



Kompendium zur

**Technischen Mechanik III**

Prof. Dr.-Ing. C. Proppe  
Institut für Technische Mechanik  
Karlsruher Institut für Technologie

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Massenpunktkinematik</b>	<b>5</b>
1.1 Worum geht es? . . . . .	5
1.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	7
1.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	7
1.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	7
1.5 Was sollte ich können? . . . . .	8
1.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	8
<b>2 Relativkinematik</b>	<b>9</b>
2.1 Worum geht es? . . . . .	9
2.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	10
2.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	10
2.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	10
2.5 Was sollte ich können? . . . . .	11
2.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	11
<b>3 Starrkörperkinematik</b>	<b>12</b>
3.1 Worum geht es? . . . . .	12
3.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	13
3.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	13
3.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	13
3.5 Was sollte ich können? . . . . .	14
3.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	14
<b>4 Impulsgesetz</b>	<b>15</b>
4.1 Worum geht es? . . . . .	15
4.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	15
4.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	15
4.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	16
4.5 Was sollte ich können? . . . . .	16
4.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	16
<b>5 Drallgesetz</b>	<b>18</b>
5.1 Worum geht es? . . . . .	18
5.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	18
5.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	18
5.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	19
5.5 Was sollte ich können? . . . . .	19
5.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	19
<b>6 Relativkinetik</b>	<b>20</b>
6.1 Worum geht es? . . . . .	20
6.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	20
6.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	20
6.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	20
6.5 Was sollte ich können? . . . . .	21
6.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	21

<b>7</b>	<b>Dynamik starrer Körper</b>	<b>22</b>
7.1	Worum geht es? . . . . .	22
7.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	23
7.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	23
7.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	23
7.5	Was sollte ich können? . . . . .	24
7.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	24
<b>8</b>	<b>Energie, Leistung, Arbeit</b>	<b>25</b>
8.1	Worum geht es? . . . . .	25
8.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	27
8.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	27
8.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	27
8.5	Was sollte ich können? . . . . .	28
8.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	29
<b>9</b>	<b>Leistungssatz, Arbeitssatz, Energiesatz</b>	<b>30</b>
9.1	Worum geht es? . . . . .	30
9.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	30
9.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	30
9.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	30
9.5	Was sollte ich können? . . . . .	31
9.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	31
<b>10</b>	<b>Virtuelle Geschwindigkeiten, virtuelle Verschiebungen</b>	<b>33</b>
10.1	Worum geht es? . . . . .	33
10.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	34
10.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	35
10.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	35
10.5	Was sollte ich können? . . . . .	36
10.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	36
<b>11</b>	<b>Lagrange-Gleichungen 2. Art</b>	<b>37</b>
11.1	Worum geht es? . . . . .	37
11.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	38
11.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	38
11.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	38
11.5	Was sollte ich können? . . . . .	39
11.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	39
<b>12</b>	<b>Stoßvorgänge</b>	<b>40</b>
12.1	Worum geht es? . . . . .	40
12.2	Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	41
12.3	Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	41
12.4	Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	41
12.5	Was sollte ich können? . . . . .	42
12.6	Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	42

<b>13 Schwingungen von Einfreiheitsgradsystemen</b>	<b>43</b>
13.1 Worum geht es? . . . . .	43
13.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	44
13.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	45
13.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	45
13.5 Was sollte ich können? . . . . .	45
13.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	46
<b>14 Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen</b>	<b>47</b>
14.1 Worum geht es? . . . . .	47
14.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	48
14.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	48
14.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	48
14.5 Was sollte ich können? . . . . .	49
14.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	49
<b>15 Kreiseltheorie</b>	<b>50</b>
15.1 Worum geht es? . . . . .	50
15.2 Wo finde ich weitere Informationen? . . . . .	50
15.3 Wo wird das später noch gebraucht? . . . . .	50
15.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor? . . . . .	51
15.5 Was sollte ich können? . . . . .	51
15.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben? . . . . .	51

# 1 Massenpunktkinematik

## 1.1 Worum geht es?

In der Kinematik wird die Geometrie der Bewegung von Körpern untersucht, unabhängig davon, wodurch die Bewegung verursacht wurde. Ein Massenpunkt ist ein punktförmiger Körper, dem eine endliche Masse zugewiesen wird. Die Massenpunktkinematik untersucht demnach die Bewegung eines punktförmigen Körpers, ohne Berücksichtigung seiner Masse oder von Kräften, die auf den Punkt einwirken.

Die kinematischen Grundgrößen sind Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Sie sind vektorwertige Funktionen, die in der Massenpunktkinematik ausschließlich von der Zeit abhängen. Um die kinematischen Grundgrößen einzuführen, wird neben einem Modell der Materie (Massenpunkt) ein Modell des Raums (Längenmessung) und der Zeit (Zeitablauf) benötigt.

Die Zeit wird als ein Intervall der reellen Zahlen angenommen. Die Struktur des Raums wird dadurch festgelegt, dass ein Bezugssystem durch Wahl eines Bezugspunkts und Festlegung der Basisvektoren eingeführt wird. Die Basisvektoren sind in dieser Veranstaltung stets auf die Euklidische Länge 1 normiert und stehen senkrecht aufeinander. Es handelt sich also um eine Orthonormalbasis.

Sind Bezugspunkt und Basisvektoren des Bezugssystems zeitunabhängig, dann spricht man von einem raumfesten oder ruhenden Bezugssystem. Anderenfalls liegt ein bewegtes Bezugssystem vor. Ob ein Bezugssystem als ruhend oder bewegt anzusehen ist, lässt sich dabei nur relativ zu einem anderen Bezugssystem entscheiden. Es stellt sich daher die Frage nach geeigneten Referenzsystemen. Dies sind in der klassischen Physik die Inertialsysteme, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie für jeden sich kräftefrei bewegenden Massenpunkt eine geradlinige Bewegung (geradlinig heißt: in gleichen Zeiten werden gleiche Strecken durchlaufen) feststellen. Ein raumfestes Bezugssystem ist dann ein Bezugssystem, das in einem Inertialsystem zeitunabhängig ist.

Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung werden bezüglich eines raumfesten Bezugssystems definiert. Es kann jedoch zweckmäßig sein, sie mit Hilfe eines bewegten Bezugssystems zu ermitteln.

- Bewegung des Massenpunkts: Eine Funktion, die jedem Zeitpunkt den Ortsvektor zuordnet, der vom Bezugspunkt zu dem Punkt im Raum zeigt, an dem sich der Massenpunkt gerade befindet.
- Geschwindigkeit des Massenpunkts: erste Ableitung der Bewegung nach der Zeit
- Beschleunigung des Massenpunkts: erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit (zweite Ableitung der Bewegung)

In der Vorlesung wurden diese drei Funktionen in kartesischen, Zylinder- und sphärischen Koordinaten ausgedrückt, vgl. Formelsammlung S. 4. Zu beachten

ist dabei, dass die Basisvektoren der Zylinder- und der sphärischen Koordinaten zeitabhängig sind. Bei der Zeitableitung der vektorwertigen Funktionen dürfen daher nicht einfach nur die Koordinaten abgeleitet werden, die Zeitableitung der Basisvektoren muss ebenfalls berücksichtigt werden. Ein wichtiger Spezialfall der Zylinder- bzw. sphärischen Koordinaten sind die Polarkoordinaten zur Beschreibung einer ebenen Bewegung, insbesondere einer Kreisbewegung.

Die Berechnung der Geschwindigkeit und Beschleunigung durch Ableitung der Bewegung ist relativ einfach. Prinzipiell kann jedoch jede kinematische Grundgröße in Abhängigkeit einer anderen Grundgröße gegeben sein. In diesem Fall kann es erforderlich sein, Integrationen auszuführen. Zur Ermittlung der dabei auftretenden Integrationskonstanten müssen Anfangsbedingungen herangezogen werden. Für den skalaren Fall (z.B. bei koordinatenweiser Betrachtung) fasst Abbildung 1.1 die möglichen Konstellationen zusammen.

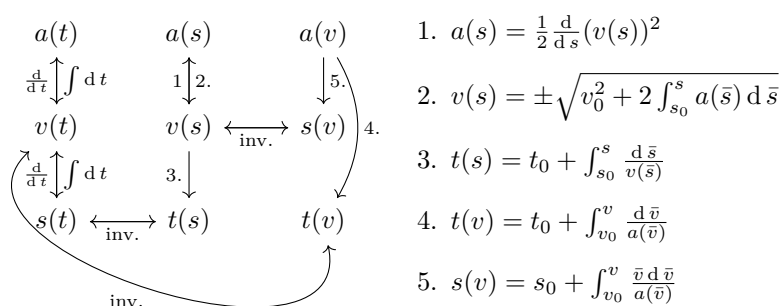


Abb. 1.1: Schema zur Lösung der kinematischen Grundaufgaben.

Das Schema ist wie folgt zu lesen:

- In den Spalten sind Beschleunigung  $a$ , Geschwindigkeit  $v$ , Weg  $s$  bzw. Zeit  $t$  als Funktion der Zeit, des Wegs bzw. der Geschwindigkeit notiert.
- Sollen Zeit, Weg bzw. Geschwindigkeit als Funktion der Beschleunigung ausgedrückt werden, so ist die entsprechende Funktion in der ersten Zeile zu invertieren.
- Man steigt in das Schema mit der vorgegebenen Funktion ein und folgt ihm dann bis zur gesuchten Funktion.
- In der linken Spalte bewegt man sich aufwärts durch Differentiation und abwärts durch Integration. Bei jeder Integration muss eine Anfangsbedingung berücksichtigt werden, um die Integrationskonstante zu bestimmen. In die letzte Zeile der beiden anderen Spalten lässt sich von der linken Spalte aus durch Inversion von  $s(t)$  bzw.  $v(t)$  wechseln.
- Die oberen beiden Zeilen der zweiten und dritten Spalte sind nicht direkt aus der untersten Zeile erreichbar (keine Doppelpfeile). In diesem Fall kann von  $a(t)$  bzw.  $v(t)$  ausgegangen werden und die Zeit mit Hilfe von  $t(s)$  durch den Ort (für Spalte 2) bzw. mit Hilfe von  $t(v)$  durch die Geschwindigkeit (für Spalte 3) ersetzt werden.

## 1.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 2 bis einschließlich Abschnitt 2.2.2
- Vorlesungsvideos: 2.1, 2.2, 2.3
- Formelsammlung: S. 4

## 1.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Die Massenpunktkinematik wird zunächst für bewegte Bezugssysteme weiterentwickelt. Sie bildet ferner die Grundlage der Kinematik der Kontinua, indem die Überlegungen für den Massenpunkt auf die materiellen Punkte des Kontinuums übertragen werden. Als Spezialfall der Kinematik der Kontinua ergibt sich die Kinematik des starren Körpers.

Mit der Massenpunktkinematik und der Kinematik der Kontinua, insbesondere der Kinematik des starren Körpers, ist die Untersuchung von Bewegungen ohne Berücksichtigung dynamischer Größen (Kräfte und Momente) abgeschlossen. In der Folge geht es darum, die Wechselwirkungen zwischen kinematischen und dynamischen Größen zu untersuchen. Dazu müssen die Bewegungsgleichungen hergeleitet und gelöst werden.

## 1.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Handelt es sich um ein ebenes oder ein räumliches Problem?
- Prüfen Sie: Ist bereits ein Bezugssystem (Bezugspunkt, Basisvektoren) vorgegeben?
  - Wenn ein Bezugssystem vorgegeben ist:  
Kartesische, Polar-, Zylinder- oder Kugelkoordinaten?  
→ Entsprechende Formeln verwenden!
  - Wenn kein Bezugssystem vorgegeben ist:  
Geeignetes Bezugssystem (Bezugspunkt, Basisvektoren) einführen!
- Welche kinematischen Grundgrößen sind gegeben, welche gesucht?
- Berechnen der gesuchten kinematische Größen:
  - mit den Formeln für die entsprechenden Bezugssysteme bzw.
  - mit Hilfe des Schemas Abb. 1.1

## 1.5 Was sollte ich können?

- Ich bin mit kartesischen, Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten vertraut.
- Bei vorgegebenen Basisvektoren kann ich einen Vektor in seine Komponenten zerlegen.
- Ich weiß, wie die Vektoren der Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung in kartesischen, Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten ausgedrückt werden.
- Ich bin in der Lage, das Schema Abb. 1.1 zur Berechnung kinematischer Grundgrößen mittels Differentiation bzw. Integration zu verwenden.

## 1.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. S. 1–28
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 25–29, S. 43–45, S. 63–67
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentrainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgabe D 6

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 2 Relativkinematik

### 2.1 Worum geht es?

Häufig ist es zweckmäßig, zusätzlich zum raumfesten Bezugssystem ein bewegtes Bezugssystem zur Beschreibung der Bewegung des Massenpunkts einzuführen, z.B. ein an ein Fahrzeug oder einen Manipulator mit mobiler Basis gebundenes Bezugssystem.

Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung im raumfesten Bezugssystem werden dann beschrieben durch Berücksichtigung der Bewegung des bewegten Bezugssystems relativ zum raumfesten Bezugssystem und der Bewegung des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem. Letztere wird als Relativbewegung des Massenpunkts und der dabei auftretende Bewegungsanteil als Relativterm bezeichnet.

Bei der Bewegung des bewegten Bezugssystems relativ zum raumfesten Bezugssystem müssen sowohl die Bewegung des Bezugspunkts als auch die Drehung der Basisvektoren der Orthonormalbasis berücksichtigt werden. Die allein aus diesen beiden Effekten resultierenden Terme werden als Führungsterme bezeichnet, da für einen geführten, d.h. mit dem Bezugspunkt des bewegten Bezugssystems starr verbundenen Massenpunkt, nur diese Anteile nicht verschwinden.

Erste Beispiele bewegter Bezugssysteme haben Sie bereits kennengelernt: bei den Zylinder-, Polar- und Kugelkoordinaten musste die Drehung der Basisvektoren berücksichtigt werden, bei der begleitenden Basis der Bewegungsbahn wurde die Bewegung des Bezugspunkts untersucht.

Die Absolutgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Massenpunkts, also seine Geschwindigkeit gemessen im raumfesten Bezugssystem, setzt sich zusammen aus

- der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_A$  des Bezugspunkts  $A$  im raumfesten Bezugssystem (translatorischer Anteil der Führungsgeschwindigkeit),
- dem Vektorprodukt  $\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}$  aus Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  der bewegten Bezugsbasis und Bewegung  $\tilde{\mathbf{r}}$  des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem (rotatorischer Anteil der Führungsgeschwindigkeit),
- der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{rel}}$  des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem (Relativgeschwindigkeit).

Die Absolutbeschleunigung  $\mathbf{a}$  des Massenpunkts, also seine Beschleunigung gemessen im raumfesten Bezugssystem, setzt sich dann zusammen aus

- der Beschleunigung  $\mathbf{a}_A$  des Bezugspunkts  $A$  im raumfesten Bezugssystem (translatorischer Anteil der Führungsbeschleunigung),
- dem Vektorprodukt  $\boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}$  aus Drehbeschleunigung  $\boldsymbol{\alpha}$  der bewegten Bezugsbasis und Bewegung  $\tilde{\mathbf{r}}$  des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem sowie dem Vektorprodukt  $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}})$  aus Drehgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  und rotatorischem Anteil  $\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}$  der Führungsgeschwindigkeit (rotatorischer Anteil der Führungsbeschleunigung),

- dem Vektorprodukt  $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$  (Coriolisbeschleunigung),
- der Beschleunigung  $\mathbf{a}_{\text{rel}}$  des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem (Relativbeschleunigung).

Bei der Beschleunigung tritt neben Führungstermen und Relativterm noch die Coriolisbeschleunigung auf. Sie verschwindet, wenn

- sich die Basisvektoren des bewegten Bezugssystems nicht mit der Zeit ändern,
- wenn die Geschwindigkeit des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem verschwindet oder
- wenn Drehgeschwindigkeit der Basisvektoren des bewegten Bezugssystems und Relativgeschwindigkeit des Massenpunkts parallele Vektoren sind.

Die Coriolisbeschleunigung wird erfahrbar, wenn man versucht, sich auf einer rotierenden Scheibe in radialer Richtung zu bewegen.

## 2.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 2, Abschnitt 2.2.3
- Vorlesungsvideo: 2.4
- Formelsammlung: S. 4

## 2.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Bewegte Bezugssysteme sind in der Kinematik des starren Körpers als körperfeste Bezugssysteme von zentraler Bedeutung. Der Drehgeschwindigkeitsvektor spielt daher eine wichtige Rolle bei der Kinematik des starren Körpers.

In der Relativkinetik werden die Beschleunigungsanteile der Relativkinematik wieder aufgegriffen.

## 2.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Handelt es sich um ein ebenes oder ein räumliches Problem?
- Sind raumfestes und bewegtes Bezugssystem bereits vorgegeben? Falls nicht, führen Sie geeignete Bezugssysteme ein.
- Bewegt sich der Bezugspunkt des bewegten Bezugssystems? Beschreiben Sie Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Bezugspunkts im raumfesten Bezugssystem, um den translatorischen Anteil der Führungsgeschwindigkeit und der Führungsbeschleunigung zu erhalten.
- Ändern sich die Basisvektoren des bewegten Bezugssystems mit der Zeit? Falls ja, ermitteln Sie Drehgeschwindigkeit und Drehbeschleunigung, um die rotatorischen Anteile der Führungsgeschwindigkeit und der Führungsbeschleunigung zu erhalten.

- Beschreiben Sie Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunkts im bewegten Bezugssystem, um Relativbewegung, -geschwindigkeit und -beschleunigung zu erhalten.
- Berechnen Sie die Coriolisbeschleunigung mit Hilfe der Drehgeschwindigkeit und der Relativgeschwindigkeit.
- Sie haben nun alle Anteile der Bewegung, Absolutgeschwindigkeit und Absolutbeschleunigung des Massenpunkts ermittelt. Achten Sie bei allen algebraischen Operationen darauf, dass die beteiligten Vektoren im gleichen Bezugssystem dargestellt werden!

## 2.5 Was sollte ich können?

- Ich kann den translatorischen Anteil der Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung berechnen.
- Ich kann den Drehgeschwindigkeitsvektor bei zeitlicher Änderungen der Basisvektoren ermitteln.
- Ich kann die rotatorischen Anteile der Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung berechnen.
- Ich kann die Coriolisbeschleunigung berechnen und weiß, in welchen Fällen sie verschwindet.
- Mit Hilfe der Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile kann ich die Absolutgeschwindigkeit und -beschleunigung des Massenpunkts ermitteln.
- Ich kann die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile in eine Skizze eintragen und dadurch meine Berechnung überprüfen.

## 2.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 8, Aufgaben 8.2, 8.4, 8.5, 8.8, 8.9, 8.13
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 3.4
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 1.4

Bitte beachten Sie, dass die ersten beiden Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 3 Starrkörperkinematik

### 3.1 Worum geht es?

Die Starrkörperkinematik basiert auf den Formeln für das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B(t) &= \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}_{AB}(t), \\ \mathbf{a}_B(t) &= \mathbf{a}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}_{AB}(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}_{AB}(t)).\end{aligned}$$

Die Formeln gelten für zwei beliebige körperfeste Punkte  $A$  und  $B$ ;  $\mathbf{R}_{AB}(t)$  bezeichnet den Ortsvektor von  $A$  nach  $B$  und  $\boldsymbol{\omega}(t)$  ist der Drehgeschwindigkeitsvektor des starren Körpers. Mit Hilfe dieser Formeln lässt sich bei bekanntem Drehgeschwindigkeitsvektor und bekanntem Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungsvektor in einem Punkt des starren Körpers die Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung in jedem anderen Punkt des Körpers und somit das komplette Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld ermitteln. Die Formeln ergeben sich aus den entsprechenden Gleichungen der Relativkinematik, wenn  $A$  Bezugspunkt eines körperfesten Bezugssystems ist, da Relativgeschwindigkeit und -beschleunigung aufgrund der Annahme, dass der Körper starr ist, verschwinden.

In den Übungsaufgaben werden ebene Probleme betrachtet. Ist  $\varphi$  der Drehwinkel des starren Körpers und  $\dot{\varphi}$  die Winkelgeschwindigkeit, dann ist  $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$ , wobei  $\mathbf{e}_z$  der Basisvektor senkrecht zur Ebene ist. Wird der Ortsvektor  $\mathbf{R}_{AB}$  als  $R\mathbf{e}_R$  geschrieben, wobei  $\mathbf{e}_R$  die Richtung von  $A$  nach  $B$  und  $R$  den Abstand zwischen  $A$  und  $B$  kennzeichnet, dann vereinfachen sich die Formeln zu

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B(t) &= \mathbf{v}_A(t) + \dot{\varphi} R \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a}_B(t) &= \mathbf{a}_A(t) + \ddot{\varphi} R \mathbf{e}_\varphi - \dot{\varphi}^2 R \mathbf{e}_R.\end{aligned}$$

Die drei Basisvektoren  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$  und  $\mathbf{e}_z$  bilden ein Rechtssystem; Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung in  $B$  ergeben sich dann durch Addition der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigung einer Kreisbewegung um  $A$  zum Geschwindigkeits- bzw. Beschleunigungszustand in  $A$ .

Verschwindet im Punkt  $A$  die Geschwindigkeit, dann liegt somit im Fall einer ebenen Bewegung momentan (der Geschwindigkeitszustand in  $A$  kann sich mit der Zeit ändern!) eine Kreisbewegung (reine Rotation) um  $A$  vor.  $A$  wird dann als Momentanpol bezeichnet. Wie man den Momentanpol rechnerisch und graphisch bestimmt, wird im Skript auf S. 59 und 60 erklärt. Die Bahn des Momentanpols im raumfesten Bezugssystem wird als Spurkurve (Rastpolbahn), seine Bahn im körperfesten Bezugssystem als Rollkurve (Gangpolbahn) bezeichnet.

In den Übungsaufgaben werden ferner mehrere starre Körper betrachtet, die miteinander bzw. mit der Umgebung verbunden sind, sogenannte Starrkörpersysteme. An den Verbindungsstellen sind dann kinematische Bedingungen zu formulieren:

- In Gelenkpunkten sind die Geschwindigkeiten identisch; anderenfalls würde sich das Gelenk lösen.

- In Kontaktpunkten sind die Geschwindigkeiten gleich groß, wenn Rollen ohne Gleiten (reines Rollen) vorliegt, da dann die Körper momentan aneinander haften.

### 3.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 3 bis einschließlich Abschnitt 3.3
- Vorlesungsvideos: 3.1, 3.2
- Formelsammlung: S. 5

### 3.3 Wo wird das später noch gebraucht?

In der Kinetik werden Bewegungsgleichungen hergeleitet, aus denen sich dann bei bekannten eingepägten Kräften die Bewegung des starren Körpers bzw. der starren Körper ergibt. Dabei müssen unter Umständen auch kinematische Beziehungen aufgestellt werden.

In der Analytischen Mechanik werden ebenfalls kinematische Beziehungen benötigt, um kinetische Energie, Leistung und Arbeit zu ermitteln.

### 3.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Es handelt sich stets um ein ebenes Problem. Beachten Sie das Bezugssystem. In welche Richtung zeigt(en) die Drehgeschwindigkeit(en)? Was sind die Ergebnisse der Vektorprodukte zwischen dem Basisvektor der Drehgeschwindigkeit(en) und den anderen Basisvektoren des Bezugssystems?
- Welche Größen sind bekannt, welche gesucht?
- Wo liegen Kontakt- bzw. Gelenkpunkte? Markieren Sie diese Punkte ggf. in einer Skizze. Wie lauten die kinematischen Bedingungen in diesen Punkten?
- Können Sie aufgrund kinematischer Bedingungen bereits den/die Momentanpole identifizieren? Markieren Sie diese(n) ebenfalls in der Skizze.
- Überlegen Sie sich eine Lösungsstrategie: Welche Bedingungen müssen Sie auswerten, um die gesuchten Größen zu berechnen? Die eingetragenen Punkte in der Skizze helfen Ihnen dabei!
- Rechnen: Werten Sie die kinematischen Bedingungen bzw. bestimmen Sie den Momentanpol mit Hilfe der Formeln für die Starrkörperkinematik.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis graphisch mit Hilfe von Strahlen, die vom/von den Momentanpolen ausgehen.

### 3.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, für ebene Probleme das Vektorprodukt zwischen Drehgeschwindigkeit und Ortsvektor schnell und effizient auszuwerten.
- Ich kann die Geschwindigkeitsformel für den starren Körper anwenden, um die Geschwindigkeit in einem Punkt des Körpers oder seine Drehgeschwindigkeit zu ermitteln.
- Für Systeme starrer Körper kann ich kinematische Bedingungen an den Kontakt- bzw. Gelenkpunkten aufstellen.
- Ich bin in der Lage, den Momentanpol rechnerisch und graphisch zu ermitteln.
- Ich kenne den Verlauf der Spurkurve (Rastpolbahn) und Rollkurve (Gangpolbahn) für ein rollendes Rad (reines Rollen).

### 3.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 4
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 378–381, S. 385–388
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 3.2, Aufgaben 2–8

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 4 Impulsgesetz

### 4.1 Worum geht es?

Das Impulsgesetz ist ein Axiom. Es besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers gleich der resultierenden äußeren Kraft ist, also die Summe aller an dem Körper angreifenden äußeren Kräfte.

Aus dem Impulsgesetz folgt der Massenmittelpunktsatz für den Impuls in der Form  $m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}$ : Das Produkt aus Masse  $m$  des Körpers und Beschleunigung  $\mathbf{a}_C$  im Massenmittelpunkt ist gleich der resultierenden äußeren Kraft  $\mathbf{F}$ .

Zur Auswertung des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls wird zunächst ein Freischnitt wie in der Statik angefertigt. Dadurch werden neben den eingepprägten Kräften auch Reaktionskräfte als äußere Kräfte berücksichtigt.

Bei der Auswertung des Massenmittelpunktsatzes unterscheidet man zwei Vorgehensweisen:

- Bei der Vorgehensweise nach d'Alembert wird der Massenmittelpunktsatz als  $\mathbf{F} - m\mathbf{a}_C = \mathbf{0}$  geschrieben und der Term  $-m\mathbf{a}_C$  als Trägheitskraft gedeutet. Dadurch können unter Hinzunahme der Trägheitskräfte Gleichgewichtsbedingungen wie in der Statik formuliert werden. Hierfür sind die Trägheitskräfte im Massenmittelpunkt (Beschleunigung in  $C$ !) entgegengesetzt zur Richtung der Beschleunigung (neg. Vorzeichen!) in den Freischnitt einzutragen.
- Bei der direkten Auswertung des Massenmittelpunktsatzes wird die Beschleunigung  $\mathbf{a}_C$  ermittelt und dann  $m\mathbf{a}_C = \mathbf{F}$  ausgewertet. Es kann hilfreich sein, sich die Beschleunigung in den Freischnitt im Massenmittelpunkt einzutragen.

Die Auswertung des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls führt auf Differentialgleichungen, in denen noch die Reaktionskräfte auftreten. Diese sind noch zu eliminieren, um Bewegungsgleichungen für die unbekannt kinematischen Größen zu erhalten. Nach Lösung der Bewegungsgleichungen können dann durch Einsetzen der kinematischen Größen die Reaktionskräfte berechnet werden.

### 4.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 5.3, 7.1 und 8.2
- Vorlesungsvideos: 5, 7, 8.1
- Formelsammlung: S. 6

### 4.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Zusammen mit dem Drallgesetz lassen sich die Bewegungsgleichungen für Starrkörper und Starrkörpersysteme herleiten. Die prinzipielle Vorgehensweise bleibt dabei gleich, es kommt jedoch zusätzlich der Massenmittelpunktsatz für den Drall bzw., im Sinne d'Alemberts, das Momentengleichgewicht hinzu.

#### 4.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Ist ein raumfestes Bezugssystem bereits vorgegeben? Falls nicht, legen Sie das raumfeste Bezugssystem fest.
- Schneiden Sie das System frei und tragen Sie alle eingprägten Kräfte ein.
- Je nach Aufgabenstellung wählen Sie eine der folgenden Vorgehensweisen:
  - gemäß d’Alembert: Tragen Sie die Trägheitskräfte entgegengesetzt zur Richtung der Beschleunigung im Massenmittelpunkt an. Formulieren Sie dann die Gleichgewichtsbedingungen wie in der Statik.
  - Werten Sie den Massenmittelpunktsatz für den Impuls direkt aus. Es kann hilfreich sein, sich die Beschleunigung im Massenmittelpunkt in die Skizze einzutragen.
- Eliminieren Sie ggf. Reaktionskräfte, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.
- Eventuell schließen sich weitere Fragen zur Kinematik an, die ausgehend von den Bewegungsgleichungen zu lösen sind. Beachten Sie bei der Vorgehensweise das Schema Abb. 1.1.

#### 4.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, einen Freischnitt anzufertigen.
- Ich weiß, wie ich bei der Vorgehensweise nach d’Alembert die Trägheitskräfte in den Freischnitt einzeichnen muss.
- Ich bin in der Lage, Gleichgewichtsbedingungen unter Einbeziehung der Trägheitskräfte zu formulieren.
- Ich kann den Massenmittelpunktsatz für den Impuls auswerten und die dafür erforderlichen Beschleunigungen berechnen.
- Ich kann zwischen Reaktionskräften und eingprägten Kräften unterscheiden und die Reaktionskräfte eliminieren, um Bewegungsgleichungen zu erhalten.
- Ich beherrsche die Lösung kinematischer Grundaufgaben sicher.

#### 4.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 2, Aufgaben 2.1-2.3, 2.5, 2.9, 2.12 - 2.16, Kapitel 5, Aufgaben 5.1–5.4
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 467–471
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgaben D 12, D 13

- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.1, Aufgaben 1, 4

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 5 Drallgesetz

### 5.1 Worum geht es?

Der Drall eines Körpers bezüglich eines Punkts  $Q$  ist definiert als

$$\mathbf{D}^Q := \int_V (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q) \rho \, dV.$$

Das Drallgesetz ist ein Axiom. Es besagt, dass die zeitliche Änderung des Dralls eines Körpers bezüglich eines raumfesten Punkts  $O$  gleich dem resultierenden Moment bezogen auf  $O$  ist:  $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ .

Der Massenmittelpunktsatz für den Drall sagt aus, dass auch für den Massenmittelpunkt  $C$  eine dem Drallgesetz formal entsprechende Aussage möglich ist:  $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$ . Für andere körperfeste Punkte können jedoch Zusatzterme auftreten.

Für die Auswertung des Massenmittelpunktsatzes für den Drall muss zunächst der Drall selbst ermittelt werden. Dazu ist das Volumenintegral unter Einführung eines auf den Massenmittelpunkt bezogenen Bezugssystems unter Verwendung geeigneter, d.h. an die Geometrie des Körpers angepasster Koordinaten auszuwerten. Es müssen der Ortsvektor vom Massenmittelpunkt  $\mathbf{c}$  zu jedem Punkt des Körpers und die zeitliche Ableitung  $\dot{\mathbf{c}}$  des Ortsvektors ermittelt werden:  $\mathbf{D}^C = \int_V \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \rho \, dV$

Anschließend muss das resultierende Moment ermittelt werden. Hierfür ist es zweckmäßig, das System freizuschneiden.

### 5.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 5.3, 6, 7.1 und 8.2
- Vorlesungsvideos: 5, 6.1, 6.2, 7, 8.1
- Formelsammlung: S. 6

### 5.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Die Auswertung des Dralls lässt sich für den starren Körper durch Einführung des Massenträgheitstensors erheblich vereinfachen. In der Kinetik des starren Körpers werden beide Massenmittelpunktsätze für starre Körper und Starrkörpersysteme ausgewertet und in der Relativkinetik erfolgt die Auswertung unter Einführung bewegter Bezugssysteme.

#### 5.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Wählen Sie zunächst ein geeignetes Bezugssystem zur Auswertung des Volumenintegrals für den Drall, falls es nicht durch die Aufgabenstellung vorgegeben ist.
- Ermitteln Sie den Ortsvektor vom Massenmittelpunkt zu einem beliebigen Punkt des Körpers in seiner Momentanlage und leiten Sie den Ortsvektor nach der Zeit ab. Bilden Sie anschließend das Vektorprodukt aus dem Ortsvektor und seiner zeitlichen Ableitung.
- Werten Sie das Volumenintegral zur Berechnung des Dralls aus.
- Schneiden Sie das System frei und ermitteln Sie das resultierende Moment bezüglich des Massenmittelpunkts.
- Auswertung des Massenmittelpunktsatzes: Setzen Sie die zeitliche Ableitung des Dralls und das resultierende Moment gleich.

#### 5.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, geeignete Koordinaten zur Auswertung des Dralls für den Massenmittelpunkt einzuführen und damit den Ortsvektor vom Massenmittelpunkt zu einem beliebigen Punkt des Körpers aufzustellen.
- Ich kann das Volumenintegral für den Drall berechnen.
- Ich bin in der Lage, einen Freischnitt anzufertigen und damit das resultierende Moment bezüglich eines vorgegebenen Punkts zu ermitteln.

#### 5.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

Der Massenmittelpunktsatz für den Drall wird selten separat und dann meist ohne explizite Auswertung des Volumenintegrals für den Drall geübt. Daher können hier keine Literaturempfehlungen gegeben werden.

## 6 Relativkinetik

### 6.1 Worum geht es?

Die in den beiden vorherigen Kapiteln verwendeten Beziehungen zur Herleitung von Bewegungsgleichungen lassen sich auch im bewegten Bezugssystem auswerten, was für viele praktische Anwendungen vorteilhaft ist:

- Der Massenmittelpunktsatz für den Impuls kann auch in einem bewegten Bezugssystem ausgewertet werden. Hierzu ist es erforderlich, den Beschleunigungsvektor  $\mathbf{a}_C$  des Massenmittelpunkts unter Verwendung des bewegten Bezugssystems zu berechnen. Mit den Bezeichnungen des Kapitels 2 ergibt sich dann

$$m(\mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{C,\text{rel}} + \mathbf{a}_{C,\text{rel}}) = \mathbf{F}.$$

- Auch aus dem Drallgesetz kann eine Gleichung bezüglich des bewegten Bezugspunkts  $A$  hergeleitet werden. Sie lautet

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A.$$

Der Zusatzterm  $\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m$  verschwindet, falls  $A$  der Massenmittelpunkt ist ( $\tilde{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0}$ ), der Punkt  $A$  sich unbeschleunigt bewegt ( $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ ) oder  $\tilde{\mathbf{r}}_C$  und  $\mathbf{a}_A$  parallele Vektoren sind.

### 6.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 8.3
- Vorlesungsvideos: 8.2
- Formelsammlung: S. 6

### 6.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Bewegte Bezugssysteme spielen bei vielen Anwendungen eine große Rolle, vor allem aber auch als körperfestes Bezugssystem in der Dynamik starrer Körper.

### 6.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Welches Bezugssystem ist raumfest, welches bewegt? Wie bewegt sich das bewegte Bezugssystem (Bezugspunkt, Drehung der Basisvektoren)
- Ermitteln Sie sämtliche Beschleunigungsanteile (translatorische und rotatorische Führungsbeschleunigung, Coriolisbeschleunigung, Relativbeschleunigung) separat. Prüfen Sie, ob Sie alle Anteile berücksichtigt haben.
- Fertigen Sie einen Freischnitt und eine Skizze mit den Beschleunigungsanteilen an. Hilfreich ist die Verwendung von Farben zur Kennzeichnung der unterschiedlichen Beschleunigungsanteile.
- Werten Sie die Massenmittelpunktsätze bzw. das Drallgesetz direkt oder gemäß d'Alembert aus.

- Eliminieren Sie ggf. Schnittreaktionen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

## 6.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, sämtliche Beschleunigungsanteile zur Beschreibung der Bewegung relativ zu einem bewegten Bezugssystem zu ermitteln.
- Ich kann eine Skizze der ermittelten Beschleunigungsanteile und einen Freischnitt des Systems anfertigen.
- Mit Hilfe der Skizzen bin ich in der Lage, die Massenmittelpunktsätze für Impuls und Drall bzw. das Drallgesetz bei Verwendung eines bewegten Bezugssystems auszuwerten.
- Ich bin in der Lage, aus den so gewonnenen Beziehungen die Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

## 6.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 8, Aufgaben 8.1, 8.3, 8.7, 8.10–8.12, 8.14
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentrainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgaben D 37, D 38
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.4, Aufgaben 1, 3, 5, 6, 9, 12–14

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 7 Dynamik starrer Körper

### 7.1 Worum geht es?

Für starre Körper lässt sich der Drall wesentlich vereinfachen. Er ergibt sich als lineare Transformation des Drehgeschwindigkeitsvektors:  $\mathbf{D}^A = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$ .

Die lineare Transformation wird jedoch nicht wie beim Impuls  $\mathbf{I}$ , der wegen  $\mathbf{I} = m\mathbf{v}_C$  eine lineare Transformation der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_C$  des Massenmittelpunktes ist, durch eine skalare Größe (Masse  $m$ ) vermittelt, sondern durch einen symmetrischen Tensor 2. Stufe, dem Massenträgheitstensor  $\boldsymbol{\Theta}^A$  bezogen auf den gleichen Bezugspunkt wie der Drall,  $A$ .

Die Koordinaten des Massenträgheitstensors  $\tilde{\theta}_{ij}^A$  in einem körperfesten Bezugssystem sind allgemein definiert als:

- axiale Massenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{11}^A &= \int_{\mathcal{V}} (X_2^2 + X_3^2) \rho \, dV, \\ \tilde{\theta}_{22}^A &= \int_{\mathcal{V}} (X_1^2 + X_3^2) \rho \, dV, \\ \tilde{\theta}_{33}^A &= \int_{\mathcal{V}} (X_1^2 + X_2^2) \rho \, dV,\end{aligned}$$

- Deviationsmomente:  $\tilde{\theta}_{ij}^A = -\int_{\mathcal{V}} X_i X_j \rho \, dV$ , für  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $i \neq j$ .

Für Tensoren 2. Stufe lassen sich Auswirkungen der Änderung des Bezugssystems untersuchen. Speziell für den Massenträgheitstensor ergibt sich:

- bei Änderung des Bezugspunktes vom Massenmittelpunkt  $C$  nach  $A$  der Satz von Steiner:

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\Theta}^C + (\mathbf{E}(\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{R}_C) - \mathbf{R}_C \otimes \mathbf{R}_C) m,$$

wobei  $\mathbf{R}_C$  den Ortsvektor vom Punkt  $A$  zum Massenmittelpunkt  $C$  bezeichnet. Beispielsweise ergibt sich das axiale Massenträgheitsmoment  $\tilde{\theta}_{33}^A$  zu  $\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{33}^C + (R_{C1}^2 + R_{C2}^2)m$ .

- bei Drehung der Basisvektoren des bewegten Bezugssystems:

Es existiert ein Hauptachsensystem, in dem die Deviationsmomente verschwinden. Die verbleibenden axialen Massenträgheitsmomente  $\tilde{\theta}_{H_1}^A = \tilde{\theta}_{11}^A$ ,  $\tilde{\theta}_{H_2}^A = \tilde{\theta}_{22}^A$ ,  $\tilde{\theta}_{H_3}^A = \tilde{\theta}_{33}^A$  im Hauptachsensystem werden als Hauptträgheitsmomente bezeichnet. Wird das Bezugssystem aus dem Hauptachsensystem um eine Hauptachse (hier:  $\tilde{\mathbf{e}}_{H_3}$ ) mit Winkel  $\alpha$  gedreht, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{11}^A &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha), \\ \tilde{\theta}_{22}^A &= \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha), \\ \tilde{\theta}_{12}^A &= \tilde{\theta}_{21}^A = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \sin(2\alpha).\end{aligned}$$

Im Drallgesetz und im Massenmittelpunktsatz für den Drall wird die Zeitableitung des Dralls benötigt. Sie ergibt sich zu  $\dot{\mathbf{D}}^A = \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \times \boldsymbol{\omega}$ . Für einen körperfesten Punkt  $A$  ergibt sich dann aus dem Drallgesetz

$$\mathbf{R}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A.$$

Der Zusatzterm  $\mathbf{R}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_A m$  verschwindet unter analogen Bedingungen, wie in der Relativkinetik beschrieben.

Für ebene Probleme und den Massenmittelpunkt  $C$  vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\tilde{\theta}_{H_3}^C \dot{\omega}_3 = \tilde{M}_3^C,$$

wenn der  $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Basisvektor parallel zum Normalenvektor der Bewegungsebene ist. Für einfache Geometrien finden sich Formeln für  $\tilde{\theta}_{H_3}^C$  in der Formelsammlung.

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen kann es erforderlich sein, noch den Massenmittelpunktsatz für den Impuls auszuwerten. Hier ergeben sich für den starren Körper keine prinzipiellen Änderungen.

## 7.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 8.4
- Vorlesungsvideos: 8.3
- Formelsammlung: S. 7

## 7.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Bewegungsgleichungen von Starrkörpersystemen werden in den Anwendungen (Stoß, Schwingungen, Kreiseltheorie) eine große Rolle spielen. Sie können entweder mit der hier vorgestellten Vorgehensweise oder mit den im Folgenden behandelten Methoden der analytischen Mechanik hergeleitet werden.

## 7.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Handelt es sich um ein ebenes oder ein räumliches Problem?
- Prüfen Sie: Ist ein geeignetes Bezugssystem bereits vorgegeben?
- Welche Koordinaten beschreiben die Bewegung? Gibt es kinematische Bindungen und wie lauten Sie?
- Schneiden Sie das System frei. Tragen Sie bei einer Vorgehensweise nach d'Alembert zusätzlich die Trägheitsreaktionen ein. Sind Schnittreaktionen zu berechnen/zu eliminieren?
- Werten Sie die Massenmittelpunktsätze bzw. das Drallgesetz direkt oder gemäß d'Alembert aus.
- Eliminieren Sie ggf. Schnittreaktionen, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

- Es können sich weitere Fragen zur Kinematik anschließen, die unter Berücksichtigung der Starrkörperkinematik zu lösen sind.

## 7.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, Massenträgheitsmomente mit Hilfe des Volumenintegrals zu berechnen und den Steineranteil bei Änderung des Bezugspunkts zu ermitteln.
- Ich bin in der Lage, die kinematischen Bindungen eines Starrkörpersystems aufzufinden und durch Gleichungen zu beschreiben.
- Ich kann Freischnitte von Starrkörpersystemen anfertigen und ggf. die Trägheitsreaktionen einzeichnen.
- Mit Hilfe des Freischnitts bin ich in der Lage, die Massenmittelpunktsätze für Impuls und Drall bzw. das Drallgesetz auszuwerten.
- Ich bin in der Lage, aus den so gewonnenen Beziehungen die Bewegungsgleichungen zu ermitteln.

## 7.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 5, Aufgaben 5.5–5.22, 5.34–5.36
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentrainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgaben D 14, D 16–D 19, D 21
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.2, Aufgaben 1–9
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 3, Aufgaben 1 bis 9, Kapitel 4.1, Aufgaben 2, 3, 5, 6, 8–10, Kapitel 4.2, Aufgaben 1–6, 9–15

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 8 Energie, Leistung, Arbeit

### 8.1 Worum geht es?

Das Ziel der analytischen Mechanik ist es, Bewegungsgleichungen bzw. Aussagen über die Bewegung von diskreten Systemen, also Systemen bestehend aus Massenpunkten, starren Körpern und masselosen Verbindungselementen, zu treffen, ohne dass dabei die Schnittreaktionen auftreten oder erst eliminiert werden müssen. Dazu werden die Massenmittelpunktsätze tangential zur Bewegung projiziert. Dies führt auf Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen.

Daher werden zunächst die grundlegenden Begriffe kinetische Energie, Leistung und Arbeit eingeführt. Die kinetische Energie für einen starren Körper lautet für einen körperfesten Bezugspunkt  $A$

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$$

und speziell für den Massenmittelpunkt

$$E = \frac{1}{2} m \|\mathbf{v}_C\|^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Man bezeichnet den ersten Term als translatorischen Anteil und den letzten Term als rotatorischen Anteil der kinetischen Energie. Der Zusatzterm  $m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C)$  bei einem allgemeinen Bezugspunkt  $A$  heißt Wechselenergie, wobei  $\mathbf{R}_C$  den Ortsvektor von  $A$  zum Massenmittelpunkt  $C$  bezeichnet. Bei ebener Bewegung vereinfacht sich der rotatorische Anteil zu  $\frac{1}{2} \tilde{\theta}_{33}^C \tilde{\omega}_3^2$ , wenn die  $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Achse senkrecht zur Bewegungsebene steht.

Die äußere Leistung verknüpft Dynamik ( $\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A$ ) und Kinematik ( $\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega}$ ). Sie lautet  $P_a = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^A$ .

Experimente zeigen, dass die äußere Leistung mindestens so groß wie die zeitliche Änderung der kinetischen Energie ist. Die äußere Leistung bewirkt also nicht nur eine Änderung der kinetischen Energie. Die Differenz aus äußerer Leistung und Änderung der kinetischen Energie wird als innere Leistung bezeichnet:  $P_i := P_a - \dot{E}$ . Die innere Leistung ist mit der Deformation des Körpers verknüpft: Es lässt sich zeigen, dass für starre Körper die innere Leistung verschwindet. Für masselose Verbindungselemente ist sie so groß wie die äußere Leistung.

Die Arbeit ergibt sich, wenn die Leistung zwischen zwei Zeitpunkten  $t_A$  und  $t_E$  nach der Zeit integriert wird. Die äußere Arbeit der Dynamik ( $\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A$ ) ist dann die Summe zweier Wegintegrale:

$$W_a = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F} dt + \int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^A dt.$$

Äußere Leistung  $P_a$  bzw. innere Leistung  $P_i$  besitzen ein Potential, wenn es eine Potentialfunktion  $V_a$  bzw.  $V_i$  gibt, so dass  $P_a = -\dot{V}_a$  bzw.  $P_i = \dot{V}_i$  gilt. Besitzt die äußere Kraft bzw. das äußere Moment ein Potential, so wird das entsprechende

Wegintegral im Ausdruck der äußeren Arbeit vom Integrationsweg unabhängig. Die Arbeit ergibt sich dann als die Differenz der Potentialfunktion zu den Zeitpunkten  $t_E$  und  $t_A$ . Man bezeichnet die Summe der Potentialfunktionen  $V_a$  und  $V_i$  auch als potentielle Energie und Systeme, deren äußere und innere Leistung eine Potentialfunktion besitzt, als konservativ.

Wichtige Potentialfunktionen sind:

- äußeres Potential der Gewichtskraft:  $V_{a_G} = mgz + C$ , die Integrationskonstante  $C$  wird dabei durch das Nullniveau der Höhenkoordinate  $z$  festgelegt,
- inneres Potential eines linear-elastischen masselosen Federelementes:  $V_{i_F} = \frac{1}{2}c(\Delta x)^2$  (Linearfeder) bzw.  $V_{i_d} = \frac{1}{2}c_d(\Delta\varphi)^2$  (Drehfeder), wobei die Federn für  $\Delta x = 0$  bzw.  $\Delta\varphi = 0$  entspannt sind.

## 8.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 9.1
- Vorlesungsvideos: 9.1
- Formelsammlung: S. 8

## 8.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Mit Hilfe der kinetischen Energie, der Leistung und der Arbeit zu zwei verschiedenen Zeitpunkten lassen sich Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen formulieren. Es handelt sich dabei um eine skalare Gleichung, mit deren Hilfe eine kinematische Größe berechnet werden kann.

Durch Einführung virtueller Geschwindigkeiten und Verschiebungen lassen sich virtuelle Leistungs- und Arbeitsbilanzen aufstellen, mit deren Hilfe die Bewegungsgleichungen ermittelt werden können, ohne vorher die Schnittreaktionen eliminieren zu müssen.

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind eine weitere Möglichkeit, um für holonome Systeme die Bewegungsgleichungen effizient herzuleiten. Hierfür werden ebenfalls die kinetische Energie und die virtuelle Arbeit benötigt.

## 8.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Legen Sie zunächst ein raumfestes Bezugssystem fest, sofern nicht bereits vorgegeben.
- Zur Berechnung der äußeren Leistung schneiden Sie das System frei und tragen die eingepprägten Kräfte in den Freischnitt ein.
- Für die Ermittlung der äußeren Arbeit müssen Sie das Wegintegral zwischen zwei Zuständen des Systems berechnen.
- Die äußere Leistung können Sie entweder direkt mit den Formeln für eine Dynamik oder durch Ableitung der äußeren Arbeit nach der Zeit ermitteln.
- Zur Berechnung der kinetischen Energie des Systems prüfen Sie für jeden Körper, ob ein translatorischer und/oder ein rotatorischer Anteil der kinetischen Energie vorliegt.

- Zur Ermittlung des translatorischen Anteils der kinetischen Energie eines Körpers stellen Sie den Ortsvektor zu seinem Massenmittelpunkt auf und leiten Sie ihn nach der Zeit ab, um die Geschwindigkeit seines Massenmittelpunkts zu berechnen. Werten Sie dann die Formel für den translatorischen Anteil der kinetischen Energie aus.
- Zur Ermittlung des rotatorischen Anteils der kinetischen Energie stellen Sie im Fall eines räumlichen Problems den Drehgeschwindigkeitsvektor des starren Körpers und den Massenträgheitstensor bezogen auf den Massenmittelpunkt auf. Für ebene Probleme benötigen Sie nur die Winkelgeschwindigkeit und das axiale Massenträgheitsmoment für die Achse senkrecht zur Bewegungsebene bezogen auf den Massenmittelpunkt. Werten Sie dann die Formel für den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie aus.
- Prüfen Sie, ob Sie mit Hilfe kinematischer Beziehungen den Ausdruck für die kinetische Energie noch weiter vereinfachen können.

## 8.5 Was sollte ich können?

- Ich kann Systeme bestehend aus starren Körpern und Massenpunkten freischneiden und die eingepägten Kräfte vollständig und korrekt eintragen.
- Ich bin in der Lage, für die eingepägten Kräfte das Wegintegral zur Berechnung der äußeren Arbeit aufzustellen und zu lösen.
- Ich weiß, wie die äußere Leistung für eine Dynamik berechnet wird und kann die gesamte äußere Leistung eines Systems korrekt ermitteln.
- Ich kann sicher entscheiden, ob ein starrer Körper sich translatorisch und/oder rotatorisch bewegt.
- Ich kann den Ortsvektor zum Massenmittelpunkt des starren Körpers aufstellen und daraus den Geschwindigkeitsvektor des Massenmittelpunkts berechnen.
- Ich bin in der Lage, den translatorischen Anteil der kinetischen Energie korrekt zu ermitteln.
- Ich kann den Drehgeschwindigkeitsvektor und den Massenträgheitstensor bezogen auf den Massenmittelpunkt bei räumlicher Bewegung des starren Körpers aufstellen. Im Fall einer ebenen Bewegung bin ich in der Lage, die Winkelgeschwindigkeit und das benötigte axiale Massenträgheitsmoment bezogen auf den Massenmittelpunkt zu ermitteln.
- Ich bin in der Lage, den rotatorischen Anteil der kinetischen Energie eines starren Körpers korrekt zu ermitteln.
- Ich kann kinematische Beziehungen auffinden und damit den Ausdruck für die kinetische Energie vereinfachen.

