

Kreiseltheorie

- **Kreisel:** an einem Punkt fixierter starrer Körper
- Bewegungsgleichungen: Eulersche Kreiselgleichungen
- kompliziertes System, nichtlinear

Ziel: Möglichkeiten zur Untersuchung komplizierter Systeme illustrieren

- Beschreibung des Problems mit geeigneten Koordinaten
- Bestimmung von Invarianten der Bewegung mit Hilfe physikalischer Gesetzmäßigkeiten
- Stabilität der Bewegung bei kleinen Störungen
- Bestimmung der Reaktionsmomente bei Vorgabe der Bewegung

Bewegungsgleichungen

Eulersche Kreiselgleichungen, an O gebundenes körperfestes Hauptachsensystem des Massenträgheitstensors:

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) = M_1^O$$

$$\dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) = M_2^O$$

$$\dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) = M_3^O$$

Verwendung der Euler-Winkel zur Ermittlung der Drehgeschwindigkeiten

Kräftefreier Kreisel

- Kreisel ohne äußeres Moment
- Abstützung des Körpers im Massenmittelpunkt erforderlich
- Konsequenz: Drallgesetz $\dot{\mathbf{D}}^O = 0$, \mathbf{D}^O ist Invariante der Bewegung

$$\mathbf{D}^O = \theta_i^O \omega_i \tilde{\mathbf{e}}_{(i)} = \text{konstanter Vektor}$$

Fallunterscheidung bzgl. Richtung von $\boldsymbol{\omega}$:

- $\boldsymbol{\omega}$ in Richtung einer Hauptachse
- $\boldsymbol{\omega}$ in von zwei Hauptachsen aufgespannter Ebene
- allgemeiner Fall (hier nur für symmetrischen Kreisel)

ω in Richtung einer Hauptachse

- o.B.d.A. in $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Richtung: $\omega_1 = \omega_2 = 0$
- dann auch $D_1^O = D_2^O = 0$
- $D_3^O = \theta_3^O \omega_3 = \text{const.}$, daher $\omega_3 = \text{const.}$, also Invariante der Bewegung
- Konsequenz: Kreisel rotiert permanent um die $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Achse

Aber: In der Praxis verschwinden ω_1, ω_2 nicht exakt:

Stabilität der permanenten Drehung gegen kleine Störungen?

Stabilität der Drehung des kräftefreien Kreisels

Satz („Tennisschlägertheorem“)

*Permanente Drehungen eines kräftefreien Kreisels sind nur um die Achse des kleinsten **oder** größten Hauptträgheitsmoments **stabil**.*

Beweis:

Betrachte Bewegungsgleichungen

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) = 0$$

$$\dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) = 0$$

mit kleinen Störungen ω_1 und ω_2 und $\omega_3 = \text{const.}$

Wie entwickeln sich ω_1 und ω_2 mit der Zeit? O.B.d.A. wird ω_1 untersucht.

Stabilität der Drehung des kräftefreien Kreisels

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) = 0$$

$$\dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) = 0$$

$$\dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) = 0$$

Leite erste Gleichung nach der Zeit ab:

$$\ddot{\omega}_1 \theta_1^O = \dot{\omega}_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O)$$

ersetze $\dot{\omega}_2$ durch zweite Gleichung:

$$\ddot{\omega}_1 \theta_1^O = \frac{(\theta_3^O - \theta_1^O) (\theta_2^O - \theta_3^O)}{\theta_2^O} \omega_3^2 \omega_1$$

Ergebnis:

$$\ddot{\omega}_1 + \frac{(\theta_3^O - \theta_1^O) (\theta_3^O - \theta_2^O)}{\theta_1^O \theta_2^O} \omega_3^2 \omega_1 = 0$$

Stabilität der Drehung des kräftefreien Kreisels

$$\ddot{\omega}_1 + \frac{(\theta_3^O - \theta_1^O)(\theta_3^O - \theta_2^O)}{\theta_1^O \theta_2^O} \omega_3^2 \omega_1 = 0$$

Vorzeichen des zweiten Terms:

- positiv \rightarrow freie ungedämpfte Schwingungen \rightarrow kleine Störungen bleiben klein \rightarrow Stabilität
- negativ \rightarrow Exponentialansatz führt auf pos. Faktor im Exponenten \rightarrow Störung wächst exponentiell!

Drehgeschwindigkeit in von zwei Hauptachsen aufgespannter Ebene

- O.B.d.A. $\omega_2 = 0$, aber $\omega_1 \neq 0$ und $\omega_3 \neq 0$
- ω_1 und ω_3 konstant
- Drallvektor:

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} = \theta_1^O \omega_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \theta_3^O \omega_3 \tilde{\mathbf{e}}_3 = \text{const.}$$

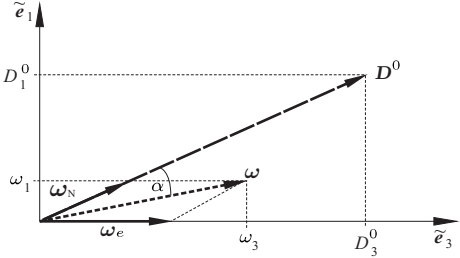
- Für $\theta_1^O \neq \theta_3^O$: $\mathbf{D}^O \nparallel \boldsymbol{\omega}$
- weitere Invariante: kinetische Energie $\rightarrow \mathbf{D}^O \cdot \boldsymbol{\omega}$ konstant

Ergebnis:

1. Projektion der Drehgeschwindigkeit auf den Drall ist konstant.
2. Winkel zwischen Drehgeschwindigkeitsvektor und Drallvektor ist konstant.

Nutationsbewegung des kräftefreien Kreisels

Drehgeschwindigkeitsvektor bewegt sich auf einem Kegel um die raumfeste Richtung des Dralls



Allgemeiner Fall, symmetrischer Kreisel

- O.B.d.A. Symmetrieachse $\tilde{\mathbf{e}}_3$ (**Figurenachse**), $\theta_1^O = \theta_2^O = A$, $\theta_3^O = B$

$$A\dot{\omega}_1 - (B - A)\omega_2\omega_3 = 0$$

$$A\dot{\omega}_2 - (A - B)\omega_3\omega_1 = 0$$

$$B\dot{\omega}_3 = 0$$

- ω_3 ist Invariante der Bewegung
- Die Dgln. für ω_1 und ω_2 sind linear:

$$A\ddot{\omega}_1 + \frac{(A - B)^2}{A}\omega_3^2\omega_1 = 0$$

$$A\ddot{\omega}_2 + \frac{(A - B)^2}{A}\omega_3^2\omega_2 = 0$$

Allgemeiner Fall, symmetrischer Kreisler

$$A\ddot{\omega}_1 + \frac{(A-B)^2}{A}\omega_3^2\omega_1 = 0$$

$$A\ddot{\omega}_2 + \frac{(A-B)^2}{A}\omega_3^2\omega_2 = 0$$

beschreiben freie ungedämpfte Schwingungen, Eigenkreisfrequenz:

$$\omega = \frac{(A-B)\omega_3}{A}$$

da

$$\dot{\omega}_2 = \frac{B-A}{A}\omega_3\omega_1 = -\omega\omega_1$$

lauten die Lösungen:

$$\omega_1 = C \sin(\omega t + \varepsilon) \text{ und } \omega_2 = C \cos(\omega t + \varepsilon)$$

Integrationskonstanten C und ε aus Anfangsbedingungen

$$\omega_{10} = \omega_1(t=0) = C \sin \varepsilon$$

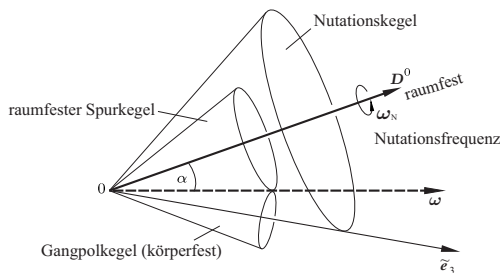
$$\omega_{20} = \omega_2(t=0) = C \cos \varepsilon$$

Betrag des Drehgeschwindigkeitsvektors konstant!

