

Vektoralgebra in Orthonormalbasen des \mathbb{R}^3

Darstellung von Vektoren

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^n \overbrace{a_i \mathbf{e}_i}^{\substack{\text{Komponente} \\ \text{Koordinate Basisvektor}}} \stackrel{\text{Summations-}}{=} \stackrel{\text{konvention}}{=} a_i \mathbf{e}_i$$

Produktoperatoren

Produkt	Deutung	Berechnung	Ergebnis, Spezialfälle	Kommutativität
Skalarprodukt \cdot	Projektion von \mathbf{a} in Richtung von \mathbf{b}	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \ \mathbf{a}\ \ \mathbf{b}\ \cos \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Skalar, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \ \mathbf{a}\ ^2$	ja, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
Vektorprodukt \times	<ul style="list-style-type: none"> ▶ senkrecht auf der durch \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Ebene ▶ $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ bilden Rechtssystem 	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$	Vektor, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$	antikommutativ, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
dyadisches Produkt \otimes	<ul style="list-style-type: none"> ▶ lineare Abbildung, $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ ▶ Ergebnis der linearen Abbildung: Vektor parallel zu \mathbf{a} ▶ Länge: Projektion von \mathbf{b} in Richtung \mathbf{c} 	$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix}$	lineare Abbildung zwischen Vektoren	nein, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \neq \mathbf{b} \otimes \mathbf{a}$

Transformationen von Vektoren

- ▶ Transformation der Basisvektoren: $\tilde{\mathbf{e}}_i = T_{ij} \mathbf{e}_j$, mit Transformationsmatrix $\mathbf{T} = [T_{ij}]$, $T_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$ (Richtungscosinus)
- ▶ Transformation der Vektorkoordinaten: $\mathbf{a} = a_i \mathbf{e}_i = \tilde{a}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$, $\tilde{a}_i = T_{ij} a_j$ und $a_i = T_{ij}^T \tilde{a}_j$ (\mathbf{T} ist orthogonale Matrix, $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$)
- ▶ Elementardrehmatrizen

Drehung mit α um die \mathbf{e}_1 -Achse:

$$\mathbf{T}_1(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

Drehung mit β um die \mathbf{e}_2 -Achse:

$$\mathbf{T}_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Drehung mit γ um die \mathbf{e}_3 -Achse:

$$\mathbf{T}_3(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ▶ Kardan-Winkel: $\mathbf{T}^K = \mathbf{T}_3(\gamma) \mathbf{T}_2(\beta) \mathbf{T}_1(\alpha)$, Euler-Winkel: $\mathbf{T}^E = \mathbf{T}_3(\varphi) \mathbf{T}_1(\vartheta) \mathbf{T}_3(\psi)$

Vektoranalysis in Orthonormalbasen des \mathbb{R}^3

Euler-Poissonsche Differentiationsformel

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\lambda} = \omega(\lambda) \times \mathbf{a}(\lambda), \text{ falls } \|\mathbf{a}(\lambda)\| = \text{const.} > 0 \text{ f\u00fcr alle } \lambda \text{ (Diese Bedingung wird bspw. von stets auf 1 normierten Basisvektoren erf\u00fcllt)}$$

Differentialoperatoren

Divergenz:

$$\text{div } \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \rightarrow \text{Skalar}$$

Gradient:

$$\text{grad } \mathbf{a} = \left[\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Tensor 2. Stufe}$$

Tensoralgebra in Orthonormalbasen des \mathbb{R}^3

Identit\u00e4tstensor

$$\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}, \mathbf{E} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Kronecker-Delta: } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Transposition

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T, \mathbf{A}^T = A_{ji} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

symmetrischer Tensor

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

schiefsymmetrischer Tensor

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Zerlegung eines Tensors 2. Stufe in seinen symmetrischen und schiefsymmetrischen Anteil

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\text{symm. Anteil}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\text{schiefsymm. Anteil}}$$

(Doppel-)skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} B_{ij} \stackrel{\text{Summationskonvention}}{=} A_{ij} B_{ij} \rightarrow \text{Skalar, kommutativ: } \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \cdot \mathbf{A}$$

Tensoranalysis in Orthonormalbasen des \mathbb{R}^3

Divergenz eines Tensor 2. Stufe

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{23}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix} \rightarrow \text{Vektor}$$

Produktregel

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) = \operatorname{div}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{A} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{a} \rightarrow \text{Skalar}$$

Satz von Gauß

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dV = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Variationsrechnung

Erste Variation des Funktionals $f(x(t))$ an $x(t)$ in Richtung $v(t)$

$$\delta_{v(t)} f(x(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial h} f(x(t) + hv(t)) \right|_{h=0}$$

Identitätsfunktional $I_{t_0}(x(t)) = x(t_0)$

$$\delta_{v(t)} I_{t_0}(x(t)) = v(t_0) \rightarrow \text{kurz: } \delta x = v$$

Kettenregel

$$\delta_{v(t)} f(\mathbf{x}(t)) = \left. \frac{\partial}{\partial h} f(\mathbf{x}(t) + hv(t)) \right|_{h=0} = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}(t)} v_i(t) \rightarrow \text{kurz: } \delta f(\mathbf{x}(t)) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}(t)} \delta x_i(t)$$

→ Koeffizientenvergleich möglich, wenn $x_i(t)$ unabhängige Koordinaten sind

Massenpunktkinematik

Kinematische Grundgrößen eines Massenpunkts

Bewegung: $\mathbf{r}(t)$

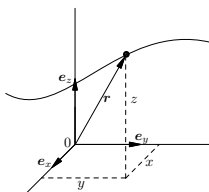
Geschwindigkeit: $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$

Beschleunigung: $\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$

Kinematische Grundgrößen in verschiedenen Bezugssystemen

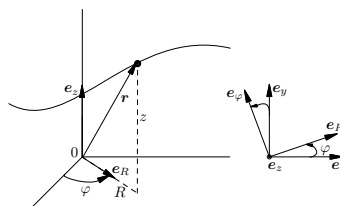
kartesische Koordinaten:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v} &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$



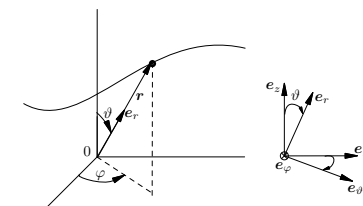
Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= R \mathbf{e}_R + z \mathbf{e}_z \\ \mathbf{v} &= \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z \\ \mathbf{a} &= (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi \\ &\quad + \ddot{z} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$



Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \\ \mathbf{v} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta) \mathbf{e}_\vartheta \\ &\quad + (2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \vartheta + r\ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2r\dot{\varphi}\dot{\vartheta} \cos \vartheta) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$



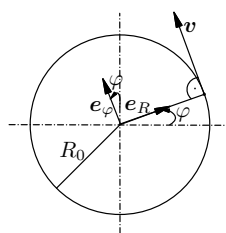
Spezialfälle der Zylinderkoordinaten in der Ebene ($z = 0$)

Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= R \mathbf{e}_R \\ \mathbf{v} &= \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{a} &= (\ddot{R} - R \dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

Kreisbewegung ($R = R_0 = \text{const.}$):

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= R_0 \mathbf{e}_R \\ \mathbf{v} &= R_0 \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{a} &= -R_0 \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

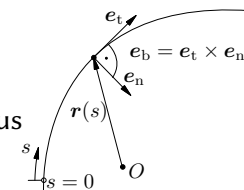


Begleitende Basis der Bewegungsbahn

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, $s(t)$: Bogenlänge

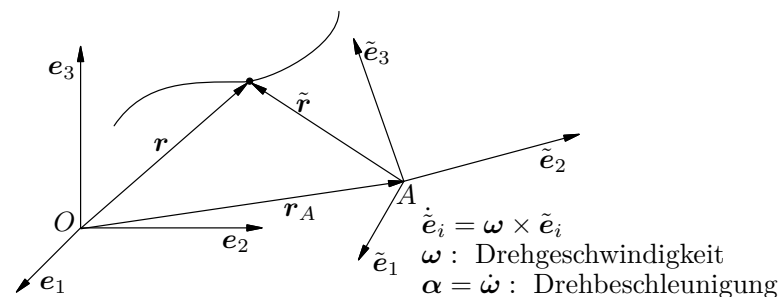
$\mathbf{v} = v_t \mathbf{e}_t$

$\mathbf{a} = \dot{s} \mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho_K} \mathbf{e}_n$, ρ_K : Krümmungsradius



Bewegtes Bezugssystem

Grundgröße	Führungsterm, transl.	Führungsterm, rot.	Coriolisterm	Relativterm
$\mathbf{r} =$	\mathbf{r}_A			$+\tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$, $\tilde{\mathbf{r}} := \tilde{x}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$
$\mathbf{v} =$	\mathbf{v}_A	$+\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}$		$+\dot{\tilde{x}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$, $\mathbf{v}_{\text{rel}} := \dot{\tilde{x}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$
$\mathbf{a} =$	\mathbf{a}_A	$+\boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}})$	$+2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$	$+\ddot{\tilde{x}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$, $\mathbf{a}_{\text{rel}} := \ddot{\tilde{x}}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$



Kinematik der Kontinua

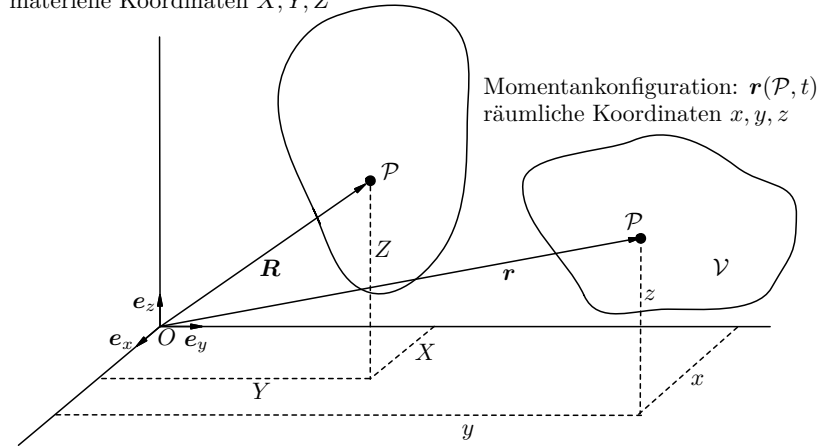
Kinematische Grundgrößen eines Körpers

Bewegung: $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$

Geschwindigkeitsfeld: $\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial \mathbf{r}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}$

Beschleunigungsfeld: $\mathbf{a}(\mathbf{R}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}$

Bezugskonfiguration: $\mathbf{R} = \mathbf{r}(\mathcal{P}, t_0)$
materielle Koordinaten X, Y, Z



Starrkörperkinematik

Grundgröße	Führungsterm, transl.	Führungsterm, rot.	Relativterm
$\mathbf{r} =$	\mathbf{r}_A		$+\mathbf{R}$
$\mathbf{v} =$	\mathbf{v}_A	$+\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$	
$\mathbf{a} =$	\mathbf{a}_A	$+\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$	

Kinemate: $(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$

Kinematensversetzung, Bezugspunkt $A \rightarrow B$: $(\mathbf{v}_B, B, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)$

spezielle Kinematen:

- ▶ reine Translation: $(\mathbf{v}_A, A, \mathbf{0})$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_A$
- ▶ reine Rotation: $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$

Momentanpol: Punkt M , für den momentan (zum Zeitpunkt t) $\mathbf{v}_M = \mathbf{0} \rightarrow$ momentane Drehbewegung um M

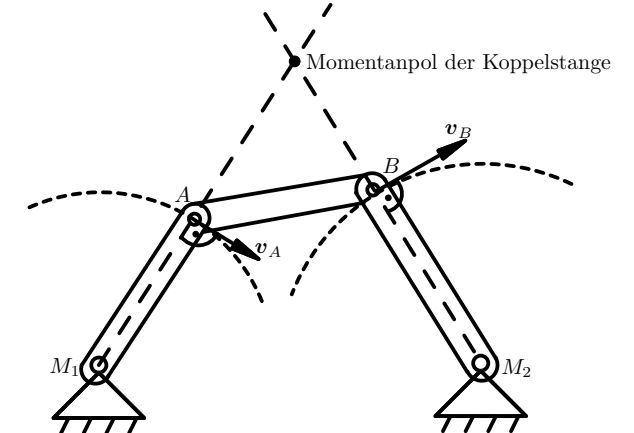
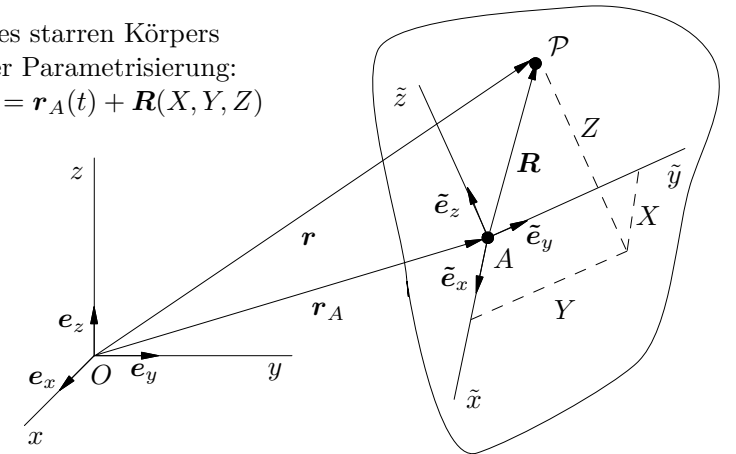
Ermittlung:

- ▶ \mathbf{v}_A , $\boldsymbol{\omega}$ bekannt: aus $\mathbf{0} = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{AM} \rightarrow \mathbf{R}_{AM} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\|\boldsymbol{\omega}\|^2}$
- ▶ \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B bekannt, $\mathbf{v}_A \nparallel \mathbf{v}_B$: Schnittpunkt der Geraden senkrecht zu den Geschwindigkeitsvektoren

Spurkurve (Rastpolbahn): Bahn des Momentanpols im raumfesten Bezugssystem

Rollkurve (Gangpolbahn): Bahn des Momentanpols im körperfesten Bezugssystem

Bewegung des starren Körpers
in materieller Parametrisierung:
 $\mathbf{r}(X, Y, Z, t) = \mathbf{r}_A(t) + \mathbf{R}(X, Y, Z)$



Axiome und Sätze der Dynamik

Massenkinematische Größen

- ▶ Impuls: $\mathbf{I} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, d m$
- ▶ Drall bzgl. Q : $\mathbf{D}^Q := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q) \, d m$, Drall für Bezugspunkt O des raumfesten Bezugssystems: $\mathbf{D}^O := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, d m$

Dynamische Größen

- ▶ resultierende Kraft: $\mathbf{F} = \int_S \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \mathbf{f}_V \, d V$
- ▶ resultierendes Moment bzgl. Q : $\mathbf{M}^Q = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_S \, d S + \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_V \, d V$

Dyname: $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$, Dynamenversetzung, Bezugspunkt $A \rightarrow B$: $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$
 spezielle Dynamen:

- ▶ Einzelkraft: $(\mathbf{F}, A, \mathbf{0})$
- ▶ freies Moment: $(\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A)$