## 8.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 2, Aufgaben 2.18, 2.20-2.22
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 205, S. 218–220, S. 526, S. 530

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 9 Leistungssatz, Arbeitssatz, Energiesatz

### 9.1 Worum geht es?

Für Systeme aus mehreren Körpern besagt der Leistungssatz, dass die innere Leistung additiv ist:  $P_i = \sum_{k=1}^n P_{i_k}$ . Für diskrete Systeme ist daher die innere Leistung aller masselosen Verbindungselemente gleich der Differenz der äußeren Leistung und der Zeitableitung der kinetischen Energie aller starrer Körper.

Analog besagt der Arbeitssatz, dass die innere Arbeit additiv ist. Demzufolge ist für diskrete Systeme die innere Arbeit aller masselosen Verbindungselemente gleich der Differenz der äußeren Arbeit und der kinetischen Energie aller starrer Körper.

Besitzen äußere und innere Leistung ein Potential, dann gilt der Energiesatz in differentieller Form  $\dot{V} + \dot{E} = 0$  und in integraler Form  $V + E = \text{const.}$ , wobei  $V$  die Summe aller Potentialfunktionen und  $E$  die Summe der kinetischen Energie aller Körper bezeichnet.

Leistungssatz, Arbeitssatz und Energiesatz liefern jeweils nur eine skalare Gleichung, wobei der Energiesatz nur für sog. konservative Systeme verwendet werden kann, bei denen die äußere und innere Leistung aller Körper und Verbindungselemente ein Potential besitzt. Sie erlauben daher nur die Berechnung einer einzigen kinematischen Größe, was ihre Anwendung auf Einfreiheitsgradsysteme beschränkt. Für Einfreiheitsgradsysteme erlauben Arbeits- und Energiesatz die Ermittlung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Bewegung, ohne dass dafür eine kinematische Grundaufgabe zu lösen ist. Schnittreaktionen müssen im Leistungs-, Arbeits- und Energiesatz nicht berücksichtigt werden.

### 9.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 9.2
- Vorlesungsvideos: 9.2
- Formelsammlung: S. 8

### 9.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Arbeits- und Energiesatz liefern jeweils nur eine skalare Gleichung und eignen sich daher vor allem für Einfreiheitsgradsysteme. Mit Hilfe virtueller Geschwindigkeiten und Verschiebungen lassen sich virtuelle Leistungs- und Arbeitsbilanzen aufstellen, aus denen die Bewegungsgleichungen auch für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden ermittelt werden können, ohne vorher die Schnittreaktionen eliminieren zu müssen.

### 9.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Schneiden Sie das System frei und tragen Sie alle eingprägten Kräfte in die Skizze ein.
- Prüfen Sie: Handelt es sich um ein konservatives System?

- Ermitteln Sie die kinetische Energie zu zwei verschiedenen Zeitpunkten. Dies kann auch ein Anfangszeitpunkt und ein fester, aber beliebiger Zeitpunkt sein.
- Prüfen Sie, ob Sie die Ausdrücke für die kinetische Energie mittels kinematischer Beziehungen noch weiter vereinfachen können.
- Für konservative Systeme können Sie den Energiesatz verwenden. Stellen Sie hierzu die potentielle Energie des Systems zu zwei Zeitpunkten auf und bilden Sie zu jedem Zeitpunkt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie.
- Für nichtkonservative Systeme müssen Sie den Arbeitssatz verwenden. Ermitteln Sie hierzu die Arbeit der eingprägten Kräfte mit Hilfe des Wegintegrals zwischen den Zuständen des Systems zu den zwei verschiedenen Zeitpunkten und werten Sie dann den Arbeitssatz aus.
- In beiden Fällen erhalten Sie eine skalare Gleichung, mit der Sie eine Geschwindigkeitsgröße in Abhängigkeit der entsprechenden Bewegungsgröße ausdrücken können.

## 9.5 Was sollte ich können?

- Ich kann diskrete Systeme freischneiden.
- Ich kann zwischen konservativen und nichtkonservativen Systemen unterscheiden.
- Ich bin in der Lage, die kinetische Energie eines diskreten Systems zu ermitteln und die erhaltenen Ausdrücke mittels kinematischer Beziehungen zu vereinfachen.
- Für konservative Systeme kann ich die potentielle Energie eines diskreten Systems aufstellen.
- Für nichtkonservative Systeme bin ich in der Lage, das Arbeitsintegral der eingprägten Kräfte auszuwerten.
- Durch Auswertung des Energie- bzw. des Arbeitssatzes gelingt es mir, eine kinematische Größe aus vorgegebenen Daten zu berechnen.

## 9.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 2, Aufgaben 2.1, 2.11, 2.12, Kapitel 5, Aufgaben 5.23–5.28
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 210–215, S. 227–229, S. 533–537, S. 541–543, S. 680–681, S. 812–813
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.3

- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.5

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 10 Virtuelle Geschwindigkeiten, virtuelle Verschiebungen

### 10.1 Worum geht es?

Bei der Herleitung des Leistungs-, Arbeits- und Energiesatzes werden die Massenmittelpunktsätze durch Bilden des Skalarprodukts mit dem Geschwindigkeitsvektor bzw. Drehgeschwindigkeitsvektor tangential zur Bewegungsrichtung projiziert, wodurch die Schnittreaktionen eliminiert werden. Arbeits- und Energiesatz liefern daher nur eine skalare Gleichung. Dies ist für die Ermittlung der Bewegungsgleichungen von Mehrfreiheitsgradsystemen unzureichend.

Um mehr Flexibilität zu erreichen und dadurch auch mehrere Bewegungsgleichungen generieren zu können, wird daher nicht mit der tatsächlichen Geschwindigkeit bzw. Drehgeschwindigkeit projiziert, sondern mit einer nur gedachten, virtuellen Geschwindigkeit bzw. Drehgeschwindigkeit, die jedoch die kinematischen Beziehungen erfüllen muss.

Für die ebene Bewegung diskreter Systeme ergibt sich dann die Methode der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\underbrace{\tilde{P}_i}_{\substack{\text{virtuelle innere Leistung} \\ \text{aller Verbindungselemente}}} = \underbrace{\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \mathbf{M}_k}_{\substack{\text{virtuelle äußere Leistung} \\ \text{von } M \text{ Einzelkräften und } n \text{ freien Momenten}}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \left( \tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \boldsymbol{\theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right)}_{\substack{\text{virtuelle Leistung der Massenbeschleunigung} \\ \text{von } n \text{ starren Körpern}}} .$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\mathbf{v}}_{C_k}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_k$  die virtuelle Geschwindigkeit bzw. die virtuelle Drehgeschwindigkeit des  $k$ ten starren Körpers ( $k = 1, \dots, n$  bei  $n$  starren Körpern) und  $\tilde{\mathbf{v}}_m$  die virtuelle Geschwindigkeit am Angriffspunkt der  $m$ ten Einzelkraft ( $m = 1, \dots, M$ ). Sie kann nicht etwa willkürlich gewählt werden, sondern muss mit Hilfe der Geschwindigkeitsformel  $\tilde{\mathbf{v}}_m = \tilde{\mathbf{v}}_{C_i} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_i \times \mathbf{R}_{C_i m}$  der Starrkörperkinematik aus der virtuellen Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts  $\tilde{\mathbf{v}}_{C_i}$  und der virtuellen Drehgeschwindigkeit  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$  desjenigen starren Körpers mit Index  $i$  berechnet werden, auf den die Einzelkraft wirkt. Dabei ist  $\mathbf{R}_{C_i m}$  der Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des  $i$ ten starren Körpers zum Kraftangriffspunkt.

Die virtuelle innere Leistung  $\tilde{P}_i$  eines masselosen Verbindungselementes ergibt sich wie folgt:

- wird das Verbindungselement durch eine Einzelkraft  $\mathbf{F}_E$  repräsentiert, dann ist  $\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_E$ , wobei  $\Delta \tilde{\mathbf{v}}$  die virtuelle Relativgeschwindigkeit, also die Differenz der virtuellen Geschwindigkeiten am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes darstellt.
- wird das Verbindungselement durch ein freies Moment  $\mathbf{M}$  repräsentiert, dann ist  $\tilde{P}_i = \tilde{P}_a = \Delta \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{M}$ , wobei  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\omega}}$  die relative Drehgeschwindigkeit ist, also die Differenz der virtuellen Drehgeschwindigkeiten der starren Körper, zwischen denen das Verbindungselement wirkt.

Werden die virtuellen Geschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeiten der starren Körper so gewählt, dass die kinematischen Bindungen des Systems erfüllt sind,

dann müssen nur die eingeprägten Kräfte und Momente berücksichtigt werden. Sind die virtuellen Geschwindigkeiten ansonsten unabhängig voneinander, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen durch Vergleich der Koeffizienten vor den entsprechenden virtuellen Geschwindigkeiten und Drehgeschwindigkeiten.

Wird stattdessen mit der virtuellen Verschiebung bzw. der virtuellen Verdrehung projiziert, so ergibt sich die Methode der virtuellen Verschiebungen:

$$\underbrace{\tilde{W}_i}_{\text{virtuelle innere Arbeit aller Verbindungselemente}} = \underbrace{\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \mathbf{M}_k}_{\text{virtuelle äußere Arbeit von } M \text{ Einzelkräften und } n \text{ freien Momenten}} - \underbrace{\sum_{k=1}^n \left( \tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right)}_{\text{virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigung von } n \text{ starren Körpern}}.$$

Dabei bezeichnet  $\tilde{\mathbf{r}}_{C_k}$  und  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k$  die virtuelle Verschiebung bzw. die virtuelle Drehung des  $k$ ten starren Körpers ( $k = 1, \dots, n$  bei  $n$  starren Körpern) und  $\tilde{\mathbf{r}}_m$  die virtuelle Verschiebung am Angriffspunkt der  $m$ ten Einzelkraft ( $m = 1, \dots, M$ ), für die eine zur Geschwindigkeitsformel des starren Körpers analoge Gleichung  $\tilde{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_{C_i} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_i \times \mathbf{R}_{C_i m}$  erfüllt sein muss. Hierin ist  $\tilde{\mathbf{r}}_{C_i}$  die virtuelle Verschiebung des Massenmittelpunkts und  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_i$  der virtuellen Drehung desjenigen starren Körpers mit Index  $i$ , auf den die Einzelkraft wirkt. Wie vorher ist  $\mathbf{R}_{C_i m}$  der Ortsvektor vom Massenmittelpunkt des  $i$ ten starren Körpers zum Kraftangriffspunkt.

Die virtuelle innere Arbeit  $\tilde{W}_i$  eines masselosen Verbindungselementes ergibt sich wie folgt:

- wird das Verbindungselement durch eine Einzelkraft  $\mathbf{F}_E$  repräsentiert, dann ist  $\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_E$ , wobei  $\Delta \tilde{\mathbf{r}}$  die virtuelle Relativverschiebung, also die Differenz der virtuellen Verschiebungen am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes darstellt.
- wird das Verbindungselement durch ein freies Moment  $\mathbf{M}$  repräsentiert, dann ist  $\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M}$ , wobei  $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$  die relative Drehung ist, also die Differenz der virtuellen Drehungen der starren Körper, zwischen denen das Verbindungselement wirkt.

Man erkennt, dass beide Methoden völlig analog zueinander gestaltet sind, jedoch werden bei der Methode der virtuellen Geschwindigkeiten die kinematischen Bindungen auf Geschwindigkeitsebene erfüllt, während sie bei der Methode der virtuellen Verschiebungen auf Lageebene erfüllt werden. Ersteres kann bei nicht-holonomen Bindungen vorteilhaft sein.

## 10.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 9.3
- Vorlesungsvideos: 9.3
- Formelsammlung: S. 9

### 10.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art ermöglichen für holonome Systeme eine effiziente Herleitung der Bewegungsgleichungen. Sie werden aus der virtuellen Arbeitsbilanz hergeleitet, indem die virtuelle Verschiebung durch eine Variation der Verschiebung ersetzt wird, was dann durch Variation der generalisierten Koordinaten einen Koeffizientenvergleich zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen ermöglicht. Zur Auswertung der Lagrange-Gleichungen 2. Art ist es erforderlich, die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente zu berechnen.

