen
- dafür zwei Standardmethoden:
 - ▶ Produktansatz und Superposition
 - ▶ Transformationsmethode

Saitenschwingungen



Massenmittelpunktsatz für den Impuls in x -Richtung:

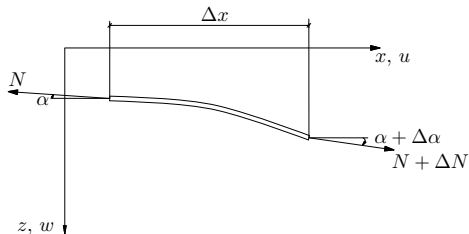
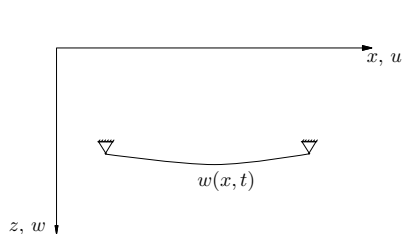
$$\Delta m u_{tt} = -N \cos \alpha + (N + \Delta N) \cos(\alpha + \Delta\alpha)$$

$$\text{mit } \Delta m = \rho A \Delta s = \mu \Delta s \text{ (s: Bogenlänge)}$$

kleine Winkel α , nur Querschwingungen ($u_{tt} \approx 0$):

$\Delta N = 0 \rightarrow$ Normalkraft konstant!

Saitenschwingungen



Massenmittelpunktsatz für den Impuls in z -Richtung:

$$\Delta m w_{tt} = -N \sin \alpha + (N + \Delta N) \sin(\alpha + \Delta\alpha)$$

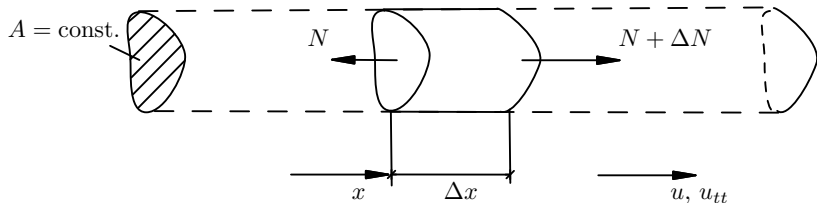
kleine Winkel α , $\Delta N = 0$:

$$\Delta m w_{tt} = N \Delta\alpha, \quad \Delta x \rightarrow 0 : \quad \mu w_{tt} = N \alpha_x$$

mit $\alpha \approx \tan \alpha = w_x$:

$$\mu w_{tt} = N w_{xx}, \quad \text{bzw.} \quad w_{tt} - \frac{N}{\mu} w_{xx} = 0$$

Stablängsschwingungen



Massenmittelpunktsatz für den Impuls in Stablängsrichtung:

$$\Delta m u_{tt} = \Delta N$$

mit $\Delta m = \rho A \Delta x = \mu \Delta x$ und $\Delta N = N_x \Delta x$

Normalkraft: $N = \sigma_{11} A = E \epsilon_{11} A = E u_x A$, $\Delta N = (E A u_x)_x \Delta x$

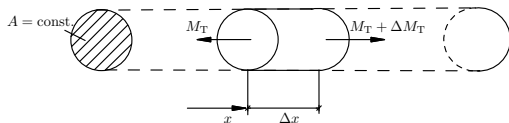
Bewegungsgleichung:

$$\rho A u_{tt} = (E A u_x)_x$$

prismatischer, homogener Stab:

$$u_{tt} - \frac{E}{\rho} u_{xx} = 0$$

Torsionsschwingungen homogener prismatischer Stäbe mit Kreisquerschnitt



Massenträgheitsmoment des Stabelements:

$$\Delta\theta = \int_{\Delta B} r^2 dm = \rho \int_A r^2 dA \Delta x = \rho I_p \Delta x$$

Massenmittelpunktsatz für den Drall:

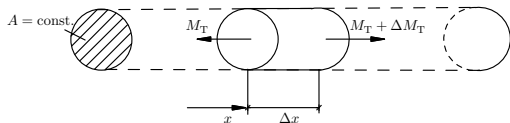
$$\Delta\theta \vartheta_{tt} = \Delta M_T, \quad \vartheta : \text{Torsionswinkel}$$

$$\text{Verdrillung: } \vartheta_x = \frac{M_T}{G I_p}$$

Zuwächse von Verdrillung und Torsionsmoment:

$$\Delta\vartheta_x = \frac{\Delta M_T}{G I_p}$$

Torsionsschwingungen homogener prismatischer Stäbe mit Kreisquerschnitt



damit Massenmittelpunktsatz für den Drall:

$$\rho I_p \Delta x \vartheta_{tt} = G I_p \Delta \vartheta_x$$

Division durch $\rho I_p \Delta x$ und $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\vartheta_{tt} - \frac{G}{\rho} \vartheta_{xx} = 0$$

Zusammenfassung

- Saitenschwingungen:

$$w_{tt} - \frac{N}{\mu} w_{xx} = 0, \quad c^2 = \frac{N}{\mu}$$

- Stablängsschwingungen:

$$u_{tt} - \frac{E}{\rho} u_{xx} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

- Torsionsschwingungen:

$$\vartheta_{tt} - \frac{G}{\rho} \vartheta_{xx} = 0, \quad c^2 = \frac{G}{\rho}$$

Wellengleichung:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Lösung der Wellengleichung für Stablängsschwingungen

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad c^2 = \frac{E}{\rho}$$

1. Anfangsbedingungen: $u(x, 0) = u_0(x)$, $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$
2. Randbedingungen:

$$u(x = 0, t) = 0 \quad \text{feste Einspannung}$$

$$EAu_x(x = \ell, t) = 0 \Rightarrow u_x(\ell, t) = 0 \quad \text{normalkraftfreies Ende}$$

Methode 1: Produktansatz und Superposition

Produktansatz:

$$u(x, t) = W(x)\theta(t)$$

einsetzen in die homogene Bewegungsgleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$:

$$\ddot{\theta}W - c^2 W''\theta = 0, \text{ also } c^2 \frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -\omega^2$$

zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$W'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0 \text{ und } \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0$$

allgemeine Lösungen:

$$W(x) = C_1 \sin \hat{\omega}x + C_2 \cos \hat{\omega}x, \hat{\omega} = \frac{\omega}{c}$$

$$\theta(t) = C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t$$

anpassen an die Randbedingungen: $W(0) = 0, W'(l) = 0$

$$C_2 = 0 \text{ und } \cos \hat{\omega}l = 0$$

Schwingmoden: Eigenkreisfrequenzen und Eigenformen

Eigenkreisfrequenzen sind Lösungen von $\cos \hat{\omega} \ell = 0$:

$$\hat{\omega}_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N}$$

also

$$\omega_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{\ell}$$

Eigenformen:

$$W_n(x) = \sin \hat{\omega}_n x = \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right) \pi \frac{x}{\ell}\right)$$

Gesamtlösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin \omega_n t + C_{2n} \cos \omega_n t) \sin \hat{\omega}_n x, \quad \hat{\omega}_n = \frac{\omega_n}{c}$$

Anpassen an die Anfangsbedingungen

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin \omega_n t + C_{2n} \cos \omega_n t) \sin \hat{\omega}_n x, \quad \hat{\omega}_n = \frac{\omega_n}{c}$$

Orthogonalitätsrelationen:

$$\int_0^{\ell} \sin \hat{\omega}_n x \sin \hat{\omega}_m x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\ell}{2}, & n = m \end{cases}$$

Damit:

$$\omega_n C_{1n} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin \hat{\omega}_n x \, dx$$
$$C_{2n} = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \hat{\omega}_n x \, dx$$

Methode 2: Transformation

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

Variablentransformation: $v = x + ct$, $w = x - ct$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} = c \frac{\partial}{\partial v} - c \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

Einsetzen in die homogene Bewegungsgleichung:

$$u_{vw} = 0$$

Deutung als Wellen

allgemeine Lösung von $u_{vw} = 0$:

$$u(x, t) = f(v) + g(w) = f(x + ct) + g(x - ct)$$

$f(v)$, $g(w)$ beliebige, zweifach stetig differenzierbare Funktionen

$f(x + ct)$: sich nach links ausbreitende Welle

$f(x, t) = f(x_1, t_1)$ für $x + ct = x_1 + ct_1$, also $x - x_1 = -c(t - t_1)$

Ausbreitungsgeschwindigkeit c aus Grenzübergang $t_1 \rightarrow t$:

