



Skript zur Vorlesung

Technische Mechanik III

Prof. Dr.-Ing. C. Proppe
Institut für Technische Mechanik
Karlsruher Institut für Technologie

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	7
1.1	Was ist Technische Mechanik?	7
1.2	Physikalische Grundlagen der Mechanik	7
1.2.1	Physikalische Größen und Größensysteme	7
1.2.2	Physikalische Beziehungen	8
1.2.3	Schema zur Lösung eines physikalischen Problems	9
1.2.4	Physikalischer Raum, Zeitablauf, Materie	10
1.2.5	Materielle Medien, Bewegungen und Kräfteeinwirkungen .	13
1.2.6	Körper	13
1.3	Einteilung der Mechanik	17
1.4	Zur Axiomatik der Mechanik	17
2	Massenpunktkinematik	20
2.1	Bewegung eines Massenpunkts	21
2.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung	22
2.2.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung in orthogonalen Ko- ordinatensystemen	24
2.2.2	Geschwindigkeit und Beschleunigung in der begleitenden Basis der Bewegungsbahn	28
2.2.3	Geschwindigkeit und Beschleunigung in bewegten Bezugs- systemen	33
3	Kinematik der Kontinua	49
3.1	Bewegung eines Körpers	49
3.2	Materielle und räumliche Parametrisierung der Bewegung	50
3.3	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eines Körpers	53
3.3.1	Definition des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeldes	53
3.3.2	Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Kör- pers	55
3.4	Verzerrungszustand eines deformierbaren Körpers	63
4	Geführte Bewegungen	66
4.1	Freiheitsgrade von Körpern und Körpersystemen	66
4.1.1	Freiheitsgrade des Massenpunkts	66
4.1.2	Freiheitsgrade deformierbarer Körper und materiell offe- ner Systeme	67
4.1.3	Freiheitsgrade des starren Körpers	67
4.2	Bindungen	69
5	Massenkinematische Größen eines Körpers	73
5.1	Massendichte und Masse	73
5.2	Statisches Massenmoment und Massenmittelpunkt	74
5.3	Impuls und Drall	77
6	Dynamische Größen	80
6.1	Kraftdichten, Kräfte und Momente	80
6.2	Dyname einer Kraftdichte	83
6.3	Momentenversetzungsgleichung	85
6.4	Versetzen einer Dyname und Dynamenäquivalenz	86

6.5	Einzelkräfte und freie Momente	87
6.6	Einteilung der Dynamen	90
7	Dynamische Axiome der Mechanik	92
7.1	Impulsgesetz und Drallgesetz	92
7.2	Schneiden, Freischneiden, Eulersches Schnittprinzip	93
8	Dynamische Sätze der Mechanik	96
8.1	Gegenwirkungssatz	96
8.2	Sätze für den Massenmittelpunkt	98
8.3	Impuls- und Drallgesetz im bewegten Bezugssystem	102
8.4	Räumliche Dynamik des starren Körpers	107
8.4.1	Drall und Massenträgheitstensor des starren Körpers . . .	107
8.4.2	Änderung des Bezugspunkts: Satz von Steiner	113
8.4.3	Drehung der Basisvektoren	114
8.4.4	Eulersche Kreiselgleichungen	115
8.5	Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua	120
8.6	Statik als Spezialfall der Dynamik	122
9	Analytische Methoden der Mechanik	123
9.1	Kinetische Energie, Leistung	123
9.1.1	Kinetische Energie	124
9.1.2	Äußere Leistung	126
9.1.3	Innere Leistung	129
9.2	Mechanische Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen	130
9.2.1	Der allgemeine Leistungssatz	130
9.2.2	Spezielle Leistungssätze	131
9.2.3	Arbeit, Arbeitssätze und Energiesatz	133
9.2.4	Potentielle Energie konservativer Dynamen	137
9.3	Virtuelle Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen	143
9.3.1	Die Methode der virtuellen Geschwindigkeiten	144
9.3.2	Methode der virtuellen Verschiebungen	147
9.4	Lagrange-Gleichungen 2. Art	151
9.4.1	Generalisierte Kräfte	155
9.4.2	Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art	157
10	Stoßvorgänge	167
10.1	Gerader zentrischer Stoß	169
10.2	Schiefer zentrischer Stoß	172
10.3	Exzentrischer Stoß in der Ebene	172
11	Schwingungen	176
11.1	Erscheinungsformen, Beispiele	176
11.2	Freie Schwingungen	180
11.2.1	Ungedämpfte Schwingungen	181
11.2.2	Gedämpfte Schwingungen	183
11.3	Erzwungene Schwingungen	186
11.4	Frequenzgangrechnung	190
11.5	Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden	194
11.5.1	Freie (ungedämpfte) Schwingungen	194

11.5.2 Erzwungene Schwingungen	197
11.6 Schwingende Kontinua	199
12 Kreiseltheorie	206
12.1 Bewegungsgleichungen	206
12.2 Kräftefreier Kreisel	206
12.3 Nicht kräftefreier Kreisel	211
A Verzeichnis der Definitionen	213
B Verzeichnis der Axiome	215
C Verzeichnis der Sätze	216

Symbolverzeichnis

Materielle Medien

\mathcal{B}	Körper	–
\mathcal{V}	Momentanlage	–
\mathcal{S}	Oberfläche	–
\mathcal{P}	materieller Punkt	–

Geometrische Größen

x, y, z	kartesische Koordinaten	m
R, φ, z	zylindrische Koordinaten	m, 1, m
r, ϑ, φ	sphärische Koordinaten	m, 1, 1
ψ, ϑ, φ	Euler-Winkel	1, 1, 1
T	Drehmatrix (Transformationsmatrix)	–
e_t, e_n, e_b	begleitende Basis	–
s	Bogenlänge	m
K	Krümmung	m^{-1}
ρ_K	Krümmungsradius	m

Kinematische Größen

e_i	Bezugsbasis eines raumfesten Bezugssystems	–
t	Zeit	s
r	Ortsvektor im raumfesten Bezugssystem	m
v	Geschwindigkeitsvektor im raumfesten Bezugssystem	$m s^{-1}$
ω	Drehgeschwindigkeitsvektor	s^{-1}
a	Beschleunigungsvektor im raumfesten Bezugssystem	$m s^{-2}$
α	Drehbeschleunigungsvektor	s^{-2}

Relativkinematische Größen

\tilde{e}_i	Bezugsbasis eines bewegten Bezugssystems	–
\tilde{r}	Ortsvektor im bewegten Bezugssystem	m
v_F	Führungsgeschwindigkeit	$m s^{-1}$
v_{rel}	Relativgeschwindigkeit	$m s^{-1}$
a_F	Führungsbeschleunigung	$m s^{-2}$
a_{Cor}	Coriolisbeschleunigung	$m s^{-2}$
a_{rel}	Relativbeschleunigung	$m s^{-2}$

Massenkinematische Größen

m	Masse	kg
ρ	Massendichte	$kg m^{-3}$
H^Q	statisches Massenmoment bzgl. Q	kg m
I	Impuls	$kg m s^{-1}$
D^Q	Drall bzgl. Q	$kg m^2 s^{-1}$
C	Massenmittelpunkt	–
Θ^Q	Massenträgheitstensor	$kg m^2$

Dynamische Größen

f_s	Flächenkraftdichte	$N m^{-2}$
-------	--------------------	------------

t	Spannungsvektor	N m^{-2}
σ	Spannungstensor	N m^{-2}
ϵ	linearisierter Verzerrungstensor	1
f_V	Volumenkraftdichte	N m^{-3}
F_S	Flächenkraft	N
F_V	Volumenkraft	N
F	resultierende Kraft	N
M_S^Q	Moment der Flächenkraftdichte bzgl. Q	N m
M_V^Q	Moment der Volumenkraftdichte bzgl. Q	N m
M^Q	resultierendes Moment bzgl. Q	N m
(F, A, M^A)	Dyname	$\text{N}, -, \text{Nm}$
(F, A)	Einzelkraft	$\text{N}, -$
M_A^B	Versetzungsmoment einer Einzelkraft (F, A) nach B	N m
g	Erdgravitationsfeldstärke	N kg^{-1}
G	Gewichtskraft	N
R	Gleitkraft	N
H	Haftkraft	N
μ_0	Haftbeiwert	1
μ	Reibbeiwert	1
c	Federsteifigkeit	N m^{-1}
k	Dämpferparameter	N s m^{-1}

Analytische Mechanik

E	kinetische Energie	J
E_{tr}	translatorischer Anteil der kinetischen Energie	J
E_{rot}	rotatorischer Anteil der kinetischen Energie	J
P_a	äußere Leistung	W
P_i	innere Leistung	W
W_a	äußere Arbeit	J
W_i	innere Arbeit	J
V	potentielle Energie	J
V_a	äußere Potentialfunktion	J
V_i	innere Potentialfunktion	J
\tilde{r}	virtuelle Verschiebung	m
\tilde{v}	virtuelle Geschwindigkeit	m s^{-1}
δ	Variationsoperator	–
q	Vektor der generalisierten Koordinaten	unterschiedlich
Q	generalisierte Kraft	unterschiedlich
L	Lagrangefunktional	J

Schwingungen

ω_0	Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung	s^{-1}
ω_d	Eigenkreisfrequenz der gedämpften Schwingung	s^{-1}
Ω	Erregerkreisfrequenz	s^{-1}
η	Frequenzverhältnis	1
D	Lehrsches Dämpfungsmaß	1
V	Vergrößerungsfunktion	–
ϵ	Phasenverschiebung (Nacheilwinkel)	1

1 Einleitung

1.1 Was ist Technische Mechanik?

Mechanik ist die Lehre von materiellen Medien sowie von Bewegungen dieser Medien unter Kräfteeinwirkungen. Bewegungen und Kräfteeinwirkungen bilden die Gesamtheit der mechanischen Erscheinungen materieller Medien.

Wir werden im Folgenden die **klassische Mechanik** behandeln. Die klassische Mechanik ist in ihrem Gültigkeitsbereich auf Geschwindigkeiten beschränkt, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind (im Gegensatz zu Relativitätstheorien) und auf Längen, die groß genug sind, dass das wellenartige Verhalten der Materie keine Rolle spielt (im Gegensatz zur Quantenmechanik).

1.2 Physikalische Grundlagen der Mechanik

Mechanik ist das älteste Teilgebiet der Physik. Die Hauptaufgaben der Physik bestehen im Erkennen und Aufspüren der Gesetzmäßigkeiten der in der Natur vorkommenden Erscheinungen sowie in der Untersuchung der Beziehungen zwischen physikalischen Objekten und Vorgängen.

1.2.1 Physikalische Größen und Größensysteme

Messbare Eigenschaften physikalischer Objekte werden **physikalische Größen** genannt.

Beispiele physikalischer Größen:

1. Skalare Größen:
z.B. Masse, Länge, Zeit, Temperatur, Leistung, Arbeit, kinetische und potentielle Energie.
2. Vektorielle Größen:
z.B. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Impuls, Drall, Kraft, Moment.
3. Tensorielle Größen:
z.B. Massenträgheitstensor, Spannungstensor, Verzerrungstensor.

Einheiten sind stets physikalische Skalare. Allgemein schreibt man

$$\underbrace{G}_{\text{physikalische Größe}} = \underbrace{\{G\}}_{\text{Maß}} \underbrace{[G]}_{\text{Einheit}} .$$

Je nach Art der physikalischen Größe ist das Maß ein Skalar, ein Vektor oder ein Tensor höherer Stufe, z.B. für die Masse: $5 \text{ kg} = \underbrace{5}_{\text{Skalar}} \cdot \underbrace{\text{kg}}_{\text{Einheit}} .$

Skalare Größen teilt man ein in

1. **Basisgrößen** als voneinander unabhängige und durch geeignete Messverfahren eingeführte physikalische Skalare und in
2. **abgeleitete Größen** als physikalische Skalare, die sich als Potenzprodukte aus Basisgrößen darstellen lassen.

Die Gesamtheit skalarer Größen bildet das (vollständige) **Größensystem**. Es wird auf den sieben, in dem nachstehenden Diagramm in Klammern aufgeführten Basisgrößen des internationalen Größensystems, SI-System genannt, aufgebaut (siehe hierzu auch die DIN-Norm 1301). Es ist zweckmäßig, davon Teilsysteme zu bilden. Die in der Physik gebräuchlichen Teilsysteme lassen sich in dem nachstehenden Schema derart anordnen, dass in jedem nachfolgenden System alle Basisgrößen des vorangegangenen Systems zuzüglich einer einzigen neuen, in Klammern angegebenen Basisgröße auftreten:

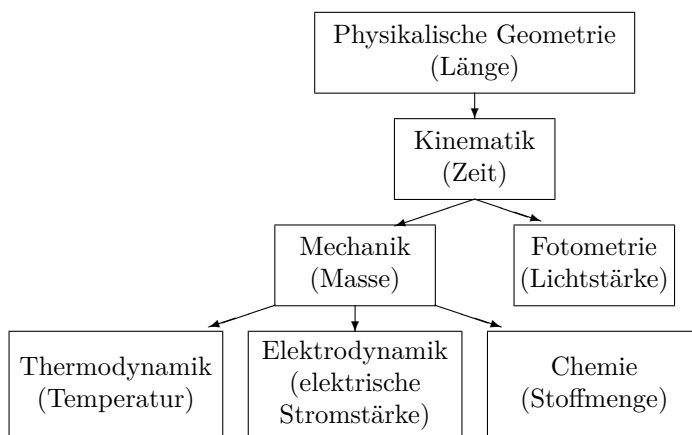
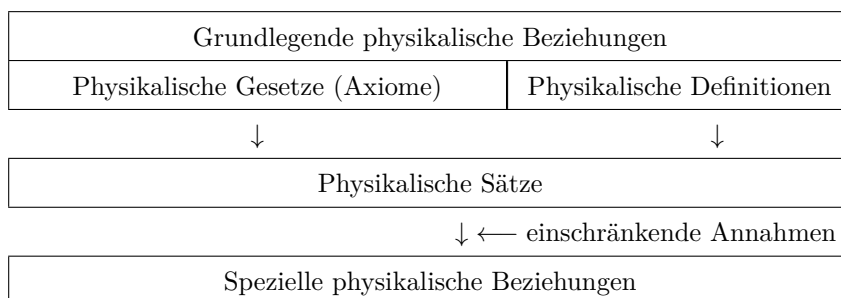


Abb. 1.1: Schema der SI-Teilsysteme.