### 10.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Prüfen Sie: Ist ein raumfestes Bezugssystem bereits vorgegeben? Falls nicht, legen Sie das raumfeste Bezugssystem fest.
- Tragen Sie die eingepprägten Kräfte und je nach Aufgabenstellung die Trägheitsreaktionen (Vorgehensweise nach d'Alembert) oder die Beschleunigungen (Vorgehensweise nach Newton) in eine Skizze ein.
- Bestimmen Sie die unabhängigen Koordinaten zur Beschreibung der Bewegung und stellen Sie geeignete kinematische Beziehungen für die abhängigen Koordinaten auf. Hierfür kann es hilfreich sein, Geschwindigkeiten, Drehgeschwindigkeiten und den bzw. die Momentanpole in die Skizze einzutragen.
- Führen Sie geeignete virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen ein. Drücken Sie analog zu den kinematischen Beziehungen abhängige virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen durch unabhängige virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen aus.
- Je nach Aufgabenstellung wählen Sie eine der folgenden Vorgehensweisen:
  - virtuelle Leistungsbilanz: Bilden Sie die virtuelle Leistung der Massenbeschleunigungen und die virtuelle Leistung der äußeren Kräfte/Momente aller Körper. Bilden Sie die virtuelle innere Leistung der masselosen Verbindungselemente.
  - virtuelle Arbeitsbilanz: Bilden Sie die virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigungen und die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte/Momente aller Körper. Bilden Sie die virtuelle innere Arbeit der masselosen Verbindungselemente.
- Werten Sie nun die virtuelle Leistungsbilanz bzw. die virtuelle Arbeitsbilanz aus.
- Verwenden Sie die kinematischen Beziehungen, um abhängige virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen und abhängige Koordinaten zu eliminieren.
- Klammern Sie die unabhängigen virtuellen Geschwindigkeiten/Verschiebungen aus und führen Sie den Koeffizientenvergleich durch, um die Bewegungsgleichungen in den unabhängigen Koordinaten der Bewegung zu erhalten.

## 10.5 Was sollte ich können?

- Ich kann Trägheitsreaktionen bzw. Beschleunigungen und ggf. weitere kinematische Größen korrekt in die Systemskizze eintragen.
- Ich bin in der Lage, die abhängigen Koordinaten der Bewegung zu ermitteln und für ihre kinematischen Beziehungen aufzustellen.
- Ich kann geeignete virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen zur Ermittlung der virtuellen Leistungen/Arbeiten einführen und abhängige virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen durch unabhängige virtuelle Geschwindigkeiten/Verschiebungen ausdrücken.
- Ich bin in der Lage, die für die Leistungsbilanz bzw. Arbeitsbilanz erforderlichen virtuellen Leistungen/Arbeiten zu berechnen, um die virtuelle Leistungsbilanz/Arbeitsbilanz auszuwerten.
- Ich habe verstanden, wie ich durch Elimination der abhängigen virtuellen Geschwindigkeiten/Verschiebungen und Koeffizientenvergleich aus der virtuellen Leistungsbilanz/Arbeitsbilanz die Bewegungsgleichungen herleiten kann.

## 10.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 9, Aufgaben 9.3, 9.4
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 750–753
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgaben D 24, D 25

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 11 Lagrange-Gleichungen 2. Art

### 11.1 Worum geht es?

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art sind ein Formalismus zur Herleitung der Bewegungsgleichungen für holonome Systeme bestehend aus Starrkörpern, Massenpunkten und masselosen Verbindungselementen. Man erhält sie aus der virtuellen Arbeitsbilanz, wenn das virtuelle Verschiebungsfeld durch eine Variation des Verschiebungsfelds nach den generalisierten Koordinaten ersetzt wird.

Man ermittelt zunächst die Anzahl  $n$  der Freiheitsgrade des Systems und führt für jeden Freiheitsgrad eine unabhängige generalisierte Koordinate  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, f$ , ein, so dass der Systemzustand eindeutig durch die generalisierten Koordinaten festgelegt wird. Das können bspw. Verschiebungen und Winkel sein. Die zeitlichen Ableitungen  $\dot{q}_i$ ,  $i = 1, \dots, f$ , der generalisierten Koordinaten heißen generalisierte Geschwindigkeiten.

Im nächsten Schritt werden die kinetische Energie  $E$  und die potentielle Energie  $V$  des Systems aufgestellt. Sowohl die kinetische als auch die potentielle Energie können zunächst mit Hilfe beliebiger, geeigneter Koordinaten formuliert werden, die dann mit Hilfe kinematischer Beziehungen durch generalisierte Koordinaten und Geschwindigkeiten ersetzt werden. Man bildet dann die Differenz  $L = E - V$ , die dann von der Zeit, den generalisierten Koordinaten und den generalisierten Geschwindigkeiten abhängt:  $L = L(q_1(t), \dots, q_f(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_f(t))$ .  $L$  wird als Lagrange-Funktional bezeichnet, da es sich streng genommen um eine skalare Funktion handelt, die wiederum von Funktionen (die generalisierten Koordinaten und Geschwindigkeiten ändern sich mit der Zeit, da sie den Systemzustand zu jedem Zeitpunkt  $t$  beschreiben) abhängt.

Liegen Kräfte oder Momente vor, die kein Potential besitzen, dann muss die Variation der Arbeit dieser Kräfte/Momente nach den generalisierten Koordinaten gebildet werden. Dabei kann zunächst die Arbeit der Kräfte/Momente mit Verschiebungen  $\mathbf{r}$  bzw.  $\varphi$  berechnet werden, wenn anschließend  $\mathbf{r}$  bzw.  $\varphi$  durch eine Variation nach den generalisierten Koordinaten ersetzt wird:

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{und} \quad \delta \varphi = \sum_{i=1}^f \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Die Variation der Arbeit der potentiallosen Kräfte/Momente lässt sich dann nach Sortieren der Terme wie folgt darstellen:

$$\delta W_a - \delta W_i = \sum_{i=1}^f Q_i^d \delta q_i.$$

Die Arbeit der auf die starren Körper bzw. die Massenpunkte wirkenden eingepägten Kräfte wird also mit positivem Vorzeichen angesetzt, die innere Arbeit der masselosen Verbindungselemente mit negativem Vorzeichen (rückstellend). Die Koeffizienten  $Q_i^d$ ,  $i = 1, \dots, f$ , werden generalisierte potentiallose Kräfte genannt.

Nachdem die entsprechenden partiellen Ableitungen des Lagrange-Funktional gebildet wurden, können die  $f$  Lagrange-Gleichungen 2. Art ausgewertet werden:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, f.$$

Man erhält so  $f$  Bewegungsgleichungen für die  $f$  generalisierten Koordinaten.

## 11.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 9.4
- Vorlesungsvideos: 9.4
- Formelsammlung: S. 10

## 11.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Für holonome Systeme stellen die Lagrange-Gleichungen 2. Art eine effiziente Möglichkeit dar, um Bewegungsgleichungen ohne Elimination der Schnittreaktionen systematisch herzuleiten. Sie bieten damit eine Alternative zur direkten Anwendung der Massenmittelpunktsätze.

Zur Untersuchung der Bewegung schwingungsfähiger Systeme und Kreisel müssen zunächst die Bewegungsgleichungen hergeleitet werden. Dies kann für holonome Systeme daher auch mit den Lagrange-Gleichungen 2. Art erfolgen.

Die Lagrange-Gleichungen 2. Art lassen sich auch auf Kontinua verallgemeinern. Ausgangspunkt hierfür sind Variationsprinzipie. Dies ist Gegenstand weiterführender Vorlesungen.

## 11.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Überlegen Sie: Wie viele Freiheitsgrade hat das System? Welche Koordinaten wären zur Beschreibung der Bewegung geeignet?
- Führen Sie geeignete Bezugssysteme ein, falls nicht vorgegeben.
- Führen sie geeignete Lagekoordinaten für die einzelnen Teilkörper ein und berechnen Sie die kinetische Energie des Gesamtsystems.
- Welche eingepprägten Kräfte und Momente besitzen ein Potential? Ermitteln Sie die potentielle Energie des Gesamtsystems.
- Berechnen Sie für die potentiallosen Kräfte/Momente die virtuelle Arbeit und ermitteln Sie daraus die generalisierten Kräfte.
- Bilden Sie die Differenz aus kinetischer und potentieller Energie des Gesamtsystems und alle für die Lagrange-Gleichungen 2. Art erforderlichen Ableitungen.
- Werten Sie nun die Lagrange-Gleichungen 2. Art aus, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

### 11.5 Was sollte ich können?

- Ich kann die Zahl der Freiheitsgrade eines holonomen diskreten Systems sicher bestimmen.
- Ich bin in der Lage, die kinetische Energie eines diskreten Systems aufzustellen.
- Ich kann sicher entscheiden, ob eine Kraft/ein Moment ein Potential besitzt oder nicht.
- Ich bin in der Lage, die potentielle Energie eines diskreten Systems aufzustellen.
- Ich kann die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte und Momente aufstellen und daraus die generalisierten Kräfte ermitteln.
- Ich kann die zur Auswertung der Lagrange-Gleichungen erforderlichen Ableitungen korrekt berechnen.
- Ich bin in der Lage, die Lagrange-Gleichungen 2. Art korrekt auszuwerten.

### 11.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 9, Aufgaben 9.5, 9.7–9.13
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.6
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.6

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 12 Stoßvorgänge

### 12.1 Worum geht es?

Stöße sind Vorgänge von kurzer Dauer. Daher spielen bei Stoßvorgängen Lageänderungen der Körper keine Rolle. Da sich die stoßbedingte Deformation nur auf einen kleinen Bereich des Körpers beschränkt, können die Körper als starr angenommen werden. Aufgrund der Größe der Stoßkraft können während des Stoßvorgangs alle anderen eingprägten Kräfte vernachlässigt werden. Reaktionskräfte sind jedoch zu berücksichtigen.

Zur Klassifizierung der Stoßvorgänge wird im Kontaktpunkt der Stoßpartner die Berührebene als Tangentialebene im Kontaktpunkt eingeführt. Der Normalenvektor dieser Berührebene wird als Stoßnormale bezeichnet. Liegen die Massenmittelpunkte der Stoßpartner auf der durch Kontaktpunkt und Stoßnormale gebildeten Geraden, dann spricht man von einem zentrischen Stoß, anderenfalls von einem exzentrischen Stoß. Sind die Geschwindigkeitsvektoren der Massenmittelpunkte parallel zur Stoßnormalen, dann liegt ein gerader Stoß vor, anderenfalls ein schiefer Stoß.

Die relevanten Gleichungen zur Beschreibung von Stoßvorgängen sind die Massenmittelpunktsätze für Impuls und Drall, die in integraler Form für jeden Stoßpartner formuliert werden:

- Massenmittelpunktsatz für den Impuls in integraler Form:

$$m(\mathbf{v}_C(t_E) - \mathbf{v}_C(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt$$

- Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form, starrer Körper:

$$\Theta^C \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_E) - \boldsymbol{\omega}(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^C dt$$

Darin bezeichnet  $t_A$  den Zeitpunkt unmittelbar vor dem Stoß und  $t_E$  den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Stoß.  $\mathbf{F}$  umfasst alle stoßrelevanten Kräfte und  $\mathbf{M}^C$  ist das entsprechende resultierende Moment. Statt des Massenmittelpunktsatzes für den Drall kann auch das Drallgesetz bezogen auf den raumfesten Punkt  $O$  betrachtet werden, wenn bspw. der Körper in einem raumfesten Punkt drehbar gelagert ist:  $\Theta^O \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_E) - \boldsymbol{\omega}(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^O dt$ .

Soll mit Hilfe der Massenmittelpunktsätze in integraler Form der kinematische Zustand der Stoßpartner vor bzw. nach dem Stoß berechnet werden, so ist dies nicht ohne Weiteres möglich, da die Stoßkraft ebenfalls unbekannt ist. Man benötigt daher eine weitere Größe, die Stoßzahl. Sie muss experimentell ermittelt werden und ist u.a. von der Materialpaarung und der Oberflächenbeschaffenheit der Stoßpartner abhängig. Die Stoßzahl ist definiert als

$$\varepsilon = -\frac{v_{P_{1,n}}(t_E) - v_{P_{2,n}}(t_E)}{v_{P_{1,n}}(t_A) - v_{P_{2,n}}(t_A)}.$$

Dabei bezeichnen  $v_{P_1,n}$  und  $v_{P_2,n}$  die Geschwindigkeiten der Stoßpartner im Kontaktpunkt in Normalenrichtung. Für einen vollplastischen Stoß ist  $\varepsilon = 0$ , der Verlust an kinetischer Energie während des Stoßvorgangs wird maximal. Dagegen bleibt die kinetische Energie bei einem vollelastischen Stoß,  $\varepsilon = 1$ , erhalten.