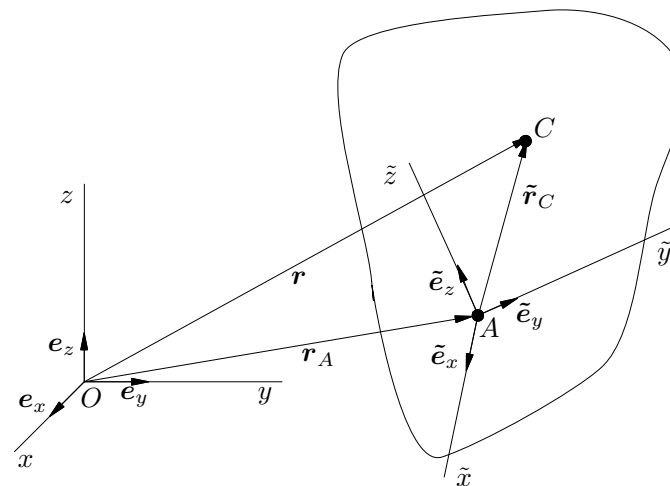
Eingeprägte Kräfte	Reaktionskräfte
Gewichtskraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$	Normalkraft N
Reibkraft $R = \mu N$	Haftkraft H
Federkraft $F_F = c\Delta\ell$	Lagerreaktionskräfte
Dämpferkraft $F_D = d(\Delta\ell)$	

Axiome der Dynamik

- ▶ Impulsgesetz: $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$, \mathbf{F} umfasst alle eingeprägten Kräfte und alle Reaktionskräfte
- ▶ Drallgesetz: $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$, O : raumfester Bezugspunkt

Sätze der Dynamik

- ▶ Massenmittelpunktsatz für den Impuls: $m\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$
 - ▶ Massenmittelpunktsatz für den Drall: $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$
- } Formulierung nach d'Alembert: $\mathbf{0} = \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_C$, $\mathbf{0} = \mathbf{M}^C - \dot{\mathbf{D}}^C \rightarrow$ Gleichgewichtsbedingungen!
- ▶ Massenmittelpunktsatz für den Impuls im bewegten Bezugssystem: $m(\ddot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{C,rel} + \mathbf{a}_{C,rel}) = \mathbf{F}$
 - ▶ Drallsatz für bewegten Bezugspunkt: $\tilde{\mathbf{r}}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$



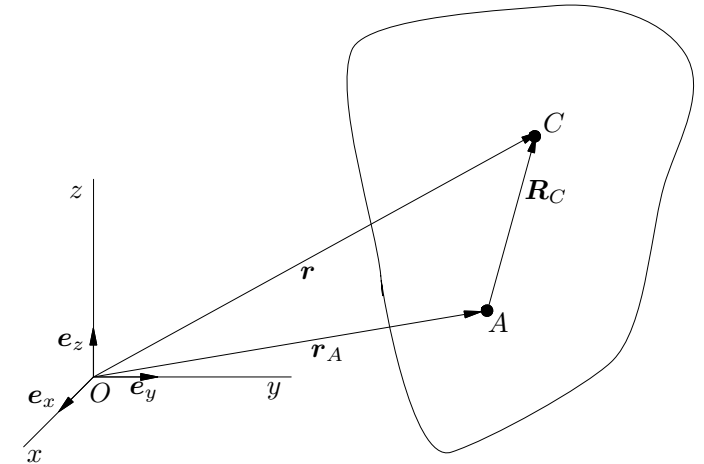
Dynamik des starren Körpers

Drallsatz für den starren Körper

- ▶ Drall für den starren Körper: $\mathbf{D}^A = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Theta}^A$: Massenträgheitstensor bzgl. A
- ▶ Drallsatz bzgl. eines körperfesten Bezugspunkts A : $\mathbf{R}_C \times \dot{\mathbf{r}}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$ mit $\dot{\mathbf{D}}^A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \times \boldsymbol{\omega}$
- ▶ $\mathbf{R}_C \times \dot{\mathbf{r}}_A m = \mathbf{0}$, wenn $A = C$, $\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{R}_C \parallel \dot{\mathbf{r}}_A$

Massenträgheitstensor

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \tilde{\theta}_{ij}^A \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j, \quad \left[\tilde{\theta}_{ij}^A \right] = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_{11}^A & \tilde{\theta}_{12}^A & \tilde{\theta}_{13}^A \\ \tilde{\theta}_{21}^A & \tilde{\theta}_{22}^A & \tilde{\theta}_{23}^A \\ \tilde{\theta}_{31}^A & \tilde{\theta}_{32}^A & \tilde{\theta}_{33}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2) dm & -\int_{\mathcal{B}} X_1 X_2 dm & -\int_{\mathcal{B}} X_1 X_3 dm \\ -\int_{\mathcal{B}} X_2 X_1 dm & \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2) dm & -\int_{\mathcal{B}} X_2 X_3 dm \\ -\int_{\mathcal{B}} X_3 X_1 dm & -\int_{\mathcal{B}} X_3 X_2 dm & \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_2^2) dm \end{bmatrix}$$



- ▶ axiale Massenträgheitsmomente: $\tilde{\theta}_{11}^A, \tilde{\theta}_{22}^A, \tilde{\theta}_{33}^A$
- ▶ Deviationsmomente: $\tilde{\theta}_{12}^A = \tilde{\theta}_{21}^A, \tilde{\theta}_{13}^A = \tilde{\theta}_{31}^A, \tilde{\theta}_{23}^A = \tilde{\theta}_{32}^A$
- ▶ Hauptträgheitsmomente: $\tilde{\theta}_{H_1}^A = \tilde{\theta}_{11}^A, \tilde{\theta}_{H_2}^A = \tilde{\theta}_{22}^A, \tilde{\theta}_{H_3}^A = \tilde{\theta}_{33}^A$, wenn $\tilde{\theta}_{12}^A = \tilde{\theta}_{13}^A = \tilde{\theta}_{23}^A = 0$, $\tilde{\mathbf{e}}_{H_1}, \tilde{\mathbf{e}}_{H_2}, \tilde{\mathbf{e}}_{H_3}$: Haupttrichtungsvektoren (Hauptachsen)
- ▶ Koordinatentransformationen:
 - Translation – Wechsel des Bezugspunkts: Satz von Steiner