1.2.2 Physikalische Beziehungen

Der Zusammenhang zwischen physikalischen Größen wird durch **physikalische Beziehungen** beschrieben. Physikalische Beziehungen werden meistens in Form von Gleichungen, seltener in Form von Ungleichungen formuliert. Sie lassen sich wie folgt einteilen:



Tab. 1.1: Klassifikation physikalischer Beziehungen.

Physikalische Axiome sind nicht beweisbare, jedoch durch die menschliche Erfahrung oder durch ein Experiment überprüfbare physikalische Beziehungen

oder Aussagen. Physikalische Axiome werden auch **Gesetze**, **Grundgesetze**, **Prinzipie** und in der Thermodynamik auch **Hauptsätze** genannt.

Eine **physikalische Definition** ist eine Beziehung, die der Einführung einer physikalischen Größe oder Eigenschaft mit Hilfe bereits eingeführter physikalischer Größen oder Eigenschaften dient.

Ein **physikalischer Satz** ist eine physikalische Aussage, die aus einer Voraussetzung und einer Behauptung besteht, wobei die Behauptung aus der Voraussetzung mit Hilfe der mathematischen Beweistechnik bewiesen werden kann.

Aus den Sätzen gewinnt man mit Hilfe einschränkender Annahmen **spezielle physikalische Beziehungen**, die ebenfalls einen Satzcharakter besitzen, jedoch nicht so allgemein wie die Sätze sind.

Mit Hilfe der postulierten Axiome und Definitionen sowie der aus ihnen hergeleiteten Sätze und speziellen Beziehungen können unter Verwendung der Mittel der Mathematik physikalische Probleme gelöst werden. Die Lösung eines physikalischen Problems verläuft nach folgendem Schema in vier Schritten.

1.2.3 Schema zur Lösung eines physikalischen Problems

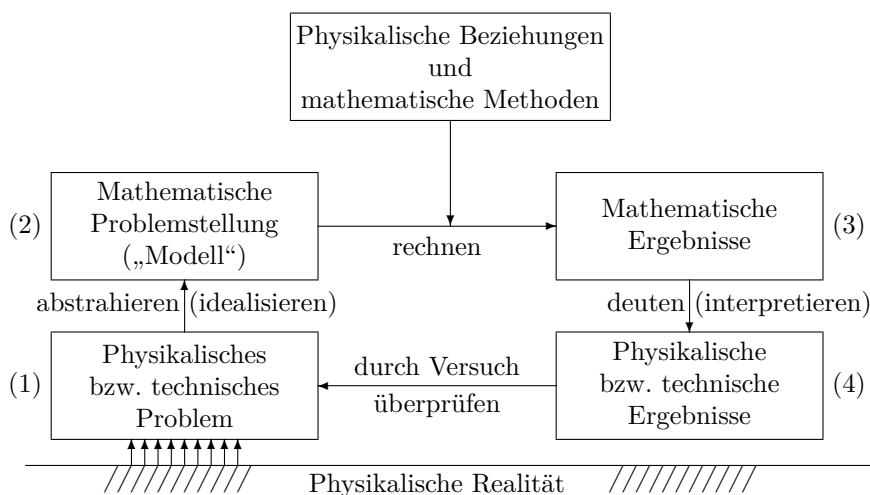


Abb. 1.2: Schema zur Lösung eines physikalischen Problems.

- (1) Jedes **physikalische** oder **technische Problem** muss erst den mathematischen Berechnungen zugänglich gemacht werden. Dies geschieht auf dem Wege der **Idealisierung**, d.h. des Weglassens aller unwesentlichen Eigenschaften der untersuchten physikalischen Objekte.
- (2) Dadurch entsteht ein **Modell**, d.h. eine mathematische Problemstellung, die nur die wesentlichen Eigenschaften des ursprünglichen physikalischen

Problems enthält. Mit Hilfe dieses Modells werden unter Verwendung geeigneter physikalischer Beziehungen und mathematischer Methoden Ergebnisse **berechnet**.

- (3) Die gewonnenen **mathematischen Ergebnisse** müssen **interpretiert**, d.h. auf ihren physikalischen Inhalt hin geprüft werden, denn nicht alle mathematisch korrekten Ergebnisse sind physikalisch sinnvoll.
- (4) Die gewonnenen **physikalischen** oder **technischen Ergebnisse** werden gegebenenfalls **experimentell überprüft**.

1.2.4 Physikalischer Raum, Zeitablauf, Materie

Den Ausgangspunkt der mechanischen Betrachtungen bilden die drei grundlegenden Begriffe Raum, Zeitablauf und Materie. Sie werden in der Physik axiomatisch eingeführt und besitzen messbare Eigenschaften:

Physikalischer Begriff	Messbare Eigenschaft	Basiseinheit
Physikalischer Raum	Länge	das Meter
Zeitablauf	Zeit	die Sekunde
Materie	Masse	das Kilogramm

Tab. 1.2: Grundlegende physikalische Begriffe der Mechanik und ihre messbaren Eigenschaften.

Länge, Zeit und Masse sind drei (der insgesamt sieben) Basisgrößen des internationalen SI-Größensystems (vgl. Diagramm am Ende von Abschnitt 1.2.1). Sie sind die drei Basisgrößen des mechanischen Größensystems.

Physikalische Vorgänge finden im Raum und in der Zeit statt. Raum und Zeitablauf sind Gedankenkonstruktionen, die zur Beschreibung physikalischer Zustände und Zustandsänderungen dienen. Die Vorstellung vom Raum ist nur auf Grund unserer Wahrnehmung der Materie möglich. Unsere Vorstellung vom Zeitablauf ist durch die Bewegung materieller Körper bedingt.

Der Raum, in dem die nichtrelativistischen physikalischen Vorgänge stattfinden, ist der **dreidimensionale physikalische Raum** unserer Anschauung. Er ist ein Euklidischer Punktraum, dessen Struktur sich vom \mathbb{R}^3 dadurch unterscheidet, dass der Koordinatenursprung nicht festgelegt ist. Daher ist es nur sinnvoll, mit der Differenz zweier Punkte zu arbeiten, die dann ein Vektor ist, nicht jedoch mit der Summe zweier Punkte.

Mit Festlegung eines Punkts im Raum als Koordinatenursprung und der Wahl der Basisvektoren lässt sich dann die Lage jedes Punkts im Raum durch Koordinaten beschreiben. Man beachte: die Koordinaten eines Punkts in einem Euklidischen (mathematischen) Punktraum sind (reelle) Zahlen. Dagegen sind

die Koordinaten eines Punkts in einem physikalischen Raum physikalische Skalare mit der Einheit der Länge. So ist z.B.: $5 \text{ m} = \{5\}[\text{m}]$.

Häufig werden folgende Koordinatensysteme verwendet:

1. kartesische Koordinaten x, y, z
2. zylindrische Koordinaten R, φ, z (Zylinderkoordinaten)
3. sphärische Koordinaten r, ϑ, φ (Kugelkoordinaten)

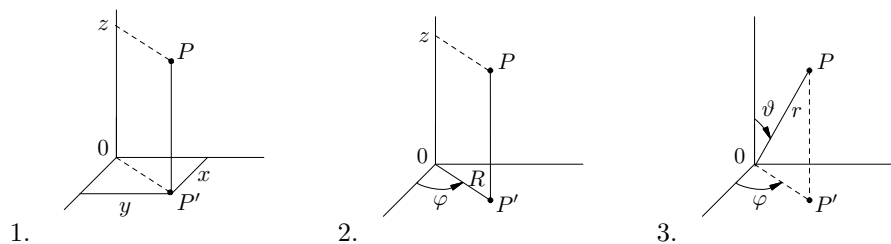


Abb. 1.3: Kartesische (1.), zylindrische (2.) und sphärische (3.) Koordinaten.

Zwischen den kartesischen, zylindrischen und sphärischen Koordinaten bestehen die Abb. 1.4 zu entnehmenden Beziehungen, **Transformationsgleichungen** genannt:

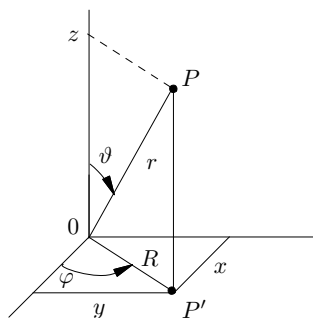


Abb. 1.4: Transformation zwischen kartesischen, zylindrischen und sphärischen Koordinaten.

1. Beim Übergang von R, φ, z zu x, y, z gilt

$$x = R \cos \varphi; \quad y = R \sin \varphi; \quad z = z. \quad (1.1)$$

2. Beim Übergang von r, ϑ, φ zu R, φ, z gilt

$$R = r \sin \vartheta; \quad z = r \cos \vartheta; \quad \varphi = \varphi. \quad (1.2)$$

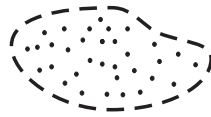
3. Nach Einsetzen von (1.2) in (1.1) folgt dann für den Übergang von r, ϑ, φ zu x, y, z :

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad z = r \cos \vartheta.$$

Die Zeit t ist ein physikalischer Skalar. Es gilt: $t = \{t\}[t]$. Die Maßzahl $\{t\}$ der Zeit ist eine reelle Variable.

Bei der Betrachtung der Materie sind in der klassischen Mechanik grundsätzlich zwei vereinfachte Annahmen gebräuchlich:

1. das Punkthaufenmodell



2. das Kontinuumsmodell

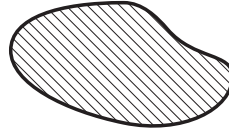


Abb. 1.5: Illustration des Punkthaufen- und des Kontinuumsmodells.

Beim **Punkthaufenmodell** wird angenommen, dass die betrachtete Materie in abzählbar vielen Punkten des Raumes konzentriert ist. Eine in einem Punkt konzentrierte endliche Materiemenge wird **Massenpunkt** genannt. Die auf dem Punkthaufenmodell aufbauende Mechanik wird **Punktmechanik** genannt.

Beim **Kontinuumsmodell** wird angenommen, dass die Materie in dem Raumgebiet, das sie einnimmt, stetig (im Sinne von lückenlos) verteilt ist. Die auf dem Kontinuumsmodell aufbauende Mechanik wird **Kontinuumsmechanik** oder **Mechanik der Kontinua** genannt.

Die Wahl eines der beiden Modelle zur Behandlung mechanischer Probleme hängt von der Problemstellung ab. So darf z.B. der Mond bei der Untersuchung seiner Bewegung um die Erde zu einem Massenpunkt idealisiert werden. Dieses Modell wird aber bei der Untersuchung eines Landevorgangs einer Fähre auf dem Mond unbrauchbar.

Im Sinne der Euklidischen Geometrie besitzt ein Punkt die Dimension 0. Insbesondere

1. kann er keine Drehbewegungen ausführen;
2. besitzt er kein Volumen und
3. hat er keine Oberfläche.

Deshalb kann man in der Punktmechanik

1. keine Körperrotationen beschreiben,

2. keine volumenverteilten Kräfte und
3. keine flächenverteilten Kräfte (Spannungen genannt) einführen.

Lösungen der genannten Probleme werden erst mit Hilfe des Kontinuumsmodells möglich. Es zeigt sich also, dass das Punkthafenmodell zwar einfacher, das Kontinuumsmodell jedoch umfassender ist. Außerdem ist es bei einer konsequenten Anwendung des Kontinuumsmodells möglich, die Punkt- und die Kontinuumsmechanik **einheitlich** zu behandeln.

Die an technischen Anwendungen orientierte, klassische und nichtrelativistische Kontinuumsmechanik wird **Technische Mechanik der Kontinua** oder kurz **Technische Mechanik** genannt.

1.2.5 Materielle Medien, Bewegungen und Kräfteeinwirkungen

Die Mechanik untersucht Bewegungen materieller Medien in Raum und Zeit unter Kräfteinwirkungen.

Definition 1.1 (materielles Medium, Masse)

Ein materielles Medium ist eine (konstante oder veränderliche) Materiemenge. Das Maß der Materiemenge heißt Masse.

Materielle Medien lassen sich ganz grob in feste, flüssige und gasförmige Medien einteilen. Diese Einteilung entspricht den drei klassischen Aggregatzuständen der Materie.

In der nichtrelativistischen Physik postuliert man das

Axiom 1.2 (Massenerhaltung)

Die Masse ein und derselben Materiemenge ist konstant, d.h. es gilt $m = \text{const.}$

Bewegungen sind Ortsänderungen materieller Medien in Raum und Zeit. Während ihrer Bewegung können sich materielle Medien **deformieren**, d.h. ihre Gestalt und ihr Volumen ändern.

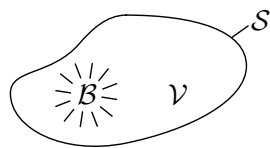
Jedes materielle Medium ist stets irgendwelchen Einwirkungen der Umgebung unterworfen. Diese Einwirkungen können mechanischer, thermodynamischer, elektrodynamischer oder anderer Natur sein. Die mechanischen Einwirkungen der Umgebung auf materielle Medien sind die (äußeren) **Kräfte** und (äußeren) **Momente**. Kräfte und Momente sind physikalische Größen. Neben Kräften und Momenten existieren keine weiteren mechanischen Einwirkungen.

1.2.6 Körper

Ein Körper besteht aus Materie, nimmt einen Raum ein und besitzt in der klassischen Physik eine Begrenzung.

Definition 1.3 (Körper, Momentanlage, momentane Oberfläche)

Ein **Körper** ist eine endliche, zu jedem Zeitpunkt stets dieselbe, kontinuierlich verteilte Materiemenge \mathcal{B} . Das Raumgebiet $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{B}, t)$, das der Körper \mathcal{B} zu einem Zeitpunkt t einnimmt, wird **Momentanlage** von \mathcal{B} zur Zeit t und der Rand \mathcal{S} von \mathcal{V} wird die **momentane Oberfläche** von \mathcal{B} zur Zeit t genannt. \mathcal{S} bestimmt die **momentane Gestalt** von \mathcal{B} zur Zeit t . Der Inhalt $V := \int_{\mathcal{V}} dV$ der Momentanlage \mathcal{V} von \mathcal{B} wird das **Volumen** von \mathcal{B} zur Zeit t genannt.



\mathcal{B} : Körper
 \mathcal{V} : Momentanlage von \mathcal{B}
 \mathcal{S} : momentane Oberfläche von \mathcal{B}

Abb. 1.6: Körper \mathcal{B} mit Momentanlage \mathcal{V} und momentaner Oberfläche \mathcal{S} .

Weil ein Körper stets dieselbe Materiemenge ist und die Masse ein und derselben Materiemenge in der klassischen Mechanik konstant ist, folgt daraus der nachstehende Satz über die Erhaltung der Masse.

Satz 1.4 (Massenerhaltung für Körper)

Die Masse eines Körpers ist konstant. \mathcal{B} ist ein Körper $\implies m = \text{const.}$

Körper lassen sich – analog zu materiellen Medien – ganz grob in feste, flüssige und gasförmige Körper einteilen. Irgendein fester Gegenstand, das Kühlwasser in einem absolut dichten Autokühler und die Luft in einem absolut dichten Autoreifen sind Beispiele von Körpern.

Wichtige Modelle fester Körper sind **Stäbe** und **Balken**, **Bögen**, **Rahmen**, **Fachwerke** sowie **Scheiben**, **Platten**, **Schalen** und **Membrane**.

Jeder Körper „besteht“ aus materiellen Punkten in dem Sinne, in dem ein Raumgebiet aus geometrischen Punkten „besteht“:

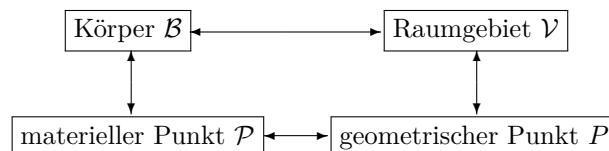


Abb. 1.7: Analogie zwischen materiellen und geometrischen Punkten.

Man sagt dazu: materielle Punkte sind Elemente eines Körpers \mathcal{B} . Gehört ein materieller Punkt \mathcal{P} einem Körper \mathcal{B} an, so schreibt man dafür: $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$.

Man beachte den wesentlichen Unterschied zwischen einem materiellen Punkt und einem Massenpunkt: während bei einem Massenpunkt endliche Materie-

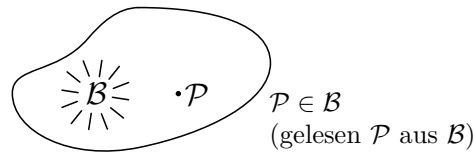


Abb. 1.8: Körper mit materiellem Punkt.

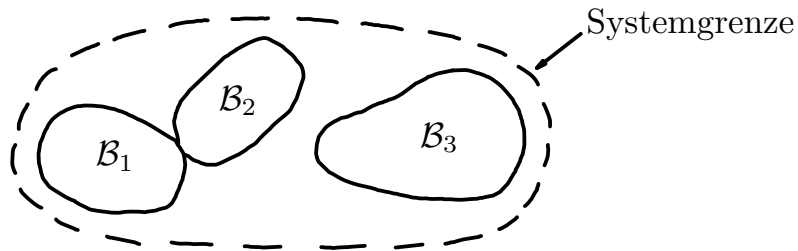


Abb. 1.9: System dreier Körper.

menge in einem geometrischen Punkt konzentriert ist, ist jeder materielle Punkt zwar massebehaftet, er besitzt jedoch keine endliche Masse (analog der Tatsache, dass ein geometrischer Punkt kein Volumen besitzt).

Definition 1.5 (Körpersystem)

Eine Zusammenfassung von endlich vielen Körpern zu einem Ganzen nennt man ein **Körpersystem**.

Anmerkung. In der Strömungslehre, der Gasdynamik und der Thermodynamik werden Körper oder Körpersysteme auch **materiell geschlossene Systeme** genannt.

In der Mechanik werden außerdem noch materiell offene Systeme untersucht.

Definition 1.6 (materiell offenes System)

Ein (ruhender oder sich bewogender) materieller Bereich, an dessen Grenzen Materieaustausch mit der Umgebung stattfindet, wird **materiell offenes System** genannt.

Beispiel 1.7

Beispiele materiell offener Systeme:

1. Eine startende Rakete, bei der die Triebwerke noch eingeschaltet sind. Die Brennstoffmenge wird immer kleiner, es findet Materieaustausch zwischen der Rakete und der Umgebung statt.

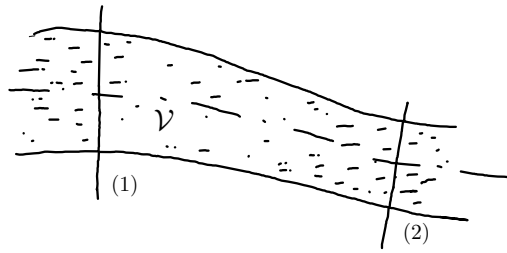


Abb. 1.10: Materiell offenes System.

2. Eine in einem Rohrabschnitt zwischen den Kontrollstellen 1 und 2 fließende Wassermenge. Hier findet Materieaustausch mit der Umgebung an den Kontrollstellen 1 und 2 statt.

Man beachte, dass im zweiten Beispiel das Wasser in sehr guter Näherung als inkompressibel angenommen werden kann und folglich die Masse des in dem Raumgebiet \mathcal{V} zwischen 1 und 2 befindlichen Wassers wegen der Konstanz der Dichte zu jeder Zeit konstant ist. Trotzdem ist die sich in \mathcal{V} befindliche Wassermenge kein Körper, weil an den Grenzen 1 und 2 des Raumgebiets \mathcal{V} Materieaustausch stattfindet. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass die Konstanz der Masse notwendig, aber nicht hinreichend für die Existenz eines Körpers ist. \diamond

Alle Körper sind deformierbar, d.h. sie ändern unter dem Einfluss der Kräfteeinwirkungen während eines Bewegungsvorgangs sowohl ihre Gestalt als auch ihr Volumen. Bei zahlreichen mechanischen Betrachtungen läßt sich ein Körper zu einem starren Körper idealisieren:

Definition 1.8 (Starrer Körper)

Ein Körper heißt **starr**, wenn der Abstand $\ell(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ zweier beliebiger materieller Punkte $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ dieses Körpers im Verlauf der Bewegung konstant bleibt, also wenn $\ell(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \text{const.}$ bezüglich t gilt.

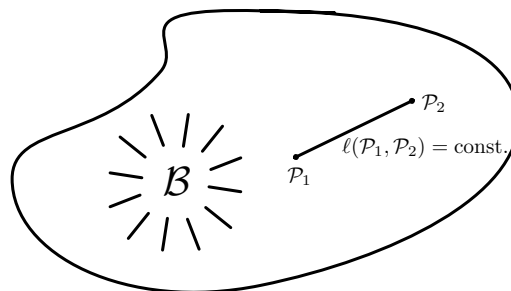


Abb. 1.11: Starrer Körper.

Demnach ändert der starre Körper im Verlauf der Bewegung weder seine Gestalt noch sein Volumen.

1.3 Einteilung der Mechanik

Bezüglich ihrer ursprünglichen Elemente: materielle Medien (bzw. ihre Stoffeigenschaften), Bewegungen und Kräfteeinwirkungen lässt sich die Mechanik wie folgt einteilen:

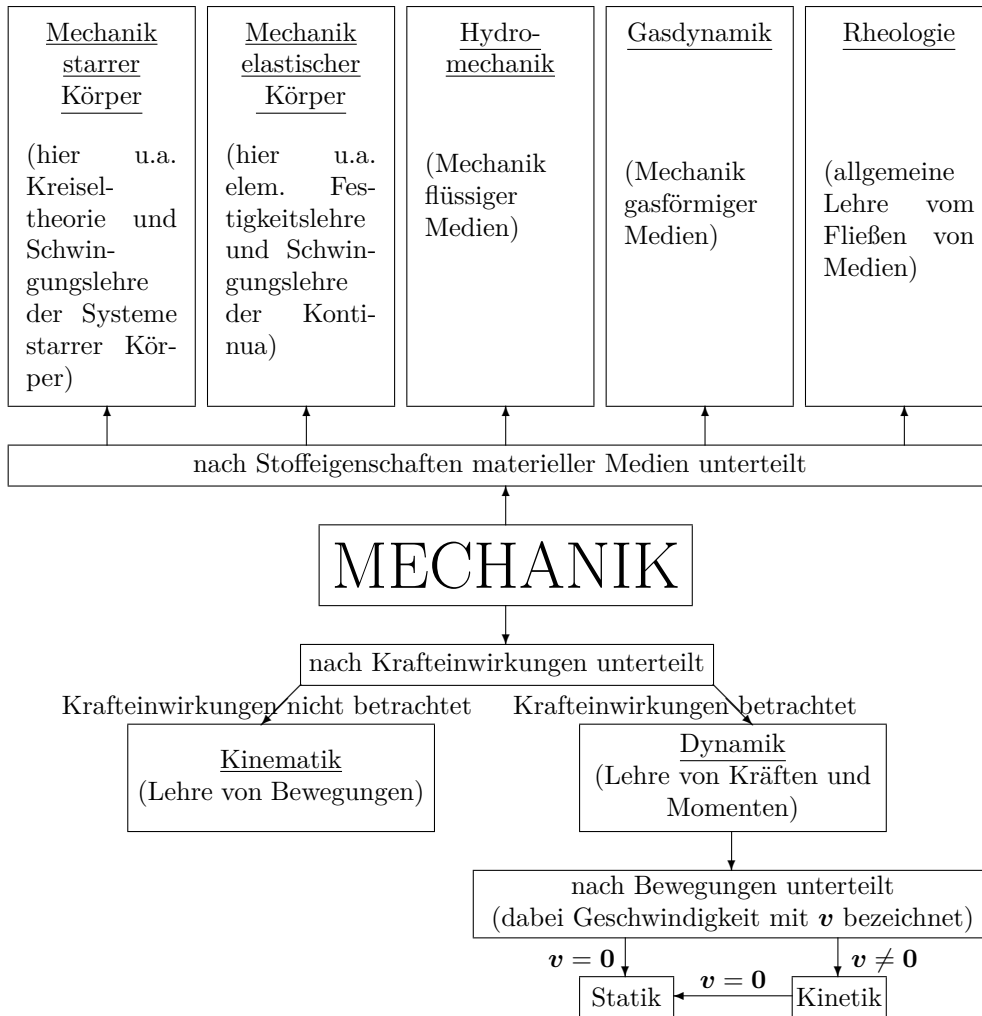


Abb. 1.12: Einteilung der Mechanik.

1.4 Zur Axiomatik der Mechanik

Als grundlegende physikalische Begriffe der klassischen Mechanik müssen zunächst Raum und Zeit axiomatisch eingeführt werden. Dies geschieht mathematisch durch Einführung eines Euklidischen Punktraumes. In einem Euklidischen Punktraum ist kein Punkt als Ursprung ausgezeichnet, es können jedoch Abstände und Winkel gemessen werden. Der Euklidische Punktraum ist flach (ungekrümmt). Eine Verallgemeinerung zur Beschreibung von Raum und Zeit

stellen Riemannsche Mannigfaltigkeiten dar, die lokal isometrisch zu einem Euklidischen Punktraum sind (d.h., **lokal**=in der Umgebung eines Punkts können Längen und Winkel wie im Euklidischen Punktraum gemessen werden), aber gekrümmt sein können. Die Formulierung der Kontinuumsmechanik auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist möglich, aber mathematisch anspruchsvoll.

Wird im Euklidischen Punktraum ein Punkt als Ursprung ausgezeichnet und werden Basisvektoren eingeführt, so entsteht ein Bezugssystem. Ändert sich dieser Bezugspunkt bzw. das Basissystem mit der Zeit, so handelt es sich um ein bewegtes Bezugssystem.

In einem Bezugssystem bewegt sich ein Punkt gleichförmig (=unbeschleunigt), wenn er in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurücklegt. Das **Trägheitsprinzip** von Galilei ist ein Axiom, welches die Existenz von Bezugssystemen postuliert, in denen ein sich kräftefrei bewegender Körper unbeschleunigt ist. Diese speziellen Bezugssysteme und ihre Bezugszeit werden **Inertialsysteme** genannt. Da für zwei verschiedene Inertialsysteme die Bewegung eines kräftefreien Körpers unbeschleunigt ist, können sich Inertialsysteme nur wie folgt unterscheiden:

1. durch eine unterschiedliche Lage des Ursprungs (räumlicher Versatz)
2. durch eine unterschiedliche Definition des Nullpunkts der Zeitmessung (zeitlicher Versatz)
3. durch eine Drehung des Koordinatensystems
4. durch eine gleichförmige Bewegung zueinander

Zwischen zwei Inertialsystemen existiert eine Transformation, welche beide Systeme ineinander überführt. Diese Transformation besitzt zehn Parameter (Vektor für den räumlichen Versatz, Skalar für den zeitlichen Versatz, Vektor bzw. orthogonale Matrix für die Drehung, Vektor der konstanten Relativgeschwindigkeit). Mathematisch bildet die Menge dieser Transformationen eine nicht-kommutative Gruppe. Diese Gruppe wird als Galilei-Gruppe bezeichnet, die Transformationen als Galilei-Transformationen.

Das **Galileische Relativitätsprinzip**, ein weiteres Axiom, fordert nun, dass die Bewegung eines Körpers unabhängig vom gewählten Inertialsystem ist. Daraus folgt, dass die Gesetze, welche die Bewegung von Körpern beschreiben, invariant unter Galilei-Transformationen sein müssen.

Mit der Forderung nach einer kräftefreien Bewegung lässt das Trägheitsprinzip von Galilei den Einfluss der Gravitation unberücksichtigt. Praktisch ist dies jedoch nicht möglich, so dass eine kräftefreie Bewegung experimentell nicht realisierbar ist. Durch den Einfluss der Gravitation existieren also keine Inertialsysteme! Ein Ausweg aus diesem Dilemma bietet das Abrücken von der Forderung nach Kräftefreiheit, indem sich auf die Bewegung frei fallender Körper beschränkt wird; also Körper, die bis auf den Einfluss der Gravitation kräftefrei sind. Für ein an diesen Körper geheftetes (frei fallendes) Bezugssystem würden sich Trägheits- und Schwerkraft gerade kompensieren, träge und schwere Masse sind dann äquivalent und damit ununterscheidbar. Dies ist Gegenstand

des **Äquivalenzprinzips** von Einstein. Ein Inertialsystem wäre dann ein Bezugssystem, in dem frei fallende Körper sich mit gleichmäßiger (konstanter) Beschleunigung bewegen. Dies gilt allerdings nur noch lokal, nämlich in einem homogenen Gravitationsfeld. Inertialsysteme existieren daher streng genommen nicht bzw. nur lokal für ein homogenes Gravitationsfeld. Daher ist auch vor diesem Hintergrund die Einführung einer Riemannschen Mannigfaltigkeit sinnvoll.

Die weiteren Axiome der Mechanik betreffen die Existenz der in den Bilanzgleichungen (Massen-, Impuls-, Drallbilanz, Hauptsätze der Thermodynamik) auftretenden physikalischen Größen, die in der Kontinuumsmechanik über Dichtefelder eingeführt werden. Impuls-, Drall- und Energiebilanz (1. Hauptsatz der Thermodynamik) stellen keine eigenständigen Axiome dar, da sie sich aus den Invarianzforderungen des Galileischen Relativitätsprinzips ergeben. Dies ist eine Konsequenz des Satzes von Noether, der besagt, dass aus jeder Invarianz unter einer Transformation eine Erhaltungsgröße folgt. Für die Galileitransformationen folgt aus der Invarianz bei räumlichen Versatz die Impulsbilanz, aus der Invarianz bei zeitlichem Versatz die Energiebilanz und aus der Invarianz unter Drehung des Inertialsystems die Drallbilanz für Körper bzw. abgeschlossene Systeme. Die Invarianz unter gleichförmiger Bewegung liefert zwar ebenfalls eine Erhaltungsgröße, die aber keine weitere Bedeutung hat. Im Gegensatz dazu lassen sich die Massenbilanz und der 2. Hauptsatz der Thermodynamik nicht aus dem Galileischen Relativitätsprinzip herleiten und müssen daher postuliert werden. In der relativistischen Physik zeigt sich, dass die Massenbilanz nur näherungsweise als Grenzfall der Energieerhaltung gilt, da Masse eine Form der Energie ist. Für den 2. Hauptsatz der Thermodynamik liegt derzeit noch keine Herleitung aus der Quantenmechanik vor.

Die weiter oben aufgeführten Bilanzgleichungen gelten universell für jeden Körper, unabhängig von weiteren Annahmen über Materialeigenschaften. Sie können daher die Bewegung von Körpern nicht eindeutig beschreiben, denn dann würden sich alle Körper unabhängig von den Materialeigenschaften gleich verhalten. Zur eindeutigen Beschreibung der Bewegung sind daher weitere Annahmen erforderlich. Im Rahmen der Technischen Mechanik III und IV werden folgende mechanische Modelle verwendet:

1. **Massenpunkt:** Die Masse des Körpers ist konzentriert im Massenmittelpunkt, alle Kräfte greifen zentral in diesem Punkt an. Dieses Modell ist sinnvoll, wenn sich alle materiellen Punkte des Körpers parallel bewegen oder wenn die Ausdehnung des Körpers klein im Vergleich zu den anderen Abmessungen des Problems ist.
2. **Punkthaufenmodell:** Systeme von Massenpunkten mit Wechselwirkungen zwischen den Körpern als zentral an ihnen angreifende Kräfte.
3. **starrer Körper:** Alle materiellen Längen des Körpers bleiben während der Bewegung konstant.
4. Systeme aus starren Körpern und Massenpunkten (sog. **diskrete Systeme**), wobei Wechselwirkungen zwischen den Körpern jetzt durch Kräfte **und** Momente dargestellt werden können.
5. deformierbarer Körper, hier nur Stabtheorie und lineare Elastizität.

2 Massenpunktkinematik

Die Kinematik untersucht Bewegungen, ohne nach ihren Ursachen zu fragen. Neben der Lage eines Körpers im Raum wird auch die zeitliche Änderung der Lage betrachtet. Deshalb wird die Kinematik auch als „Geometrie der Bewegungen“ bezeichnet. In der Kinematik werden die drei physikalischen Größen Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung betrachtet. Man unterscheidet grundsätzlich

1. die Kinematik des Massenpunkts¹ und
2. die Kinematik der Kontinua.

In diesem Kapitel wird die Kinematik des Massenpunkts behandelt. Sie bildet die Grundlage für das Verständnis der Kinematik der Kontinua, die Gegenstand des folgenden Kapitels ist.

Die Lage eines Körpers wird mit Hilfe eines Bezugssystems beschrieben.

Definition 2.1 (Bezugssystem)

Ein **Bezugssystem** besteht aus einem **Bezugspunkt** O und einer **Vektorbasis** e_i , $i = 1, 2, 3$ als **Bezugsbasis**.

Ändern der Bezugspunkt und die Basisvektoren ihre Lage mit der Zeit nicht, so heißt das Bezugssystem **raumfest** oder **ruhend**, anderenfalls **bewegt**. Offenbar lässt sich die Frage, ob ein Bezugssystem als ruhend oder bewegt anzusehen ist, nur relativ zu einem anderen Bezugssystem entscheiden. Es stellt sich daher die Frage nach Referenzsystemen, bezüglich derer die Bewegung ermittelt wird. Diese werden mit sich unbeeinflusst bewegenden Massenpunkten verknüpft.

Axiom 2.2 (Galileisches Trägheitsprinzip)

*Es existiert mindestens ein physikalischer Raum mit Euklidischer Metrik und die überall in der Natur gleich ablaufende Zeit derart, dass ein sich in diesem Raum ungestört (d.h. kräftefrei) bewegendes Massenpunkt eine geradlinige Bewegung ausführt und in gleichen Zeitabschnitten gleiche Wegabschnitte zurücklegt. Ein solcher Raum wird **Inertialraum** genannt und eine solche Zeit heißt **Inertialzeit**.²*

Werden ein Bezugssystem und eine Bezugszeit als **Inertialsystem** ausgezeichnet, so unterscheidet sich ein an einen anderen sich unbeeinflusst bewegenden Massenpunkt gebundenes Inertialsystem nur durch eine unbeschleunigte Bewegung, also eine geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Die

¹Der Begriff „Kinematik des Massenpunkts“ ist in der Literatur üblich, suggeriert jedoch eine Bedeutung der Masse, die in der Kinematik keine Rolle spielt. Teilweise wird daher auch der Begriff „Kinematik des bewegten Punkts“ verwendet, der jedoch ebenfalls unglücklich gewählt ist, da ein Punkt ein geometrisches und kein physikalisches Objekt ist. Korrekt wäre daher „Kinematik des punktförmigen Körpers“. Da dieser Begriff ungebräuchlich und sperrig ist, bleiben wir bei der in der Literatur üblichen Bezeichnung „Kinematik des Massenpunkts“ und bezeichnen in der Kinematik den Massenpunkt lediglich durch Angabe eines materiellen Punkts \mathcal{P} ohne Angabe einer Masse m .

²lateinisch inertia=Trägheit. In der Literatur ist dieses Axiom auch als „erstes Newtonsches Gesetz“ bekannt.

weiteren physikalischen Gesetze sollen unabhängig von der Wahl eines speziellen Inertialsystems sein; dies bedeutet, dass der Raum sich homogen (invariant gegen Ortsänderungen) und isotrop (invariant gegenüber Richtungsänderungen) verhält und die Zeit ebenfalls homogen ist.

2.1 Bewegung eines Massenpunkts

Wir betrachten einen Massenpunkt \mathcal{P} , der sich zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = t^*$ im Punkt $P = P^*$ mit Ortsvektor $\mathbf{r}(t^*)$ eines raumfesten Bezugssystems befindet. Der Punkt P^* wird der **Ort** oder die Momentanlage von \mathcal{P} zum Zeitpunkt t^* genannt.

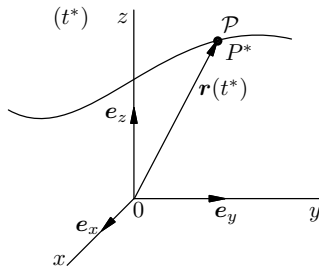


Abb. 2.1: Ortsvektor des Massenpunkts \mathcal{P} zur Zeit t^* .

Definition 2.3 (Bewegung eines Massenpunkts)

Eine Funktion

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \text{ mit } t \in Z_t,$$

die einem Massenpunkt \mathcal{P} zu jedem Zeitpunkt t des betrachteten Zeitintervalls Z_t einen Ort P mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ zuordnet, wird die **kinematische Bewegungsgleichung** oder kurz die **Bewegung** von \mathcal{P} (im Zeitintervall Z_t) genannt.

Demnach kann die Bewegung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ von \mathcal{P} als eine einparametrische Folge der Abbildungen des Massenpunkts \mathcal{P} auf seine (raumfesten) Momentanlagen (Orte) mit den Ortsvektoren $\mathbf{r}(t)$ aufgefasst werden, wobei die Zeit t der Abbildungsparameter ist.

Jeder Ortsvektor \mathbf{r} lässt sich in einer beliebigen Vektorbasis in Komponentenform darstellen, so z.B.

1. in der Vektorbasis $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ der kartesischen Koordinaten x, y, z in der Form

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z \quad (2.1)$$

2. in der Vektorbasis $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$ der zylindrischen Koordinaten R, φ, z in der Form

$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R(\varphi) + z \mathbf{e}_z \quad (2.2)$$

3. in der Vektorbasis $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi$ der sphärischen Koordinaten r, ϑ, φ in der Form

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi) \quad (2.3)$$

darstellen. Die drei Vektorbasen sind jeweils **orthonormiert**.

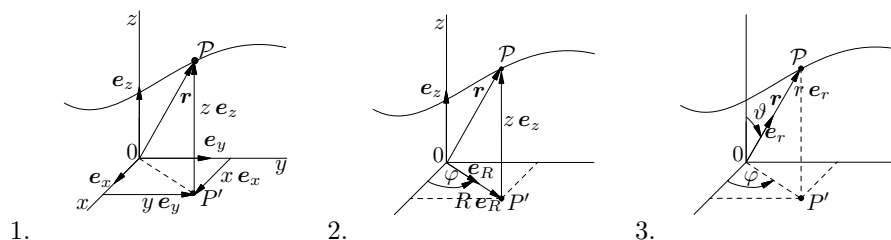


Abb. 2.2: Ortsvektor in kartesischen (1.), zylindrischen (2.) und sphärischen (3.) Koordinaten.

Für eine Bewegung ist der Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eine Funktion der Zeit. In diesem Fall sind auch die kartesischen Koordinaten

$$x = x(t) \quad y = y(t) \quad z = z(t)$$

in (2.1), die zylindrischen Koordinaten

$$R = R(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad z = z(t)$$

in (2.2) und die sphärischen Koordinaten

$$r = r(t) \quad \varphi = \varphi(t) \quad \vartheta = \vartheta(t)$$

in (2.3) Funktionen der Zeit t . In zylindrischen Koordinaten sind dann auch die Basisvektoren $\mathbf{e}_R(\varphi(t))$ und $\mathbf{e}_\varphi(\varphi(t))$ und in sphärischen Koordinaten alle drei Basisvektoren $\mathbf{e}_r(\vartheta(t), \varphi(t))$, $\mathbf{e}_\vartheta(\vartheta(t), \varphi(t))$, $\mathbf{e}_\varphi(\vartheta(t), \varphi(t))$ zeitabhängig.

2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Bewegung eines Massenpunkts \mathcal{P} wird durch die Funktion $\mathbf{r}(t)$ repräsentiert. Diese Bewegung kann unterschiedlich schnell verlaufen. Das Maß der Änderung der Bewegung in der Zeit heißt Geschwindigkeit.

Definition 2.4 (Geschwindigkeit)

Die Funktion

$$\mathbf{v} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} =: \dot{\mathbf{r}} \quad (2.4)$$

heißt **Geschwindigkeit von \mathcal{P}** ³.

³Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werden wir im Folgenden die Ableitung einer Größe G nach der Zeit t mit \dot{G} bezeichnen.

Demnach ist \mathbf{v} eine vektorwertige Funktion $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ der Zeit t .

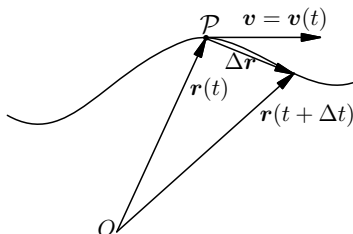


Abb. 2.3: Geschwindigkeit des Massenpunkts \mathcal{P} .

Das Maß der Änderung der Geschwindigkeit \mathbf{v} in der Zeit t heißt Beschleunigung.

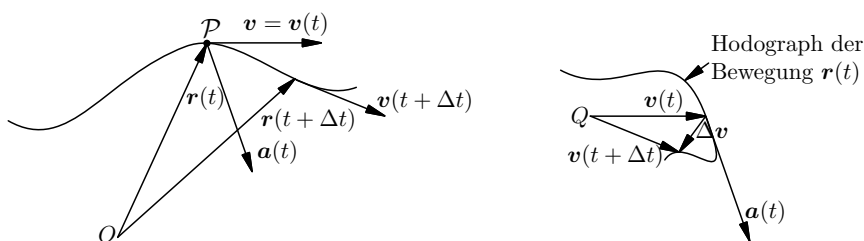


Abb. 2.4: Beschleunigung des Massenpunkts \mathcal{P} .

Definition 2.5 (Beschleunigung)

Die Funktion

$$\mathbf{a} := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} =: \dot{\mathbf{v}} \quad (2.5)$$

heißt **Beschleunigung** von \mathcal{P} .

Demnach ist \mathbf{a} eine vektorwertige Funktion $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ der Zeit t .

Aus (2.5) und (2.4) folgt die Beziehung

$$\mathbf{a} = \frac{d}{dt} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} =: \ddot{\mathbf{r}}.$$

Anmerkung. Die dritte Ableitung $\ddot{\mathbf{r}}$ wird **Ruck** genannt und u.a. in der Luftfahrt verwendet. Es ist prinzipiell möglich, noch höhere Ableitungen von \mathbf{r} zu bilden; sie haben jedoch keine physikalische Interpretation mehr.

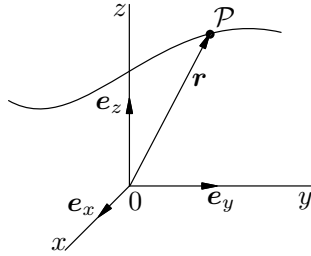


Abb. 2.5: Ortsvektor in kartesischen Koordinaten.

2.2.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung in orthogonalen Koordinatensystemen

Kartesische Koordinaten

Der Ortsvektor \mathbf{r} ist

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z = [x \quad y \quad z],$$

deshalb gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}], \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x} \mathbf{e}_x + \ddot{y} \mathbf{e}_y + \ddot{z} \mathbf{e}_z = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}], \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \end{aligned}$$

Zylindrische Koordinaten

Der Ortsvektor \mathbf{r} ist

$$\mathbf{r} = R \mathbf{e}_R + z \mathbf{e}_z, \tag{2.6}$$

mit

$$\mathbf{e}_R = (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_x) \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_R \cdot \mathbf{e}_y) \mathbf{e}_y = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_R(\varphi).$$

Analog gilt

$$\mathbf{e}_\varphi = -\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\varphi(\varphi).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_R &= (-\sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y) \dot{\varphi} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= (-\cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y) \dot{\varphi} = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die Differentiation von (2.6) nach der Zeit ergibt

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{z} \mathbf{e}_z = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z \tag{2.8}$$

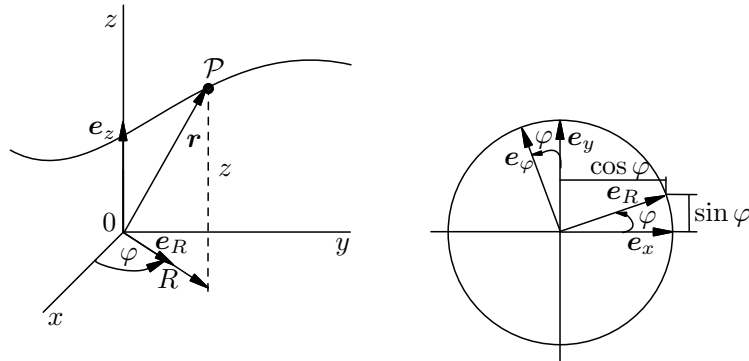


Abb. 2.6: Ortsvektor in zylindrischen Koordinaten.

und

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2}.$$

Die Differentiation von \mathbf{v} nach der Zeit liefert

$$\begin{aligned} \mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} &= \ddot{R} \mathbf{e}_R + \dot{R} \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \\ &= \ddot{R} \mathbf{e}_R + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{R} \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + R \dot{\varphi} (-\dot{\varphi}) \mathbf{e}_R + \ddot{z} \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

also

$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z \quad (2.9)$$

und

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi})^2 + \ddot{z}^2}. \quad (2.10)$$

Spezialfall: Ebene Bewegung in der $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi$ -Ebene (Darstellung von \mathbf{v} und \mathbf{a} in Polarkoordinaten R, φ).

Mit $z = 0$, also $\dot{z} = 0$ und $\ddot{z} = 0$ erhalten wir aus (2.6) und (2.8) bis (2.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R \mathbf{e}_R, \\ \mathbf{v} &= \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a} &= (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi, \\ \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2}, \\ \|\mathbf{a}\| &= \sqrt{(\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2)^2 + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi})^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Speziell: **Kreisbewegung**

Hier gilt $R = R_0 = \text{const.}$ Damit folgt aus (2.11):

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= R_0 \mathbf{e}_R, \\ \mathbf{v} &= R_0 \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \text{ und } \|\mathbf{v}\| = R_0 |\dot{\varphi}| \quad (R_0 \geq 0), \\ \mathbf{a} &= -R_0 \dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_R + R_0 \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \text{ und } \|\mathbf{a}\| = R_0 \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Die Größe $\omega := \dot{\varphi}$ heißt **Winkelgeschwindigkeit** und die Größe $\alpha := \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$ heißt **Winkelbeschleunigung**.

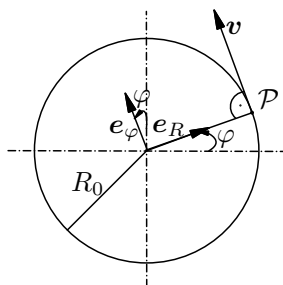


Abb. 2.7: Kreisbewegung eines Massenpunkts.

Sphärische Koordinaten

Der Ortsvektor \mathbf{r} ist

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r(\vartheta, \varphi), \quad (2.13)$$

mit

$$\mathbf{e}_r = (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_R) \mathbf{e}_R + (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z) \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \mathbf{e}_R + \cos \vartheta \mathbf{e}_z.$$

Analog gilt

$$\mathbf{e}_\vartheta = \cos \vartheta \mathbf{e}_R - \sin \vartheta \mathbf{e}_z.$$

Ferner ist

$$\mathbf{e}_R = \sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}_r &= \sin \vartheta \dot{\mathbf{e}}_R + \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{e}_R - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_z = \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} (\cos \vartheta \mathbf{e}_R - \sin \vartheta \mathbf{e}_z) \\ &= \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta, \\ \dot{\mathbf{e}}_\vartheta &= \cos \vartheta \dot{\mathbf{e}}_R - \dot{\vartheta} \sin \vartheta \mathbf{e}_R - \dot{\vartheta} \cos \vartheta \mathbf{e}_z = \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} (\sin \vartheta \mathbf{e}_R + \cos \vartheta \mathbf{e}_z), \\ &= \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - \dot{\vartheta} \mathbf{e}_r, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R = -\dot{\varphi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_r + \cos \vartheta \mathbf{e}_\vartheta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Differentiation von (2.13) nach der Zeit liefert

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta \quad (2.15)$$

und

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\dot{r}^2 + (r \sin \vartheta \dot{\varphi})^2 + (r \dot{\vartheta})^2}$$

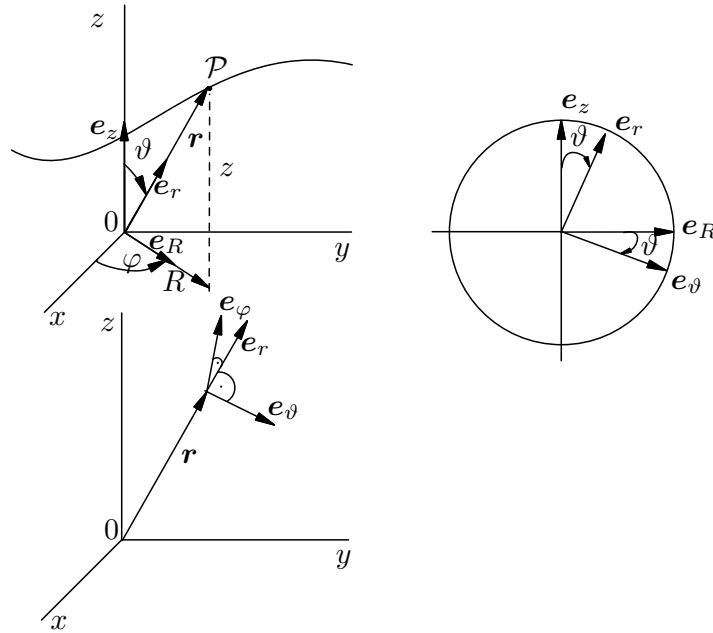


Abb. 2.8: Ortsvektor in sphärischen Koordinaten.

und die nochmalige Differentiation nach der Zeit ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = & \ddot{r} \mathbf{e}_r + \dot{r} \dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \sin \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \dot{\vartheta} \cos \vartheta \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \sin \vartheta \ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + r \sin \vartheta \dot{\varphi} \dot{\mathbf{e}}_\varphi \\ & + \dot{r} \dot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \ddot{\vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + r \dot{\vartheta} \dot{\mathbf{e}}_\vartheta. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von (2.14) folgt

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + a_\varphi \mathbf{e}_\varphi, \quad (2.16)$$

mit

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \vartheta, \\ a_\vartheta &= 2 \dot{r} \dot{\vartheta} + r \ddot{\vartheta} - r \dot{\varphi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ a_\varphi &= 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \vartheta + r \ddot{\varphi} \sin \vartheta + 2 r \dot{\varphi} \dot{\vartheta} \cos \vartheta \end{aligned} \quad (2.17)$$

und

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\vartheta^2 + a_\varphi^2}.$$

Beispiel 2.6

Für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin \vartheta = 1$, $\cos \vartheta = 0$, $\dot{\vartheta} = 0$ und $r = R$, $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_R$. Damit folgt aus (2.15):

$$\mathbf{v} = \dot{R} \mathbf{e}_R + R \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi$$

und aus (2.16), (2.17)

$$\mathbf{a} = (\ddot{R} - R\dot{\varphi}^2) \mathbf{e}_R + (2\dot{R}\dot{\varphi} + R\ddot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi,$$

d.h. die Darstellung (2.11) von \mathbf{v} und \mathbf{a} in Polarkoordinaten. \diamond

2.2.2 Geschwindigkeit und Beschleunigung in der begleitenden Basis der Bewegungsbahn

Die Bewegung des Massenpunkts erzeugt eine Raumkurve, die Bewegungsbahn.

Definition 2.7 (Bahn eines Massenpunkts)

Die Menge aller Punkte P , die durch die Ortsvektoren \mathbf{r} der kinematischen Bewegungsgleichung $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ eines Massenpunkts \mathcal{P} bestimmt sind, wird die **Bahnkurve** oder kurz die **Bahn** von \mathcal{P} genannt.

So stellt z.B. der durch ein Düsenflugzeug hervorgerufene und zu einer Linie idealisierte Kondensstreifen näherungsweise die von diesem Flugzeug im Laufe der Zeit „erzeugte“ Bahn dar.

Die Bahn eines Massenpunkts ist eine Raumkurve; sie ist das Ergebnis einer Bewegung. Die Raumkurve lässt sich als eine Funktion $\bar{\mathbf{r}}(\lambda)$ eines Parameters λ darstellen. Man beachte dabei den wesentlichen Unterschied zwischen der durch $\mathbf{r}(t)$ beschriebenen Bewegung und der durch $\bar{\mathbf{r}}(\lambda)$ beschriebenen Bahn: während die Bewegung $\mathbf{r}(t)$ eine Funktion der Zeit ist, wird die Bahn $\bar{\mathbf{r}}(\lambda)$ mit Hilfe **eines beliebigen Parameters** λ beschrieben, der nicht nur die Zeit t sein kann. Eine Umparametrisierung (auch Parameterwechsel genannt) der Bahn ist mit Hilfe einer stetigen, bijektiven und monoton wachsenden Abbildung zwischen den Parametrisierungen möglich. Ist also beispielsweise die Bahn zunächst nach der Zeit parametrisiert, so wäre eine Funktion $\lambda(t)$ mit den drei genannten Eigenschaften eine Umparametrisierung.

Neben der Parametrisierung der Bahn nach der Zeit ist auch die Parametrisierung nach dem zurückgelegten Weg zweckmäßig für praktische Anwendungen. Daher führen wir die Bogenlänge der Bahn als neuen Parameter ein und nehmen dann die Umparametrisierung auf die Bogenlänge vor.

Definition 2.8 (Bogenlänge)

Es sei $\bar{\mathbf{r}}(\lambda)$ die Bahn eines Massenpunkts \mathcal{P} . Die Funktion

$$s(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} \|\bar{\mathbf{r}}'(\tilde{\lambda})\| \, d\tilde{\lambda}$$

heißt die **Bogenlänge** der Bahn, wobei der Strich die Ableitung nach λ kennzeichnet.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass die Abbildung $s(\lambda)$ bijektiv, stetig und monoton wachsend ist. Daher ist $s(\lambda)$ tatsächlich eine Umparametrisierung. Die nach der Bogenlänge s parametrisierte Bahn bezeichnen wir mit $\hat{\mathbf{r}}(s) := \bar{\mathbf{r}}(s(\lambda))$.

Für den Spezialfall, dass λ die Zeit t ist, gilt $\hat{\mathbf{r}}(s) = \bar{\mathbf{r}}(s(t)) = \mathbf{r}(t)$.

Ist die nach der Bogenlänge s parametrisierte Bahn zweimal differenzierbar, dann lassen sich in jedem Punkt der Bahn durch Ableitung nach der Bogenlänge und algebraische Operationen drei paarweise orthogonale Einsektoren definieren. Da sie den Massenpunkt \mathcal{P} während seiner Bewegung begleiten, werden sie **begleitende Basis** genannt.

Definition 2.9 (Begleitende Basis)

Es sei $\hat{\mathbf{r}}(s)$ eine nach der Bogenlänge s parametrisierte Bahn und $\frac{d^2 \hat{\mathbf{r}}}{ds^2} \neq \mathbf{0}$.

1. Der **Tangenteneinsvektor**

$$\mathbf{e}_t := \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds}, \quad (2.18)$$

2. der **Hauptnormaleneinsvektor**

$$\mathbf{e}_n := \frac{\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}}{\left\| \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \right\|} \quad (2.19)$$

3. und der **Binormaleneinsvektor**

$$\mathbf{e}_b := \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$$

bilden die **begleitende Basis** der Bahn.

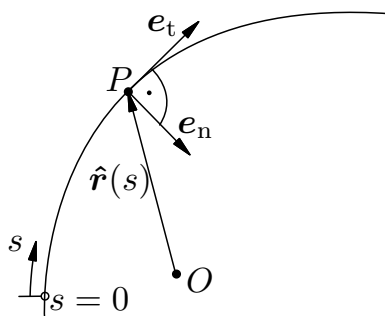


Abb. 2.9: Bahn eines Massenpunkts mit begleitender Basis.

Die Basisvektoren \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b sind i. Allg. in jedem Punkt der Bahn verschieden.

Satz 2.10 (Orthonormalität der begleitenden Basis)

Sei $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \neq \mathbf{0}$. Dann bilden die Vektoren \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b eine Orthonormalbasis.

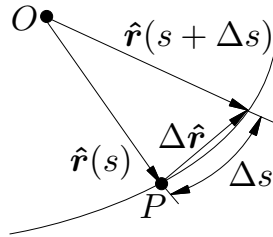


Abb. 2.10: Tangentenvektor in der begleitenden Basis.

Beweis. Zum Beweis der Orthonormaleigenschaft der begleitenden Basis bilden wir zunächst

$$\|\mathbf{e}_t\| = \left\| \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds} \right\| = \left\| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \hat{\mathbf{r}}}{\Delta s} \right\| = \left\| \frac{\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta \hat{\mathbf{r}}}{\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta s} \right\| = 1$$

Somit ist $\mathbf{e}_t := \frac{d\mathbf{r}}{ds}$ ein Einsvektor. Er verläuft tangential zur Bahn im Punkt P . Aus

$$1 = \|\mathbf{e}_t\|^2 = \mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_t$$

folgt nach der Differentiation nach s :

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \cdot \mathbf{e}_t + \mathbf{e}_t \cdot \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \cdot \mathbf{e}_t = 0.$$

Dies bedeutet, dass im Fall eines krummen Kurvenstücks (d.h. $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \neq \mathbf{0}$) der Vektor $\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}$ senkrecht auf \mathbf{e}_t steht. Folglich sind die Vektoren \mathbf{e}_t und $\mathbf{e}_n := \frac{\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}}{\|\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\|}$ orthogonal, also die Vektoren \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n und $\mathbf{e}_b := \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ paarweise orthogonal. Wegen $\|\mathbf{e}_t\| = 1$ und

$$\|\mathbf{e}_n\| = \left\| \frac{\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}}{\|\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\|} \right\| = \frac{\|\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\|}{\|\frac{d\mathbf{e}_t}{ds}\|} = 1$$

sowie

$$\|\mathbf{e}_b\| = \|\mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n\| = \|\mathbf{e}_t\| \|\mathbf{e}_n\| \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

sind \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b Einsvektoren. Da sie außerdem paarweise orthogonal sind, bilden sie tatsächlich eine Orthonormalbasis. ■

Definition 2.11 (Schmiegebene)

Die durch \mathbf{e}_t und \mathbf{e}_n im Punkt P aufgespannte Ebene wird **Schmiegebene** genannt.

Die begleitende Basis und die Schmiegeebene hängen von dem Kurvenpunkt P ab, in dem sie „aufgepflanzt“ werden. Somit entsprechen zwei verschiedenen Kurvenpunkten P_1 und P_2 i. Allg. zwei verschiedene begleitende Basen und zwei verschiedene Schmiegeebenen.

Definition 2.12 (Krümmung, Krümmungsradius)

Die skalare Größe

$$K := \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| \quad (2.20)$$

wird die **Krümmung** der Kurve im Punkt P genannt. Der Kehrwert

$$\rho_K := \frac{1}{K}$$

heißt der **Krümmungsradius** der Kurve im Punkt P .

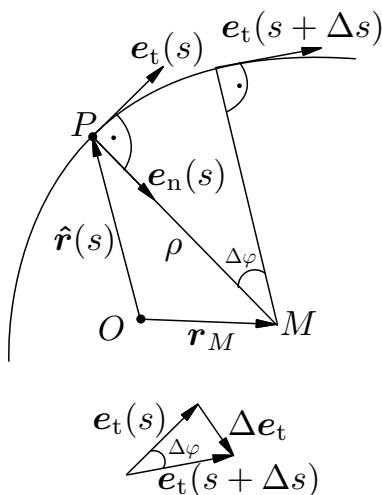


Abb. 2.11: Schmiegeebene und Krümmungsradius im Punkt P .

Die Krümmung ist das Maß der Abweichung der Kurve von einer Geraden im Punkt P . Der Krümmungsradius ist der Radius desjenigen Kreises, der in der P , e_t , e_n -Schmiegeebene liegt und sich an die Kurve im Punkt P am besten anpasst. Wegen

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \right\| &= \left\| \frac{d\mathbf{e}_t}{d\varphi} \frac{d\varphi}{ds} \right\| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\varphi} \right\| \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{|\Delta\varphi|}{2}}{2 \frac{|\Delta\varphi|}{2}} \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \\ &= 1 \left| \frac{d\varphi}{ds} \right| \stackrel{(2.20)}{=} K \end{aligned}$$

gilt für den Hauptnormaleneinsvektor \mathbf{e}_n die Beziehung

$$\mathbf{e}_n \stackrel{(2.19)}{=} \frac{1}{K} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} = \rho_K \frac{d\mathbf{e}_t}{ds}. \quad (2.21)$$

Geschwindigkeit \mathbf{v} und Beschleunigung \mathbf{a} können in der begleitenden Basis – genauso wie in jeder anderen Basis – in Komponentenform dargestellt werden. Die Komponentendarstellungen vermitteln einen tieferen Einblick in die physikalischen Eigenschaften von \mathbf{v} und \mathbf{a} . Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Einsvektoren \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b der begleitenden Basis i. Allg. keine richtungskonstanten, sondern bahnabhängige Vektoren sind.

Zur Herleitung der Darstellungen gehen wir von der Bewegung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

des Massenpunkts \mathcal{P} aus und stellen die Ableitungen mit Hilfe der nach der Bogenlänge parametrisierten Bahn dar. Für die Geschwindigkeit folgt

$$\mathbf{v} \stackrel{(2.4)}{:=} \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{ds} \frac{ds}{dt} \stackrel{(2.18)}{=} \dot{s} \mathbf{e}_t, \quad (2.22)$$

also

$$\mathbf{v} = v_t \mathbf{e}_t + 0 \mathbf{e}_n + 0 \mathbf{e}_b.$$

Somit verläuft \mathbf{v} stets tangential zur Bahn. Die Geschwindigkeit \mathbf{v} hat in der begleitenden Basis \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n , \mathbf{e}_b stets **nur die eine** Komponente $v_t \mathbf{e}_t$, **Bahnkomponente** von \mathbf{v} genannt. Die Größe

$$\|\mathbf{v}\| = |v_t| = \dot{s} \geq 0$$

heißt **Bahngeschwindigkeit**. Dies ist z.B. die von einem Fahrradtachometer angezeigte Geschwindigkeit. Man beachte den Unterschied: während die Geschwindigkeit \mathbf{v} ein physikalischer Vektor ist, ist die Bahngeschwindigkeit $\|\mathbf{v}\|$ ein physikalischer Skalar.

Differentiation von (2.22) nach der Zeit ergibt die Beschleunigung

$$\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \ddot{s} \mathbf{e}_t + \dot{s} \dot{\mathbf{e}}_t = \ddot{s} \mathbf{e}_t + \dot{s} \frac{d\mathbf{e}_t}{ds} \frac{ds}{dt} \stackrel{(2.21)}{=} \ddot{s} \mathbf{e}_t + \frac{\dot{s}^2}{\rho_K} \mathbf{e}_n,$$

also

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{e}_t + a_n \mathbf{e}_n + 0 \mathbf{e}_b \text{ mit } a_t := \dot{v}_t = \ddot{s} \text{ und } a_n := \frac{\dot{s}^2}{\rho_K};$$

somit liegt \mathbf{a} stets in der P , \mathbf{e}_t , \mathbf{e}_n -Schmiegeebene, \mathbf{a} tangiert jedoch die Bahnkurve i. Allg. **nicht**. Man nennt $a_t \mathbf{e}_t$ die **Bahnkomponente** und $a_n \mathbf{e}_n$ die **Normalkomponente** von \mathbf{a} . Es gilt $a_t \stackrel{\geq}{\leq} 0$ und $a_n \geq 0$. Die Größe

$$\|\mathbf{v}\|' = \ddot{s} \stackrel{\geq}{\leq} 0$$

heißt **Bahnbeschleunigung**.

2.2.3 Geschwindigkeit und Beschleunigung in bewegten Bezugssystemen

Die Bestimmung der Geschwindigkeit und Beschleunigung aus der Bewegung ist in einem raumfesten Bezugssystem sehr einfach; denn es müssen nur die Koordinaten des Ortsvektors nach der Zeit abgeleitet werden. In vielen Fällen erweist sich jedoch die Ermittlung der Bewegung bezüglich eines bewegten Bezugssystems als zweckmäßiger.

Beispiel: Bewegung einer Fliege in einem fahrenden Auto. Hier ist es zweckmäßig, die Bewegung der Fliege zunächst relativ zu einem mit dem Fahrzeug mitgeführten Bezugssystem zu beschreiben und dann das mit dem Fahrzeug mitgeführte Bezugssystem auf ein Inertialsystem zu beziehen.

Wird die Bewegung in einem bewegten Bezugssystem beschrieben, so sind bei der zeitlichen Ableitung folgende Beiträge zu berücksichtigen:

1. Die zeitliche Änderung des Bezugspunkts des Bezugssystems.
2. Die zeitliche Änderung der Basisvektoren des Bezugssystems.
3. Die zeitliche Änderung der Koordinaten des Ortsvektors im bewegten Bezugssystem.

Die ersten beiden zeitlichen Änderungen können nur von einem anderen Bezugssystem aus bestimmt werden; hierfür bietet sich ein Inertialsystem an. In diesem Fall muss zur Bestimmung des ersten Anteils der Ortsvektor des Bezugspunkts im Inertialsystem ermittelt und nach der Zeit abgeleitet werden. Der dritte Anteil wird wieder durch Ableitung der Koordinaten des Ortsvektors des Massenpunkts im bewegten Bezugssystem bestimmt.

Der zweite Anteil lässt sich noch genauer untersuchen. Es ist zweckmäßig, die Basisvektoren des Bezugssystems auf 1 zu normieren. In diesem Fall ist dann nur die Richtung der Basisvektoren zeitabhängig, der Betrag ist es nicht. Für vektorwertige Funktionen mit konstantem Betrag lässt sich die Ableitung durch eine algebraische Operation darstellen. Dies ist Gegenstand der Euler-Poissonschen Differentiationsformel.

Satz 2.13 (Euler-Poissonsche Differentiationsformel)

Es sei $\mathbf{b}(\lambda)$ eine differenzierbare vektorwertige Funktion mit positivem konstanten Betrag ($\|\mathbf{b}(\lambda)\| = \text{const.} > 0$ für alle Werte λ). Dann existiert eine Vektorfunktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, so dass $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega}(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda)$.