Für einen geraden, zentrischen Stoß gilt: Bei einem vollplastischen Stoß bewegen sich beide Körper nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit fort. Bei einem vollelastischen Stoß sind die Relativgeschwindigkeiten der Massenmittelpunkte vor und nach dem Stoß bis auf das Vorzeichen identisch. Für den allgemeinen Fall erhält man für die Geschwindigkeit im Massenmittelpunkt unmittelbar nach dem Stoß:

$$v_{C_1}(t_E) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) - \varepsilon m_2 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2},$$

$$v_{C_2}(t_E) = \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) + \varepsilon m_1 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2}.$$

Bei einem schiefen, zentrischen Stoß gelten für die Geschwindigkeitskomponente der Massenmittelpunkte in Stoßnormalenrichtung die Ergebnisse für den geraden, zentrischen Stoß weiter. Die Geschwindigkeitsanteile der Massenmittelpunkte, die in der Berührebene liegen, bleiben während des Stoßvorgangs unverändert, wenn angenommen wird, dass stoßrelevante Kräfte nur in Normalenrichtung auftreten (glatter Stoß).

Im Fall eines exzentrischen Stoßes ist die Betrachtung des Massenmittelpunktsatzes für den Drall oder des Drallgesetzes in integraler Form erforderlich. Da das resultierende Moment aus der Stoßkraft mit Hilfe des bekannten Hebelarms ermittelt werden kann, treten neben der unbekanntten Drehgeschwindigkeit keine weiteren unbekanntten Größen hinzu, so dass durch Verwendung der Stoßzahl wieder genügend viele Gleichungen zur Berechnung der unbekanntten kinematischen Größen zur Verfügung stehen.

## 12.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 10
- Vorlesungsvideos: 10
- Formelsammlung: S. 11

## 12.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Stoßvorgänge spielen in der Fahrzeug- und in der Antriebstechnik eine große Rolle.

## 12.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Welche Größen unmittelbar vor dem Stoß sind gegeben? Welche gesucht? Gibt es Größen, die erst noch durch eine Zusatzbetrachtung (z.B. Energiesatz) berechnet werden müssen. Ermitteln Sie alle bekannten Größen!

- Schneiden Sie die Stoßkörper frei und tragen Sie nur die stoßrelevanten Kräfte ein.
- Prüfen Sie, welche Massenmittelpunktsätze (Impuls, Drall) Sie aufstellen müssen und formulieren Sie die benötigten Massenmittelpunktsätze in integraler Form.
- Berücksichtigen Sie weitere Gleichungen, z.B. die Stoßzahl. Sie sollten dann genauso viele Gleichungen wie zu berechnende Größen haben.
- Lösen Sie nun die Gleichungen nach den gesuchten Größen auf.

### 12.5 Was sollte ich können?

- Ich kann kinematische Größen mit Hilfe von Energiebetrachtungen oder kinematischer Bedingungen ermitteln.
- Ich weiß, wie ich einen für Stoßprobleme geeigneten Freischnitt anfertige.
- Ich kann die Massenmittelpunktsätze für Impuls und Drall in integraler Form aufstellen.
- Ich bin in der Lage, falls erforderlich eine weitere kinematische Beziehung mit Hilfe der Stoßzahl aufzustellen.

### 12.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 6
- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. S. 579–581
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Kapitel 3.7
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.4
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.9

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 13 Schwingungen von Einfreiheitsgradsystemen

### 13.1 Worum geht es?

Eine Schwingung ist eine zeitliche Änderung eines Systemzustands, bei dem die Zustandsgröße im Allgemeinen abwechselnd zu- und abnimmt.

Die hier behandelten linearen Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad werden beschrieben durch eine Bewegungsgleichung der Form

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t).$$

Darin ist  $m\ddot{x}$  der Trägheitsterm,  $k\dot{x}$  der Dämpfungsterm,  $cx$  der Rückstellterm und  $F(t)$  der Erregerterm.

Freie Schwingungen werden beschrieben durch die homogene Bewegungsgleichung  $m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0$ . Division durch  $m$  führt auf die Standardform der Bewegungsgleichung

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m}$$

Darin steht  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$  für die Eigenkreisfrequenz der freien Schwingungen und  $D$  für das Lehrsche Dämpfungsmaß ( $2D\omega_0 = \frac{k}{m}$ ). Für den Fall  $0 < D < 1$  treten als Lösung gedämpfte Schwingungen mit Eigenkreisfrequenz  $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$  auf. Für  $D = 1$  (aperiodischer Grenzfall) und  $D > 1$  (starke Dämpfung) klingt die Lösung exponentiell ab. Die Gesamtlösung für die freien Schwingungen lautet

- bei ungedämpften Schwingungen ( $D = 0$ ):

$$x_h(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t,$$

- bei schwach gedämpften Schwingungen ( $0 < D < 1$ ):

$$x_h(t) = e^{-D\omega_0 t} (C_1 \cos \omega_d t + C_2 \sin \omega_d t).$$

Die Periodendauer der Schwingungen ergibt sich aus der Eigenkreisfrequenz zu  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  bzw.  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}$ . Die beiden Integrationskonstanten  $C_1$  und  $C_2$  sind aus Anfangsbedingungen, üblicherweise der Auslenkung und der Geschwindigkeit zu einem Zeitpunkt  $t_0$ , zu bestimmen.

Neben der Darstellung der Lösung mit zwei harmonischen Funktionen existiert auch eine Darstellung mit einer harmonischen Funktion:

- bei ungedämpften Schwingungen ( $D = 0$ ) durch  $x_h(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha)$ ,
- bei schwach gedämpften Schwingungen ( $0 < D < 1$ ) durch  $x_h(t) = A e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \alpha)$ .

Amplitude  $A$  und Phasenverschiebung  $\alpha$  ergeben sich dabei zu  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$  und  $\tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}$ .

Bei der Untersuchung der erzwungenen Schwingungen erfolgt eine Beschränkung auf harmonische Erregung der Form  $F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t)$ . Der in der Standardform verwendete Term  $\frac{F(t)}{m}$  wird dann als  $\frac{F(t)}{m} = \omega_0^2 E x_0 \cos(\Omega t)$  geschrieben, wobei  $E$  und  $x_0$  je nach Erregungsmechanismus wie folgt berechnet werden:

- am Körper direkt angreifende Kraft mit Amplitude  $F_0$ :  $E = 1$ ,  $x_0 = \frac{F_0}{c}$ ,
- am Körper angreifende Feder mit Federkonstante  $c$  und Fußpunkterregung mit Amplitude  $u_0$ :  $E = 1$ ,  $x_0 = u_0$ ,
- am Körper angreifenden Dämpfer mit Dämpfungsmaß  $D$  und Fußpunkterregung mit Amplitude  $u_0$ :  $E = 2D\eta$ ,  $x_0 = u_0$ ,
- Erregung durch eine umlaufende Unwucht (Masse  $m_0$  im Abstand  $r$ ):  $E = \eta^2$ ,  $x_0 = \frac{m_0}{m}r$ ,

wobei  $\eta$  das Frequenzverhältnis:  $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$  aus Erregerkreisfrequenz und Eigenkreisfrequenz der freien ungedämpften Schwingung bezeichnet.

Verwendet man für die partikuläre Lösung einen Ansatz analog rechter Seite,  $x_p(t) = Vx_0 \cos(\Omega t - \varepsilon)$ , dann ergeben sich die beiden Parameter des Ansatzes, die Vergrößerungsfunktion  $V$  und die Phasenverschiebung  $\varepsilon$  nach Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung und Koeffizientenvergleich zu

$$V = \frac{E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}, \quad \tan \varepsilon = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}.$$

Für  $\eta = 1$  liegt Resonanz vor, die zu vermeiden ist, da dann die Vergrößerungsfunktion bei schwacher Dämpfung sehr große Werte annimmt.

Daneben lässt sich der Erregungsterm auch als komplexer Zeiger  $y_0 e^{i\Omega t}$  darstellen, so dass für die partikuläre Lösung der Ansatz  $x_p(t) = F(i\Omega)y_0 e^{i\Omega t}$  mit dem komplexen Frequenzgang  $F(i\Omega)$  verwendet wird. Wird dieser Ansatz in die Bewegungsgleichung eingesetzt, dann ergibt sich der komplexe Frequenzgang zu

$$F(i\eta) = \frac{E}{1 - \eta^2 + i2D\eta}.$$

Vergrößerungsfunktion  $V$  und Phasenverschiebung  $\varepsilon$  können mit Hilfe des komplexen Frequenzgangs berechnet werden:  $V(\Omega) = |F(i\Omega)|$ ,  $\tan \varepsilon = -\frac{\text{Im}\{F(i\Omega)\}}{\text{Re}\{F(i\Omega)\}}$ .

Die Gesamtlösung ergibt sich durch Überlagerung der allgemeinen Lösung der homogenen Bewegungsgleichung und der partikulären Lösung, wobei aufgrund der in der Praxis stets vorhandenen Dämpfung die Lösung der homogenen Bewegungsgleichung exponentiell abklingt, so dass meist nur die partikuläre Lösung praktisch relevant ist.

## 13.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 11.1–11.4
- Vorlesungsvideos: 11.1, 11.2
- Formelsammlung: S. 12

### 13.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Das Verständnis der Vorgehensweise und der Ergebnisse für den Einfreiheitsgradschwinger ist eine wesentliche Voraussetzung, um komplexere Schwingungsphänomene wie Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen und Kontinuumschwingungen zu verstehen. Die weiterführenden Lehrveranstaltungen „Technische Schwingungslehre“ und „Maschinendynamik“ beschäftigen sich mit weiteren Schwingungsphänomenen und mit ihren technischen Anwendungen.

### 13.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Stellen Sie die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Massenmittelpunktsätze oder der Lagrange-Gleichungen 2. Art auf.
- Bringen Sie die Bewegungsgleichung in Standardform, indem Sie durch den Koeffizienten vor der zweiten Zeitableitung dividieren.
- Prüfen Sie: Liegt eine ungedämpfte oder gedämpfte Schwingung vor?
- Ermitteln Sie für eine ungedämpfte Schwingung die Eigenkreisfrequenz bzw. für die gedämpfte Schwingung Eigenkreisfrequenz, Lehrsches Dämpfungsmaß und ggf. die Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung.
- Im Falle erzwungener Schwingung müssen Sie eine partikuläre Lösung ermitteln. Hierzu können Sie zwei Vorgehensweisen verwenden:
  - Machen Sie einen Ansatz analog rechter Seite, z.B.  $x_p(t) = Vx_0 \cos(\Omega t - \varepsilon)$  bei harmonischer Erregung  $F(t) = \omega_0^2 E x_0 \cos(\Omega t)$  und bestimmen Sie durch Einsetzen des Ansatzes in die Bewegungsgleichung und Koeffizientenvergleich die Vergrößerungsfunktion  $V$  sowie die Phasenverschiebung  $\varepsilon$ .
  - Bei harmonischer Erregung stellen Sie die rechte Seite als komplexen Zeiger  $y_0 e^{i\Omega t}$  dar und verwenden für die partikuläre Lösung einen analogen Ansatz  $x_p(t) = F(i\Omega) y_0 e^{i\Omega t}$ , wobei Sie durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung den Frequenzgang  $F(i\Omega)$  ermitteln (Frequenzgangrechnung). Die Vergrößerungsfunktion  $V$  ergibt sich aus dem Betrag des Frequenzgangs ( $V(\Omega) = |F(i\Omega)|$ ), die Phasenverschiebung  $\varepsilon$  aus dem Verhältnis von Imaginär- und Realteil:  
$$\tan \varepsilon = -\frac{\operatorname{Im}\{F(i\Omega)\}}{\operatorname{Re}\{F(i\Omega)\}}.$$
- Die Gesamtlösung erhalten Sie durch Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und der partikulären Lösung. Sie muss noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

### 13.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, für ein Einfreiheitsgradsystem die Bewegungsgleichung mit Hilfe der Massenmittelpunktsätze bzw. der Lagrange-Gleichungen 2. Art korrekt herzuleiten.
- Ich kann die Bewegungsgleichung in Standardform überführen und die Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung sowie das Dämpfungsmaß aus den Koeffizienten korrekt ermitteln.

- Mit Hilfe der Eigenkreisfrequenz kann ich die Periodendauer der ungedämpften sowie ggf. der gedämpften Schwingung ermitteln.
- Für die inhomogene Bewegungsgleichung gelingt es mir, mit Hilfe eines Ansatzes analog zur rechten Seite oder der komplexen Frequenzgangrechnung eine partikuläre Lösung zu bestimmen.
- Ich bin in der Lage, Vergrößerungsfunktion und Phasenverschiebung zu berechnen.
- Ich bin in der Lage, die Gesamtlösung der Bewegungsgleichungen aufzustellen.
- Ich kann die Anfangsbedingungen korrekt ermitteln und bin in der Lage, die Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen anzupassen.