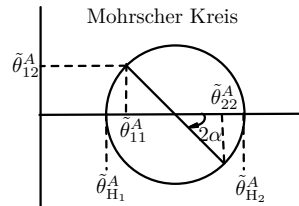
$$\boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^C + (\mathbf{E} (\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{R}_C) - \mathbf{R}_C \otimes \mathbf{R}_C) m, \text{ z.B. } \tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{33}^C + (R_{C1}^2 + R_{C2}^2) m$$

- Rotation – Drehung um eine Hauptachse (hier um $\tilde{\mathbf{e}}_{H_3}$ mit Winkel α)

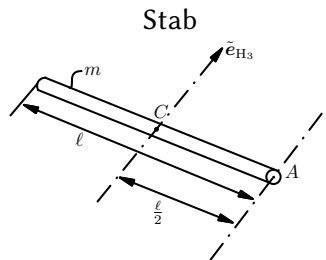
$$\tilde{\theta}_{11}^A = \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) - \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha)$$

$$\tilde{\theta}_{22}^A = \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) + \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha)$$

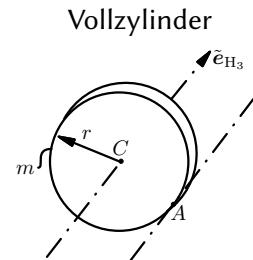
$$\tilde{\theta}_{12}^A = \tilde{\theta}_{21}^A = \frac{1}{2} (\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \sin(2\alpha)$$



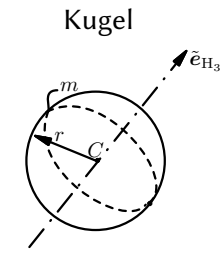
Hauptträgheitsmomente spezieller Körper



$$\tilde{\theta}_{H_3}^C = m \frac{l^2}{12}, \quad \tilde{\theta}_{H_3}^A = m \frac{l^2}{3}$$



$$\tilde{\theta}_{H_3}^C = \frac{mr^2}{2}, \quad \tilde{\theta}_{H_3}^A = \frac{3mr^2}{2}$$



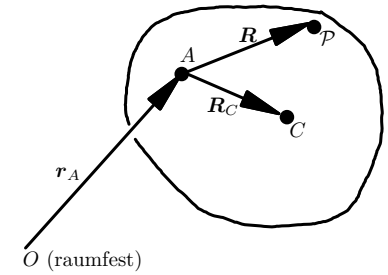
$$\tilde{\theta}_{H_3}^C = \frac{2}{5} mr^2$$

Kinetische Energie, Leistung, Arbeit

kinetische Energie

Definition: $E := \frac{1}{2} \int_B \mathbf{v}^2 \, d m$

- ▶ starrer Körper: $E = \underbrace{\frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_A\|^2}_{\text{translatorischer Anteil}} + \underbrace{m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C)}_{\text{Wechselenergie}} + \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}}_{\text{rotatorischer Anteil}}$, für $A = C$: $E = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_C\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega}$
- ▶ starrer Körper, ebene Bewegung, Drehung um $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Richtung: $E = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_C\|^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_{33}^C \tilde{\omega}_3^2$
- ▶ masseloses Verbindungselement: $E = 0$



äußere Leistung, äußere Arbeit

Definition: $P_a := \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, d V$

- ▶ masseloses Verbindungselement, Einzelkraft \mathbf{F}_E : $P_a = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_E$
- ▶ masseloses Verbindungselement, freies Moment \mathbf{M} : $P_a = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}$
- ▶ starrer Körper, Dynamik ($\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A$): $P_a = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^A$

Innere Leistung, innere Arbeit

	Definition	masseloses Element	starrer Körper	deformierbares Kontinuum
innere Leistung	$P_i := P_a - \dot{E}$	$P_i = P_a$	$P_i = 0$	$P_i = \int_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \, d V$, $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T)$
innere Arbeit	$W_i := \int_{t_A}^{t_E} P_i \, d t = W_a - (E(t_E) - E(t_A))$	$W_i = W_a$	$W_i = 0$	$W_i = \int_V \int_r \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \, d \epsilon \, d V$, $\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T)$

Potentielle Energie

$V = V_i + V_a$, inneres Potential V_i mit $\dot{V}_i = P_i$, äußeres Potential V_a mit $\dot{V}_a = -P_a$

	Kraft/Moment	Leistung	Potential	Bemerkung
Gewichtskraft	$\mathbf{G} = -m g \mathbf{e}_z$	$P_{aG} = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{G}$	$V_{aG} = m g z + C$	Konstante C durch Wahl des Nullniveaus bestimmt
Linearfeder	$\mathbf{F} = c \Delta x \mathbf{e}_x$	$P_{iF} = c \Delta x (\Delta \dot{x})$	$V_{iF} = \frac{1}{2} c (\Delta x)^2$	Feder für $\Delta x = 0$ entspannt
Drehfeder	$\mathbf{M} = c_d \Delta \varphi \mathbf{e}_z$	$P_{id} = c_d \Delta \varphi (\Delta \dot{\varphi})$	$V_{id} = \frac{1}{2} c_d (\Delta \varphi)^2$	Feder für $\Delta \varphi = 0$ entspannt, \mathbf{e}_z Drehachse der Feder