Beweis. Wegen $\text{const.} = \|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$ ist $0 = \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = 2\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}$. Die Vektoren \mathbf{b} und $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}$ stehen also senkrecht aufeinander oder $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}$ ist $\mathbf{0}$.

Wir bilden nun $(\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}) \times \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - \underbrace{\mathbf{b}(\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda})}_0 = \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} \|\mathbf{b}\|^2$. Die Funktion

$$\boldsymbol{\omega}(\lambda) = \frac{\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}}{\|\mathbf{b}\|^2} \tag{2.23}$$

leistet das Gewünschte. Aber auch jede Funktion $\boldsymbol{\omega}^*(\lambda) = \boldsymbol{\omega}(\lambda) + \mu \mathbf{b}(\lambda)$ liefert $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega}^*(\lambda) \times \mathbf{b}$. ■

Für jeden Wert λ ist also die Funktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$ nicht eindeutig bestimmt; vielmehr wird die Menge der Vektoren $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, die $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$ erfüllen, durch eine Gerade durch $\frac{\mathbf{b} \times \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}}{\|\mathbf{b}\|^2}$ in Richtung \mathbf{b} beschrieben. Eine eindeutige vektorwertige Funktion ergibt sich, wenn zwei differenzierbare linear unabhängige vektorwertige Funktionen konstanten Betrages $\mathbf{b}(\lambda)$ und $\mathbf{c}(\lambda)$ vorliegen und auch noch die Differenz $\mathbf{c}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda)$ konstanten Betrag besitzt. Da der Differenzvektor $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ mit \mathbf{b} und \mathbf{c} ein Dreieck bildet, besagt die Konstanz der drei Vektoren, dass dieses Dreieck nur gedreht, nicht aber verzerrt werden darf, damit die Voraussetzungen des Satzes vorliegen.

Satz 2.14 (Eindeutigkeit der Funktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$)

Es seien $\mathbf{b}(\lambda)$, $\mathbf{c}(\lambda)$ linear unabhängige differenzierbare vektorwertige Funktionen mit positivem konstanten Betrag ($\|\mathbf{b}(\lambda)\| = \text{const.} > 0$, $\|\mathbf{c}(\lambda)\| = \text{const.} > 0$ für alle Werte λ). Es sei ferner $\|\mathbf{c}(\lambda) - \mathbf{b}(\lambda)\| = \text{const.} > 0$. Dann existiert genau eine vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\omega}(\lambda)$, so dass

$$\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b} \text{ und } \frac{d\mathbf{c}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}.$$

Beweis. Ausgangspunkt ist die Konstanz von $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|$, was nach Ableitung auf $(\mathbf{c} - \mathbf{b}) \cdot \frac{d}{d\lambda}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = 0$ und unter Verwendung der Orthogonalität von \mathbf{b} , $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda}$ bzw. \mathbf{c} , $\frac{d\mathbf{c}}{d\lambda}$ auf $\mathbf{c} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} + \mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{c}}{d\lambda} = 0$ führt. Einsetzen der Differentiationsformeln $\frac{d\mathbf{b}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{b}$ und $\frac{d\mathbf{c}}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{c}$ mit mehrdeutigen Funktionen $\boldsymbol{\omega}_b$ und $\boldsymbol{\omega}_c$ liefert $\mathbf{c} \cdot (\boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\boldsymbol{\omega}_c \times \mathbf{c}) = 0$, woraus unter Verwendung der Rechenregeln für das Spatprodukt $(\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = 0$ folgt. Der Vektor $\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b$ steht auf $\mathbf{c} \times \mathbf{b}$ senkrecht, er lässt sich daher (wegen der linearen Unabhängigkeit von \mathbf{b} und \mathbf{c}) in eindeutige Anteile in Richtung \mathbf{b} , \mathbf{c} zerlegen: $\boldsymbol{\omega}_c - \boldsymbol{\omega}_b = \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}$ (β, γ eindeutig), also ist $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_c - \gamma \mathbf{c} = \boldsymbol{\omega}_b + \beta \mathbf{b}$ eindeutig festgelegt. ■

Für eine Bewegung, also eine zeitabhängige Funktion, spielt die in den obigen Sätzen beschriebene Funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$ eine herausragende Rolle. Immer dann, wenn die Voraussetzungen des Satzes 2.14 gegeben sind, kann die eindeutige Funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$ herangezogen werden, um zeitliche Änderungen der vektorwertigen Funktionen $\mathbf{b}(t)$ und $\mathbf{c}(t)$ zu ermitteln. Dies ist beispielsweise dann der Fall, wenn $\mathbf{b}(t)$ und $\mathbf{c}(t)$ Basisvektoren sind, die mit der Zeit gedreht werden, ohne dass sie ihren Betrag und den zwischen ihnen eingeschlossenen Winkel ändern – oder wenn $\mathbf{b}(t)$ und $\mathbf{c}(t)$ Ortsvektoren zwischen verschiedenen materiellen Punkten eines starren Körpers sind. Eine derartige Funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$ heißt **Drehgeschwindigkeit**.

Definition 2.15 (Drehgeschwindigkeit)

Es seien $\mathbf{b}(t)$, $\mathbf{c}(t)$ linear unabhängige differenzierbare vektorwertige Funktionen der Zeit t und es gelte $\|\mathbf{b}(t)\| = \text{const.} > 0$, $\|\mathbf{c}(t)\| = \text{const.} > 0$ sowie $\|\mathbf{c}(t) - \mathbf{b}(t)\| = \text{const.} > 0$. Dann heißt die eindeutige vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$, für die $\dot{\mathbf{b}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{b}$ und $\dot{\mathbf{c}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}$ gilt, die **Drehgeschwindigkeit**.

Insbesondere ist für Basisvektoren eines bewegten Bezugssystems die vektorwertige Funktion $\boldsymbol{\omega}$ eindeutig, wenn die Basis gedreht wird, aber sich der Winkel zwischen den Basisvektoren nicht ändert. Dies war bei allen betrachteten Basen der Fall, da es sich stets um Orthonormalbasen handelte. Wir werden uns im Folgenden auf bewegte Bezugssysteme beschränken, deren Basis derartig gedreht wird. Der Bezugspunkt kann sich dabei weiterhin gegenüber dem raumfesten Bezugssystem bewegen.

Beispiel 2.16 (Zylindrische Koordinaten)

Für die in Abschnitt 2.2.1 ist die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$, die Drehgeschwindigkeit ergibt sich dann aus dem Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Basisvektor der Drehachse, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{e}}_R &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_R = \dot{\varphi}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R) = \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\mathbf{e}}_\varphi &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_\varphi = \dot{\varphi}(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi) = -\dot{\varphi} \mathbf{e}_R.\end{aligned}$$

◇

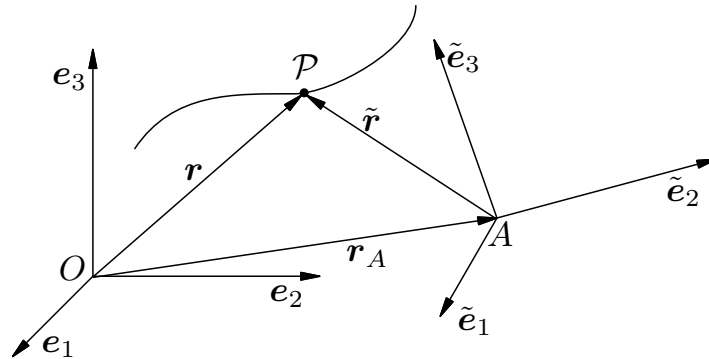


Abb. 2.12: Ortsvektoren des Massenpunkts im raumfesten und im bewegten Bezugssystem.

Wir betrachten das in Abb. 2.12 skizzierte raumfeste Bezugssystem O, \mathbf{e}_i , $i = 1, 2, 3$, das bewegte Bezugssystem $A, \tilde{\mathbf{e}}_i$, $i = 1, 2, 3$ und den Massenpunkt \mathcal{P} . Den Ortsvektor von \mathcal{P} im raumfesten Bezugssystem bestimmen wir zu $\mathbf{r}(t) =$

$\mathbf{r}_A(t) + \tilde{\mathbf{r}}(t)$ mit⁴

$$\tilde{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{x}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) = \tilde{x}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t).$$

Bei der Ableitung des Ortsvektors müssen wir folgende Anteile berücksichtigen:

1. Die zeitliche Änderung des Bezugspunkts des Bezugssystems: $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$
2. Die zeitliche Änderung der Basisvektoren des Bezugssystems:

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i(t)$$

3. Die zeitliche Änderung der Koordinaten des Ortsvektors im bewegten Bezugssystem: $\dot{\tilde{x}}_i(t)$

Daher gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) &= \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \tilde{x}_i(t) \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \tilde{x}_i(t) \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{x}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) \\ &= \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) \\ &=: \mathbf{v}_F + \mathbf{v}_{\text{rel}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Definition 2.17 (Führungsgeschwindigkeit, Relativgeschwindigkeit)

Es sei $\mathbf{r}(t)$ eine Bewegung des Massenpunkts \mathcal{P} und $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ der Ortsvektor von \mathcal{P} in einem bewegten Bezugssystem. Der Anteil

$$\mathbf{v}_F := \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t)$$

in Gl. (2.24) heißt **Führungsgeschwindigkeit** und der Anteil

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} := \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t)$$

Relativgeschwindigkeit des Massenpunkts.

Die Führungsgeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, die der Massenpunkt \mathcal{P} hätte, wenn er relativ zum bewegten Bezugssystem ruhen (also von diesem „geführt“) würde. Sie setzt sich aus dem translatorischen Anteil $\dot{\mathbf{r}}_A(t)$ und dem rotatorischen Anteil $\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t)$ zusammen. Bei der Relativgeschwindigkeit handelt es sich um die Geschwindigkeit des Massenpunkts \mathcal{P} relativ zum bewegten Bezugssystem.

Beispiel 2.18

Bewegung zweier als Massenpunkt modellierte Schiffe (\mathcal{P}_1 und \mathcal{P}_2) mit gegebener Anfangslage und konstanten Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Welche Relativgeschwindigkeit beobachtet ein Passagier auf \mathcal{P}_1 ?

⁴Wir verwenden hier und im Folgenden die Einsteinsche Summationskonvention: Tritt ein Index in einem Produkt doppelt auf, so wird über den Wertebereich des Index summiert.

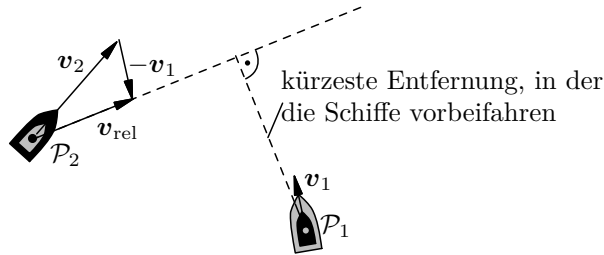


Abb. 2.13: Bewegung zweier Schiffe.

Die Momentanlagen P_1 und P_2 der Massenpunkte können als Bezugspunkte zweier Bezugssysteme angesehen werden, die sich gegeneinander bewegen. Ein mit P_1 fest verbundener Passagier hat die Führungsgeschwindigkeit \mathbf{v}_1 . Für den Punkt P_2 ergibt sich dann aus Gl. (2.24)

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_{\text{rel}}.$$

Die Relativgeschwindigkeit ist demnach $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Mit Hilfe der Relativgeschwindigkeit \mathbf{v}_{rel} kann auch der kürzeste Abstand bestimmt werden, in dem die beiden Schiffe aneinander vorbeifahren. \diamond

Zur Ermittlung der Beschleunigung leiten wir Führungsgeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit nach der Zeit ab:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_{\text{F}} &= \ddot{\mathbf{r}}_A(t) + (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}(t))' = \ddot{\mathbf{r}}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{v}_{\text{rel}}), \\ \dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}} &= \ddot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) + \dot{\tilde{x}}_i(t) \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_i(t) = \ddot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}. \end{aligned}$$

Mit der Ableitung $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ der Drehgeschwindigkeit erhalten wir dann insgesamt für die Beschleunigung des Massenpunkts \mathcal{P} :

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \dot{\mathbf{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}}(t)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \ddot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t). \quad (2.25)$$

Definition 2.19 (Führungsbeschleunigung, Coriolisbeschleunigung, Relativbeschleunigung)

Es sei $\mathbf{r}(t)$ eine Bewegung des Massenpunkts \mathcal{P} und $\tilde{\mathbf{r}}(t)$ der Ortsvektor von \mathcal{P}

in einem bewegten Bezugssystem. Der Anteil

$$\mathbf{a}_F := \ddot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t))$$

in Gl. (2.25) heißt **Führungsbeschleunigung**, der Anteil

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} := 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

Coriolisbeschleunigung und der Anteil

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} := \ddot{x}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t)$$

Relativbeschleunigung des Massenpunkts.

Die Führungsbeschleunigung ist wieder die Beschleunigung eines relativ zum bewegten Bezugssystem ruhenden Massenpunkts; denn dann verschwinden \mathbf{v}_{rel} und \mathbf{a}_{rel} und somit die weiteren Terme in der Beschleunigung. Die Führungsbeschleunigung setzt sich aus dem translatorischen Anteil $\ddot{\mathbf{r}}_A(t)$ und dem rotatorischen Anteil $\boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t))$ zusammen. Bei der Relativbeschleunigung handelt es sich um die Beschleunigung des Massenpunkts relativ zum bewegten Bezugssystem. Die Coriolisbeschleunigung tritt nur auf, wenn

1. das bewegte Bezugssystem rotiert ($\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$),
2. der Massenpunkt gegenüber dem bewegten Bezugssystem eine Relativgeschwindigkeit besitzt ($\mathbf{v}_{\text{rel}} \neq \mathbf{0}$) **und**
3. Drehgeschwindigkeit und Relativgeschwindigkeit nicht parallel sind ($\boldsymbol{\omega} \nparallel \mathbf{v}_{\text{rel}}$).