### 13.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- D. Gross, W. Ehlers, P. Wriggers, J. Schröder, R. Müller: Formeln und Aufgaben zur Technischen Mechanik 3, 13. Auflage, Springer, Vieweg, Berlin, Heidelberg, 2022. Kapitel 7, Aufgaben 7.1–7.3, 7.7–7.11, 7.13–7.21
- A. Jahr, J. Berger: Klausurentrainer Technische Mechanik. Springer, Vieweg, 4. Auflage, Wiesbaden, 2017. Aufgaben D 39–D 46
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.5, Aufgaben 1–6, 8, 10–13
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.7

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 14 Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen

### 14.1 Worum geht es?

Die ausführliche Behandlung von Mehrfreiheitsgradsystemen ist im Rahmen der Vorlesung nicht möglich. Daher erfolgt eine Beschränkung auf Zweifreiheitsgradsysteme. Bei diesen Systemen tritt im Vergleich zum Einfreiheitsgradsystem ein neues Phänomen auf: die Schwingungstilgung. Sie tritt bei harmonischer Erregung einer Masse auf, wenn die zweite Masse gegenphasig zur Erregung schwingt, so dass sich harmonische Erregung und die durch Schwingung der zweiten Masse wirkende Kraft auf die erste Masse gerade kompensieren, die daher in Ruhe bleibt.

Der Rechengang folgt der Vorgehensweise des Einfreiheitsgradsystems. Es werden zunächst die Bewegungsgleichungen aufgestellt. Anschließend wird die allgemeine Lösung der homogenen Bewegungsgleichungen ermittelt und dann eine partikuläre Lösung berechnet. Bei der Lösung der homogenen Bewegungsgleichungen wird mit einem Exponentialansatz  $q_k(t) = C_k e^{\lambda t}$ ,  $k = 1, 2$  gearbeitet, wobei  $q_k(t)$  die den Freiheitsgraden zugeordneten generalisierten Koordinaten bezeichnet. Einsetzen in die homogenen Bewegungsgleichungen führt dann auf ein homogenes lineares Gleichungssystem für die beiden unbekanntenen Amplituden  $C_1$  und  $C_2$ . Ist die Koeffizientenmatrix regulär, dann besitzt dieses Gleichungssystem die eindeutige Lösung  $C_1 = 0$  und  $C_2 = 0$ . Diese Lösung, die als triviale Lösung bezeichnet wird, ist unbrauchbar, da dann keine Bewegung stattfindet. Nichttriviale Lösungen ergeben sich nur dann, wenn die Koeffizientenmatrix singular ist. Dazu muss der Parameter  $\lambda$  so ermittelt werden, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Dies führt auf ein charakteristisches Polynom für  $\lambda$ , das in der Regel auf zwei Lösungen, die Eigenwerte führt. Ihre Imaginärteile sind die Eigenkreisfrequenzen. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor. Er wird berechnet, indem für  $\lambda$  der Eigenwert eingesetzt und das homogene lineare Gleichungssystem nach  $C_1$  und  $C_2$  aufgelöst wird. Da die Koeffizientenmatrix singular ist, ist die Lösung des linearen Systems nicht eindeutig, sondern nur bis auf einen Faktor bestimmt. Die gesamte Lösung der homogenen Bewegungsgleichungen ergibt sich durch Überlagerung der Lösungen für jeden Eigenwert.

Eine partikuläre Lösung lässt sich bei harmonischer Erregung durch einen Ansatz analog zur rechten Seite ermitteln. Für  $F(t) = c_0 Y_0 \cos(\Omega t)$  lautet der Ansatz:

$$\begin{aligned}q_{1,p}(t) &= V_1 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_1), \\q_{2,p}(t) &= V_2 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen liefert nach Vergleich der Koeffizienten vor den harmonischen Funktionen ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der beiden Vergrößerungsfunktionen  $V_1$  und  $V_2$  sowie die beiden Phasenverschiebungen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ . Sind die beiden Eigenkreisfrequenzen verschieden, dann existieren zwei Resonanzstellen. Daneben kann es, wie oben beschrieben, zur Schwingungstilgung kommen.

Die Gesamtlösung ergibt sich wie beim Einfreiheitsgradschwinger durch Überlagerung der Lösung der homogenen Bewegungsgleichung und der partikulären Lösung. Sie muss an die Anfangswerte für die generalisierten Koordinaten und die generalisierten Geschwindigkeiten angepasst werden.

## 14.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 11.5
- Vorlesungsvideos: 11.3
- Formelsammlung: S. 13

## 14.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Schwingungen von Mehrfreiheitsgradsystemen sind für viele Technische Anwendungen relevant, so z.B. in der Rotordynamik, der Fahrzeugdynamik und beim Verständnis des Körperschalls. Werden die Bewegungsgleichungen für Kontinuumschwingungen mit einem numerischen Verfahren diskretisiert, so erhält man gewöhnliche Differentialgleichungen, die den Bewegungsgleichungen von Mehrfreiheitsgradsystemen entsprechen.

## 14.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Massenmittelpunktsätze oder der Lagrange-Gleichungen 2. Art auf.
- Zur Untersuchung der freien Schwingungen (allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung) verwenden Sie für die beiden generalisierten Koordinaten  $q_1$  und  $q_2$  einen Exponentialansatz  $q_k(t) = C_k e^{\lambda t}$ ,  $k = 1, 2$ .
- Setzen Sie den Exponentialansatz in die homogenen Bewegungsgleichungen ein, um das homogene lineare Gleichungssystem für die beiden Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  zu erhalten.
- Bestimmen Sie die beiden Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren für die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems. Die Imaginärteile der beiden Eigenwerte sind dann die Eigenkreisfrequenzen. Der zum Eigenwert gehörende Eigenvektor liefert die Amplituden  $C_1$ ,  $C_2$  zur jeweiligen Eigenkreisfrequenz, die allerdings nur bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt sind.
- Zur Untersuchung der erzwungenen Schwingungen verwenden Sie für die partikuläre Lösung einen Ansatz analog rechter Seite, z.B. für harmonische Erregung  $F(t) = c_0 Y_0 \cos(\Omega t)$ :

$$q_{1,p}(t) = V_1 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_1)$$

$$q_{2,p}(t) = V_2 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_2)$$

- Bestimmen Sie die beiden Vergrößerungsfunktionen  $V_1$  und  $V_2$  durch Einsetzen des Ansatzes in die inhomogene Bewegungsgleichung und Lösen des linearen Gleichungssystems.

- Die Vergrößerungsfunktionen sind abhängig von der Erregerfrequenz. Prüfen Sie, ob es eine Erregungsfrequenz gibt, für die eine Vergrößerungsfunktion verschwindet (Tilgung) und ob es Erregungsfrequenzen gibt, bei denen eine Vergrößerungsfunktion gegen unendlich tendiert (Resonanz).
- Die Gesamtlösung erhalten Sie durch Superposition der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und der partikulären Lösung. Sie muss noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

### 14.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, die Bewegungsgleichungen eines Schwingers mit mehreren Freiheitsgraden mit Hilfe der Massenmittelpunktsätze bzw. der Lagrange-Gleichungen herzuleiten.
- Ich bin in der Lage, das homogene lineare Gleichungssystem zur Beschreibung der freien Schwingungen durch Einsetzen des Exponentialansatzes aufzustellen.
- Ich kann das Eigenwertproblem für die Koeffizientenmatrix des homogenen linearen Gleichungssystems lösen und die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen.
- Für die inhomogene Bewegungsgleichung gelingt es mir, mit Hilfe eines Ansatzes analog zur rechten Seite eine partikuläre Lösung zu bestimmen.
- Ich bin in der Lage, die Vergrößerungsfunktionen zu ermitteln sowie Resonanz- und Tilgungsfrequenzen der Erregung aufzufinden.
- Ich bin in der Lage, die Gesamtlösung der Bewegungsgleichungen aufzustellen.
- Ich kann die Anfangsbedingungen korrekt ermitteln und bin in der Lage, die Gesamtlösung an die Anfangsbedingungen anzupassen.

### 14.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.8

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.

## 15 Kreiseltheorie

### 15.1 Worum geht es?

Ein Kreisel ist ein starrer Körper, der an einem raumfesten Punkt fixiert ist, so dass er eine räumliche, aber rein rotatorische Bewegung um den Fixpunkt ausführt. Etwas allgemeiner untersucht die Kreiseltheorie die Bewegung rotierender Körper. Ausgangspunkt für die Untersuchung der Rotationsbewegung sind die Eulerschen Kreiselgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) &= M_1^O, \\ \dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) &= M_2^O, \\ \dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) &= M_3^O.\end{aligned}$$

Dabei ist  $O$  der raum- und körperfeste Punkt, an dem der starre Körper fixiert ist und  $\theta_1^O, \theta_2^O, \theta_3^O$  sind seine drei Hauptträgheitsmomente. Daher sind auch die drei Koordinaten des Drehgeschwindigkeitsvektors und des resultierenden Moments im Hauptachsensystem zu ermitteln.

Anders als die bereits behandelten Bewegungsgleichungen der Schwingung von Ein- und Mehrfreiheitsgradsystemen sind die Eulerschen Kreiselgleichungen nicht-linear. Eine Lösung ist daher nur in Sonderfällen möglich. Einer dieser Sonderfälle ist der kräftefreie Kreisel, für den das resultierende Moment, also die rechte Seite der Eulerschen Kreiselgleichungen verschwindet. Da die Eulerschen Kreiselgleichungen aus dem Drallgesetz hergeleitet wurden, folgt daraus die Konstanz des Drallvektors.

Bei einem symmetrischen, kräftefreien Kreisel bewegt sich die Symmetrieachse, die in der Kreiseltheorie als Figurenachse bezeichnet wird, auf dem Mantel eines Kreiskegels (dem Nutationskegel) um den Drallvektor. Der Drehgeschwindigkeitsvektor umfährt den Drallvektor ebenfalls auf dem Mantel eines Kreiskegels, dem Spurkegel. Auf dem raumfesten Spurkegel rollt der Gangpolkegel ab, dessen Achse die Figurenachse des Kreisels ist.

Die Eulerschen Kreiselgleichungen können auch dazu verwendet werden, bei vorgegebener Rotationsbewegung das resultierende Moment, bspw. zur Auslegung von Lagern zu berechnen.

### 15.2 Wo finde ich weitere Informationen?

- Skript: Kapitel 12
- Vorlesungsvideos: 12
- Formelsammlung: S. 14

### 15.3 Wo wird das später noch gebraucht?

Kreiselbewegungen spielen nicht nur bei Satelliten und Kompassen bzw. allgemein in der Luft- und Raumfahrttechnik eine Rolle, sondern auch in der Fahrzeugtechnik (Sinuslauf von Schienenfahrzeugen) und der Rotordynamik insbe-

sondere bei fliegender Lagerung. Letzteres wird in der weiterführenden Vorlesung "Maschinendynamik" behandelt.

#### 15.4 Wie gehe ich bei den Aufgaben vor?

- Legen Sie das raumfeste Bezugssystem und das körperfeste Bezugssystem, in der Regel ein Hauptachsensystem (Symmetriachsen des Körpers!), fest, falls die Bezugssysteme nicht schon vorgegeben sind.
- Stellen Sie den Drehgeschwindigkeitsvektor im Hauptachsensystem auf. Verwenden Sie dazu eventuell Elementardrehungen.
- Finden Sie einen geeigneten Bezugspunkt für den Massenträgheitstensor und das resultierende Moment, falls nicht bereits vorgegeben. Dies kann der Massenmittelpunkt des starren Körpers, ein Punkt auf der Drehachse oder ein raum- und körperfester Punkt sein, an dem der Körper drehbar gelagert ist. Stellen Sie den Massenträgheitstensor im Hauptachsensystem auf.
- Ermitteln Sie das resultierende Moment für den gewählten Bezugspunkt. Hierfür kann ein Freischnitt hilfreich sein.
- Werten Sie das Drallgesetz bzw. den Massenmittelpunktsatz für den Drall aus, um die Bewegungsgleichungen zu erhalten.

#### 15.5 Was sollte ich können?

- Ich bin in der Lage, das Hauptachsensystem für den Massenträgheitstensor mit Hilfe von Symmetriebetrachtungen zu ermitteln.
- Ich bin in der Lage, den Drehgeschwindigkeitsvektor auch für eine Drehung um mehrere Achsen zu ermitteln und ggf. in das Hauptachsensystem des Massenträgheitstensors zu überführen.
- Mir gelingt die korrekte Berechnung des Massenträgheitstensors im Hauptachsensystem.
- Die Berechnung des resultierenden Moments beherrsche ich sicher.
- Ich kann das Drallgesetz bzw. den Massenmittelpunktsatz auswerten, um Gleichungen zu erhalten, die die räumliche Bewegung eines starren Körpers beschreiben.

#### 15.6 Wo finde ich weitere Übungsaufgaben?

- R. C. Hibbeler: Technische Mechanik 3, Dynamik, 14. Auflage, Pearson, München, 2021. Beispiele 10.8–10.10
- H. Ulbrich, H.-J. Weidemann, F. Pfeiffer: Technische Mechanik in Formeln, Aufgaben und Lösungen, 3. Auflage, Teubner, Wiesbaden, 2006. Kapitel 4.2, Aufgaben 10, 11
- S. Kessel: Technische Mechanik, Aufgabensammlung mit Musterlösungen, Universität Dortmund, 2014. Kapitel 4.3

Bitte beachten Sie, dass die Links nur im KIT-Netz oder über VPN funktionieren.