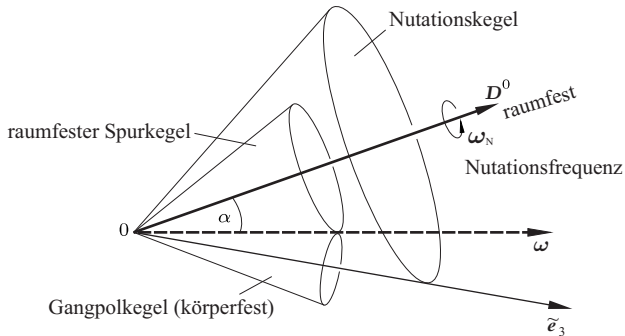
Spurkegel, Gangpolkegel, Nutationskegel

- Energieerhaltung: Projektion des Drehgeschwindigkeitsvektors auf den Drallvektor konstant
- Winkel zwischen Drehgeschwindigkeitsvektor und Drallvektor konstant
- Komponente des Drehgeschwindigkeitsvektors in Richtung der Figurenachse konstant
- daher: Winkel zwischen Figurenachse und Drallvektor ist konstant

Ergebnis: Lage von Figurenachse ($\tilde{\mathbf{e}}_3$), Drehachse ($\boldsymbol{\omega}$) und Drallachse \mathbf{e}_3 zueinander unveränderlich.



Deutung der Euler-Winkel

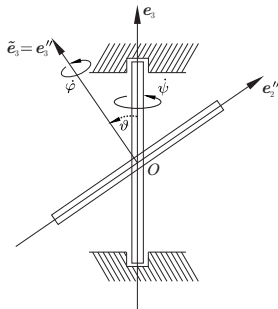


- ϑ : Winkel zwischen Figurenachse und Drallachse
- ψ : Drehung der Figurenachse um die Drallachse
- φ : Drehung des Kreisels um die Figurenachse

Nicht kräftefreier Kreisel

- Es existiert keine allgemeine Lösung
- hier: Kreiselgleichungen zur Ermittlung der auftretenden Momente

Beispiel:



1. Drehung (Zwangsrotation, Präzessionsrotation) mit $\dot{\psi} = \text{const.}$ um die **raumfeste** e_3 -Achse
2. Drehung (Eigendrehung) mit $\dot{\varphi} = \text{const.}$ um die körperfeste \tilde{e}_3 -Hauptachse (Figurenachse) des symmetrischen Kreisels

Nicht kräftefreier Kreisel

Berechnung der Lagerreaktionen im O , \mathbf{e}_1'' , \mathbf{e}_2'' , $\mathbf{e}_3'' = \tilde{\mathbf{e}}_3$ -Bezugssystem:

- keine Berücksichtigung der Eigendrehung
- Massenträgheitstensor auch im O , \mathbf{e}_1'' , \mathbf{e}_2'' , \mathbf{e}_3'' -Bezugssystem konstant
- Drehgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_e$$

mit

$$\boldsymbol{\omega}_z = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 = \dot{\psi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_2'' + \cos \vartheta \mathbf{e}_3'')$$

und

$$\boldsymbol{\omega}_e = \dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_3 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3''$$

somit:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Nicht kräftefreier Kreisel

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

Drall:

$$\mathbf{D}^O = \boldsymbol{\Theta}^O \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\Theta}^O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

Drallgesetz:

$$\frac{d\mathbf{D}^O}{dt} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O = \mathbf{M}^O$$

Kreiselmoment (vom Kreisel auf die Umgebung ausgeübt):

$$\mathbf{M}_T := -\mathbf{M}^O = -\boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O = - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A\dot{\psi} \sin \vartheta \\ B(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix}$$

Kreiselmoment

$$\mathbf{M}_T = -\boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O = - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A\dot{\psi} \sin \vartheta \\ B(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix}$$

besitzt nur eine Komponente

$$\mathbf{M}_T = -(B\dot{\varphi} + (B - A)\dot{\psi} \cos \vartheta) \dot{\psi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1''$$

Spezialfälle:

1. Schleudermoment: Eigendrehung $\dot{\varphi} \equiv 0$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_T = -\frac{1}{2}(B - A)\dot{\psi}^2 \sin 2\vartheta \mathbf{e}_1''$$

2. schneller Kreisel: Eigendrehung $\dot{\varphi} \gg$ Zwangsdrehung $\dot{\psi}$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_T = -B\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1''$$

wenn Komponente in \mathbf{e}_1'' -Richtung negativ: Drehung der Figurenachse in Richtung der raumfesten Achse der Zwangsdrehung