Allgemeiner Leistungssatz, allgemeiner Arbeitssatz, Energiesatz

allgemeiner Leistungssatz: Die innere Leistung ist additiv, $P_i = \sum_{k=1}^n P_{i_k}$

allgemeiner Arbeitssatz: Die innere Arbeit ist additiv, $W_i = \sum_{k=1}^n W_{i_k}$

Energiesatz für konservative Systeme: Bestimmung zeitfreier skalarer Lösungen vom Typ $\dot{x} = f(x)$

- ▶ in differentieller Form: $\dot{V} + \dot{E} = 0$
- ▶ in integraler Form: $V + E = \text{const.}$

Virtuelle Geschwindigkeiten und Verschiebungen

Virtuelle Geschwindigkeiten, virtuelle Verschiebungen

Energiesatz liefert nur eine skalare Bestimmungsgleichung, oft müssen aber mehrere Koordinaten der Bewegung ermittelt werden

→ Projektion der Bewegungsgleichungen auf virtuelle Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}$ bzw. Verschiebungen $\tilde{\mathbf{r}}$

- ▶ virtuelles Geschwindigkeitsfeld: beliebiges, einmal differenzierbares Feld, hilfreich: Verträglichkeit mit (inneren und äußeren) Bindungen
- ▶ virtuelles Verschiebungsfeld: beliebiges, zweimal differenzierbares Feld, hilfreich: Verträglichkeit mit (inneren und äußeren) Bindungen

Virtuelle Leistungs- und Arbeitsbilanzen

	Massenbeschleunigungen	äußere	innere
virtuelle Leistung	$\tilde{P}_{Mb} = \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m$	$\tilde{P}_a = \int_S \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_V \, d V$	$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb}$
virtuelle Arbeit	$\tilde{W}_{Mb} = \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m$	$\tilde{W}_a = \int_S \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_V \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_V \, d V$	$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a - \tilde{W}_{Mb}$

für diskrete Systeme, ebene Bewegung (oder raumfeste Drehachse):

- ▶ Methode der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\underbrace{\tilde{P}_i}_{\text{virtuelle innere Leistung aller Verbindungselemente}} = \underbrace{\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \mathbf{M}_k}_{\text{virtuelle äußere Leistung von } M \text{ Einzelkräften und } n \text{ freien Momenten}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right)}_{\text{virtuelle Leistung der Massenbeschleunigung von } n \text{ starren Körpern}}$$

- ▶ Methode der virtuellen Verschiebungen:

$$\underbrace{\tilde{W}_i}_{\text{virtuelle innere Arbeit aller Verbindungselemente}} = \underbrace{\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \mathbf{M}_k}_{\text{virtuelle äußere Arbeit von } M \text{ Einzelkräften und } n \text{ freien Momenten}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right)}_{\text{virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigung von } n \text{ starren Körpern}}$$

- ▶ virtuelle innere Leistung eines Verbindungselementes:

- repräsentiert durch eine Einzelkraft \mathbf{F}_E : $\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_E$, $\Delta \tilde{\mathbf{v}}$: Differenz der virtuellen Geschwindigkeiten am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes
- repräsentiert durch ein freies Moment \mathbf{M} : $\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{M}$, $\Delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}$: Differenz der virtuellen Drehgeschwindigkeiten am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes

- ▶ virtuelle innere Arbeit eines Verbindungselementes:

- repräsentiert durch eine Einzelkraft \mathbf{F}_E : $\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_E$, $\Delta \tilde{\mathbf{r}}$: Differenz der virtuellen Verschiebungen am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes
- repräsentiert durch ein freies Moment \mathbf{M} : $\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M}$, $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$: Differenz der virtuellen Drehungen am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes

Lagrange-Gleichungen 2. Art

Lagrange-Gleichungen 2. Art

liefern die Bewegungsgleichungen für holonome Systeme in generalisierten Koordinaten q_i , $i = 1, \dots, f$, f : Anzahl Freiheitsgrade

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, f, \quad \text{mit } L := \underbrace{E}_{\text{kinetische Energie}} - \underbrace{V}_{\text{potentielle Energie}}$$

Ermittlung der generalisierten Kräfte Q_i aus Variation der äußeren und inneren Arbeit:

$$\delta W_a - \delta W_i = Q_i \delta q_i = (Q_i^p + Q_i^d) \delta q_i$$

- ▶ Q_i^p : konservative generalisierte Kräfte
- ▶ Q_i^d : dissipative generalisierte Kräfte

Äußere Arbeit:

- ▶ einer Einzelkraft \mathbf{F}_E : $\delta W_a = \mathbf{F}_E \cdot \delta \mathbf{r}_F$, $\delta \mathbf{r}_F = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q_i} \delta q_i \rightarrow Q_i = \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q_i}$
- ▶ eines freien Moments \mathbf{M} : $\delta W_a = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}$, $\delta \boldsymbol{\varphi} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial q_i} \delta q_i \rightarrow Q_i = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial q_i}$

Innere Arbeit, masseloses Verbindungselement:

- ▶ Wirkung als Einzelkraft \mathbf{F}_E : $\delta W_i = \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \rightarrow Q_i = \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial q_i}$
- ▶ Wirkung als freies Moment \mathbf{M} : $\delta W_i = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varphi}}{\partial q_i} \delta q_i \rightarrow Q_i = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\varphi}}{\partial q_i}$

$\Delta \mathbf{r}$: Differenz der Verschiebung am End- und Anfangspunkt des Verbindungselements

$\Delta \boldsymbol{\varphi}$: Differenz der Verdrehung am End- und Anfangspunkt des Verbindungselements

Stoßvorgänge

Massenmittelpunktsätze und Drallgesetz in integraler Form

- ▶ Massenmittelpunktsatz für den Impuls in integraler Form:

$$m(\mathbf{v}_C(t_E) - \mathbf{v}_C(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt$$

- ▶ Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form, starrer Körper:

$$\Theta^C \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_E) - \boldsymbol{\omega}(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^C dt$$

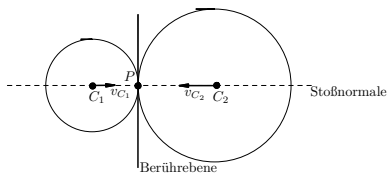
- ▶ Drallgesetz in integraler Form, O : raumfest, starrer Körper:

$$\Theta^O \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_E) - \boldsymbol{\omega}(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^O dt$$

Stoßzahl

$$\varepsilon = \frac{v_{P_1,n}(t_E) - v_{P_2,n}(t_E)}{v_{P_1,n}(t_A) - v_{P_2,n}(t_A)}, \quad \underbrace{0}_{\text{plastisch max. Verlust kin. Energie}} \leq \varepsilon \leq \underbrace{1}_{\text{elastisch energieerhaltend}}$$

Klassifizierung von Stoßvorgängen



gerader zentraler Stoß: Massenmittelpunktsatz für den Impuls ausreichend

$$v_{C_1}(t_E) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) - \varepsilon m_2 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2}$$

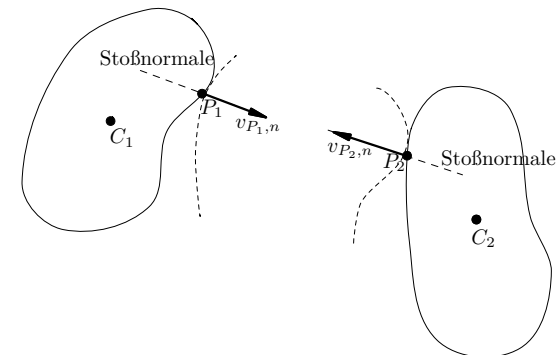
$$v_{C_2}(t_E) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) + \varepsilon m_1 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2}$$

t_A : Zeitpunkt unmittelbar vor dem Stoß

t_E : Zeitpunkt unmittelbar nach dem Stoß

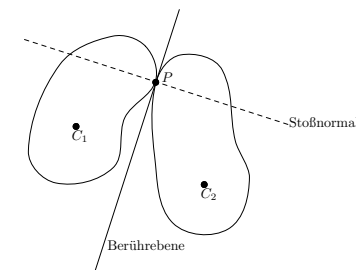
Vorgehensweise

- ▶ Auswertung der integralen Bilanz für jeden am Stoß beteiligten Körper
- ▶ nur stoßrelevante dyn. Größen berücksichtigen: Stoßkraft, Reaktionskräfte
- ▶ i. Allg. mehr Unbekannte als Gleichungen (Schließungsproblem) → Stoßzahl als materialabhängiger Parameter



schiefes zentrales Stoß: bei glatter Stoß...

- ▶ Geschwindigkeitserhaltung in der Berührebene
- ▶ Formeln wie beim geraden zentralen Stoß in Stoßnormalenrichtung



exzentrischer Stoß: zusätzlich Drall betrachten

Schwingungen – linearer Einfreiheitsgradschwinger

Bewegungsgleichung

$$\overbrace{m\ddot{x}}^{\text{Trägheit}} + \overbrace{k\dot{x}}^{\text{Dämpfung}} + \overbrace{cx}^{\text{Rückstellung}} = \overbrace{F(t)}^{\text{Erregung}}$$

$$\text{Standardform: } \ddot{x} + \underbrace{2D\omega_0}_{=\frac{k}{m}} \dot{x} + \underbrace{\omega_0^2}_{=\frac{c}{m}} x = \frac{F(t)}{m}$$

Freie Schwingungen: $F(t) = 0$

Exponentialansatz $x_h(t) = \tilde{C} e^{\lambda t}$ liefert:

	Eigenkreisfrequenzen	Lösung	
ungedämpfte Schwingungen ($k = 0$):	$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$	$x_h(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$ $= A \sin(\omega_0 t + \alpha)$	$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}$
gedämpfte Schwingungen ($k \neq 0$), schwache Dämpfung ($0 < D < 1$):	$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$	$x_h(t) = e^{-D\omega_0 t} (C_1 \cos \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + C_2 \sin \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t)$ $= A e^{-D\omega_0 t} \sin(\underbrace{\omega_0 \sqrt{1 - D^2}}_{=\omega_d} t + \alpha)$	

Erzwungene Schwingungen

hier nur harmonische Erregung $\frac{F(t)}{m} = \omega_0^2 E x_0 \cos(\Omega t)$

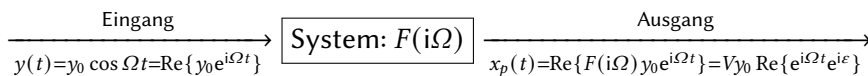
Erregung durch:	(Feder-)Kraft	Dämpfungskraft	Massenkraft	
E	1	$2D\eta$	η^2	Frequenzverhältnis: $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$
x_0	$\frac{F_0}{c}$ bzw. u_0	u_0	$\frac{m_0}{m} r$	

Lösung der homogenen Differentialgleichung klingt rasch ab \rightarrow nur partikuläre Lösung von Interesse, Ansatz: $x_p(t) = V x_0 \cos(\Omega t - \varepsilon)$

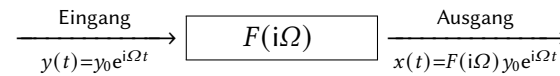
Ergebnis: Vergrößerungsfunktion V und Phasenverschiebung ε :

$$V = \frac{E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \quad \tan \varepsilon = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

Frequenzgangrechnung (alternative Ermittlung der partikulären Lösung)

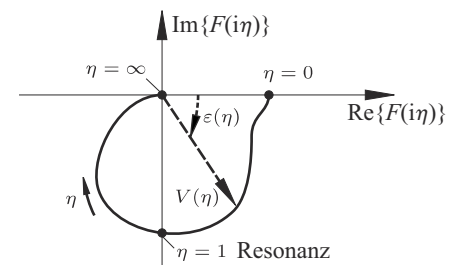


verallgemeinerte Darstellung:



$$F(i\eta) = \frac{E}{1 - \eta^2 + i 2D\eta}, \quad V(\Omega) = |F(i\Omega)|, \quad \tan \varepsilon = -\frac{\text{Im}\{F(i\Omega)\}}{\text{Re}\{F(i\Omega)\}}$$

Ortskurve:



Schwingungen – lineares Mehrfreiheitsgradsystem

Vorgehensweise (hier nur für ungedämpfte Systeme mit zwei Freiheitsgraden)

- ▶ Bewegungsgleichungen aufstellen
- ▶ Freie Schwingungen: Exponentialansatz $x_k(t) = C_k e^{\lambda t}$, $k = 1, 2$
- ▶ führt auf homogenes lineares Gleichungssystem für C_1, C_2
- ▶ nichttriviale Lösungen nur, wenn die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems singulär wird
- ▶ Eigenwertproblem für λ , \rightarrow zwei Eigenkreisfrequenzen
- ▶ Eigenvektoren \rightarrow Amplituden C_1, C_2 zu jedem Eigenwert, nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt
- ▶ Additive Überlagerung zur Gesamtlösung, Anpassung an die Anfangsbedingungen
- ▶ Erzwungene Schwingungen (nur harmonische Erregung):
- ▶ Ansatz analog rechter Seite: z.B. für $F(t) = c_0 Y_0 \cos(\Omega t)$:

$$x_{1,p}(t) = V_1 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_1)$$

$$x_{2,p}(t) = V_2 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_2)$$

- ▶ führt auf inhomogenes lineares Gleichungssystem für $V_1, V_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

Kreiseltheorie

Eulersche Kreiselgleichungen

Kreisel: in einem raumfesten Punkt (hier: O) drehbar gelagerter Körper \rightarrow reine Rotationsbewegung, keine Translation

Drallsatz für starren Körper bzgl. O : $\dot{\omega} \cdot \Theta^O - \omega \cdot \Theta^O \times \omega = M^O$

im Hauptachsensystem ($\theta_1^O, \theta_2^O, \theta_3^O$: Hauptträgheitsmomente): Eulersche Kreiselgleichungen

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) = M_1^O$$

$$\dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) = M_2^O$$

$$\dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) = M_3^O$$

kräftefreier Kreisel

kräftefreier Kreisel: äußeres Moment verschwindet, Lagerung im Massenmittelpunkt erforderlich

$\rightarrow \dot{D}^O = \mathbf{0}$, Drall D^O ist Invariante der Bewegung!

Fallunterscheidungen:

- ▶ ω stets in Richtung einer Hauptachse (hier: \tilde{e}_{H_3}): ω_3 konstant, $\omega_1 = \omega_2 = 0$
Bewegung nur stabil, wenn θ_3^O größtes oder kleinstes Hauptträgheitsmoment
 - ▶ ω stets in einer durch zwei Hauptachsen aufgespannten Ebene (hier: $\tilde{e}_{H_1}, \tilde{e}_{H_3}$ -Ebene):
 - $\omega_i, i = 1, \dots, 3$, Invarianten der Bewegung, $\omega_2 = 0$
 - Energieerhaltung: $D^O \cdot \omega$ Invariante der Bewegung
- \rightarrow Winkel zwischen Drallvektor und Drehgeschwindigkeitsvektor invariant,
Nutationsbewegung des Drehgeschwindigkeitsvektors um die raumfeste Richtung des Dralls
- ▶ allgemeiner Fall, aber symmetrischer Kreisel (hier: \tilde{e}_{H_3} Symmetriachse)
 - ω_3 Invariante der Bewegung
 - $\|\omega\|$ Invariante der Bewegung
 - Energieerhaltung: $D^O \cdot \omega$ Invariante der Bewegung

\rightarrow Winkel zwischen Drallvektor und Drehgeschwindigkeitsvektor invariant, Winkel zwischen Drallvektor und Symmetriachse konstant