Beispiel 2.20

Ein Massenpunkt bewegt sich entlang der Koppel eines Parallelkurbelgetriebes. Welche Geschwindigkeit und welche Beschleunigung hat der Massenpunkt?

Wir betrachten als Bezugspunkt eines bewegten Bezugssystems den Punkt A auf der Koppel. Er bewegt sich auf einer Kreisbahn mit Radius r um den Ursprung des raumfesten Bezugssystems. Führungsgeschwindigkeit und Führungsbeschleunigung sind daher (vgl. (2.12))

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_F &= r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a}_F &= r\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Die Relativgeschwindigkeit durch die Bewegung entlang der Koppel ist

$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{x} \tilde{\mathbf{e}}_x$$

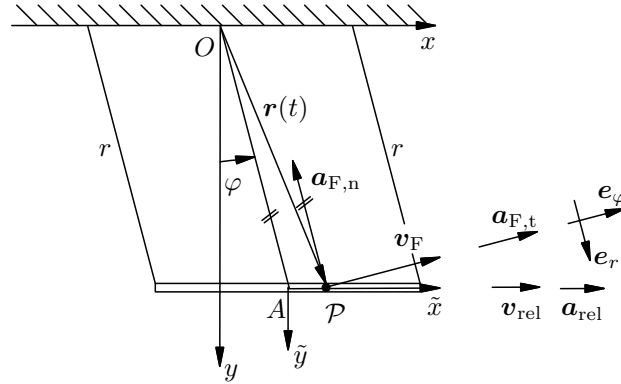


Abb. 2.14: Bewegung eines Massenpunkts entlang der Koppel eines Parallelkurbelgetriebes.

und die Relativbeschleunigung folglich

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x} \tilde{\mathbf{e}}_x,$$

da der Basisvektor $\tilde{\mathbf{e}}_x$ zeitunabhängig ist. Geschwindigkeit und Beschleunigung lauten daher

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= r\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{x} \tilde{\mathbf{e}}_x, \\ \mathbf{a} &= r\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi - r\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_r + \ddot{x} \tilde{\mathbf{e}}_x. \end{aligned}$$

Die Transformation der Basisvektoren auf das raumfeste kartesische Bezugssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\varphi &= \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{e}_r &= \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_y, \\ \tilde{\mathbf{e}}_x &= \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (r\dot{\varphi} \cos \varphi + \dot{x}) \mathbf{e}_x + (-r\dot{\varphi} \sin \varphi) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{a} &= (r\ddot{\varphi} \cos \varphi - r\dot{\varphi}^2 \sin \varphi + \ddot{x}) \mathbf{e}_x + (-r\ddot{\varphi} \sin \varphi - r\dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen würden sich auch ergeben, wenn der Ortsvektor im raumfesten kartesischen Bezugssystem,

$$\mathbf{r} = (r \sin \varphi + \tilde{x}) \mathbf{e}_x + r \cos \varphi \mathbf{e}_y,$$

nach der Zeit abgeleitet wird. In diesem Beispiel tritt keine Coriolisbeschleunigung auf, da das bewegte A, $\tilde{\mathbf{e}}_x$, $\tilde{\mathbf{e}}_y$ -Bezugssystem nicht rotiert. Nur der Bezugspunkt bewegt sich auf einer Kreisbahn, die Koppel bleibt stets parallel zur raumfesten x -Achse ausgerichtet!

Anders verhält es sich, wenn die Koppel sich tangential zur Kreisbahn bewegt, wie bei dem in Abb. 2.15 skizzierten Pendel. Richten wir den Basisvektor $\tilde{\mathbf{e}}_x$ wieder zweckmäßigerweise in Richtung der Koppel aus, so dass die Relativgeschwindigkeit weiterhin $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_x$ ist, dann muss in der Führungsgeschwindigkeit nicht nur die Bewegung des Bezugspunkts A auf der Kreisbahn, sondern auch die Rotation des $A, \tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y$ -Bezugssystems berücksichtigt werden. Die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y$ fallen mit den Basisvektoren \mathbf{e}_φ und \mathbf{e}_r der Polarkoordinaten zusammen, so dass insbesondere $\mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_x = \dot{\tilde{x}} \mathbf{e}_\varphi$ sowie $\dot{\tilde{\mathbf{e}}}_x = -\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y, \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y = \dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_x$ gelten.

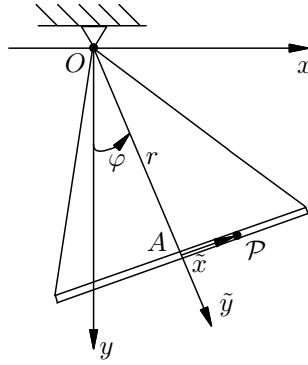


Abb. 2.15: Bewegung des Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel.

Wegen

$$\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\varphi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tilde{x}\dot{\varphi} \\ 0 \end{bmatrix}$$

lautet die Führungsgeschwindigkeit nun

$$\mathbf{v}_F = r\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_x - \tilde{x}\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y.$$

Die absolute Geschwindigkeit des Massenpunkts ist dann

$$\mathbf{v} = (r\dot{\varphi} + \dot{\tilde{x}}) \tilde{\mathbf{e}}_x - \tilde{x}\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y.$$

Auch die Beschleunigung des Massenpunkts ändert sich. Zum einen muss natürlich die zeitliche Ableitung des zusätzlichen Anteils der Führungsgeschwindigkeit berücksichtigt werden – zum anderen darf aber auch nicht vergessen werden, dass die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_x$ und $\tilde{\mathbf{e}}_y$ nicht mehr zeitunabhängig sind. Die Ableitung der Führungsgeschwindigkeit ist daher

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{v}}_F &= r\ddot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_x - r\dot{\varphi} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_x - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y - \tilde{x}\ddot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y - \tilde{x}\dot{\varphi} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_y \\ &= r\ddot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_x - r\dot{\varphi}^2 \tilde{\mathbf{e}}_y - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y - \tilde{x}\ddot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y - \tilde{x}\dot{\varphi}^2 \tilde{\mathbf{e}}_x, \end{aligned}$$

während sich die Ableitung der Relativgeschwindigkeit zu

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}} = \ddot{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_x + \dot{\tilde{x}} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}_x = \ddot{\tilde{x}} \tilde{\mathbf{e}}_x - \dot{\tilde{x}}\dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_y$$

ergibt. In beiden Gleichungen tritt der Term $\dot{x}\dot{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_y$ auf; er liefert die Coriolisbeschleunigung

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\dot{x}\dot{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_y.$$

Die restlichen Terme ergeben die Führungsbeschleunigung

$$\mathbf{a}_{\text{F}} = (r\ddot{\varphi} - \dot{x}\dot{\varphi}^2)\tilde{\mathbf{e}}_x - (r\dot{\varphi}^2 + \ddot{x}\dot{\varphi})\tilde{\mathbf{e}}_y$$

sowie die Relativbeschleunigung

$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{x}\tilde{\mathbf{e}}_x.$$

Insgesamt lautet die Beschleunigung des Massenpunkts dann

$$\mathbf{a} = (r\ddot{\varphi} - \dot{x}\dot{\varphi}^2 + \ddot{x})\tilde{\mathbf{e}}_x - (r\dot{\varphi}^2 + \ddot{x}\dot{\varphi} + 2\dot{x}\dot{\varphi})\tilde{\mathbf{e}}_y.$$

Auch hier kann die Darstellung im raumfesten kartesischen Bezugssystem durch Transformation der Basisvektoren ermittelt werden. \diamond

Als weiteres Beispiel betrachten wir wieder die zylindrischen Koordinaten.

Beispiel 2.21 (Zylindrische Koordinaten)

Wir betrachten ein kartesisches Koordinatensystem als Inertialsystem und als bewegtes Bezugssystem ein zylindrisches Koordinatensystem. Beide Koordinatensysteme haben zweckmäßigerweise den gleichen Ursprung, so dass $\mathbf{r}_A(t) \equiv \mathbf{0}$ gilt und das bewegte Bezugssystem der zylindrischen Koordinaten gegen das kartesische Bezugssystem nur rotiert. Gleichungen (2.24) und (2.25) für die Relativgeschwindigkeit und die Relativbeschleunigung vereinfachen sich daher zu

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \dot{x}_i(t)\tilde{\mathbf{e}}_i(t), \\ \mathbf{a} &= \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \ddot{x}_i(t)\tilde{\mathbf{e}}_i(t). \end{aligned}$$

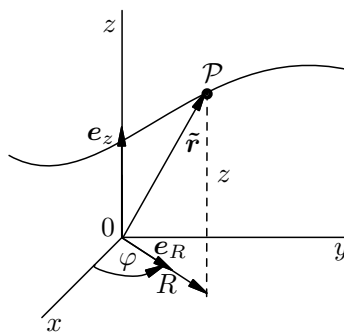


Abb. 2.16: Ortsvektor in kartesischen und zylindrischen Koordinaten.

Der Ortsvektor $\tilde{\mathbf{r}}$ ist gemäß Gl. (2.6) $\tilde{\mathbf{r}} = R \mathbf{e}_R + z \mathbf{e}_z$, die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_z$. Mit $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\varphi$ und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\varphi = -\mathbf{e}_R$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) &= R\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{v}_{\text{rel}} = \dot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) &= \dot{R} \mathbf{e}_R + \dot{z} \mathbf{e}_z, \\ \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) &= R\ddot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi \\ \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t)) &= -R\dot{\varphi}^2 \mathbf{e}_R, \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} &= \dot{R}\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{\tilde{x}}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t) &= \ddot{R} \mathbf{e}_R + \ddot{z} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{R} \mathbf{e}_R + R\dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi + \dot{z} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{a} &= (-R\dot{\varphi}^2 + \ddot{R}) \mathbf{e}_R + (R\ddot{\varphi} + 2\dot{R}\dot{\varphi}) \mathbf{e}_\varphi + \ddot{z} \mathbf{e}_z,\end{aligned}$$

also wieder die Gleichungen (2.8) und (2.9). Die hier durchgeführte Berechnung war allerdings aufgrund der Vorüberlegungen zur Relativbewegung wesentlich weniger aufwändig und beinhaltet insbesondere keine Ermittlung der Transformationsbeziehungen zwischen den Basisvektoren des kartesischen und des zylindrischen Koordinatensystems. \diamond

Die Euler-Poissonsche Differentiationsformel liefert zwar ein sehr schönes mathematisches Ergebnis – sie trifft jedoch keine Aussage über die Berechnung der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$; denn die dafür im Beweis angegebene Gl. (2.23) setzt im Zähler bereits die Kenntnis der gesuchten Ableitung voraus. Mit Hilfe geometrischer oder physikalischer Überlegungen lässt sich $\boldsymbol{\omega}$ in einfachen Fällen unter Verwendung einer Winkelgeschwindigkeit ermitteln. Nicht immer existiert jedoch ein derart einfacher Zusammenhang zwischen einer Winkelgeschwindigkeit (im Beispiel oben: $\dot{\varphi}$) und der Drehgeschwindigkeit wie für die Zylinder- oder Polarkoordinaten. Bereits bei den sphärischen Koordinaten ist dies nicht mehr der Fall. Es verbleibt dann die Möglichkeit, die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_i$ des bewegten Bezugssystems in den Basisvektoren des raumfesten Bezugssystems \mathbf{e}_i darzustellen und dazu die neun Richtungskosinus über die Skalarprodukte $T_{ij} = \tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \mathbf{e}_j$, $i, j = 1, 2, 3$ zu bestimmen. Es ist dann $\tilde{\mathbf{e}}_i = T_{ij} \mathbf{e}_j$. Da \mathbf{T}^T die Skalarprodukte $T_{ij}^T = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j$ beinhaltet, ist die Transformationsmatrix \mathbf{T} orthogonal, d.h., ihre transponierte Matrix \mathbf{T}^T ist auch die inverse Matrix \mathbf{T}^{-1} . Mit Hilfe der Transformationsmatrix können die Basisdarstellungen $\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i = r_j \mathbf{e}_j$ eines Vektors umgerechnet werden, denn es ist $\tilde{r}_i \tilde{\mathbf{e}}_i = \tilde{r}_i T_{ij} \mathbf{e}_j$ und somit gilt $r_j = \tilde{r}_i T_{ij} = T_{ji}^T \tilde{r}_i$ bzw. $\tilde{r}_i = T_{ij} r_j$.

So wurde beispielsweise bei der Einführung der zylindrischen und sphärischen Koordinaten vorgegangen. Zu den neun Richtungskosinus gesellen sich allerdings auch sechs Nebenbedingungen

$$\tilde{\mathbf{e}}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

sofern die Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_i$ eine Orthonormalbasis bilden. Es sollte daher möglich sein, die Drehung durch nur drei unabhängige Parameter zu beschreiben.

Hierzu können beispielsweise drei Drehungen um einzelne Basisvektoren hintereinander ausgeführt werden, um dann die Gesamtdrehung zu erhalten.

Bei den **Kardan-Winkeln** wird jeweils einmal um die erste, zweite und dritte Achse gedreht, s. Abb. 2.17. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt:

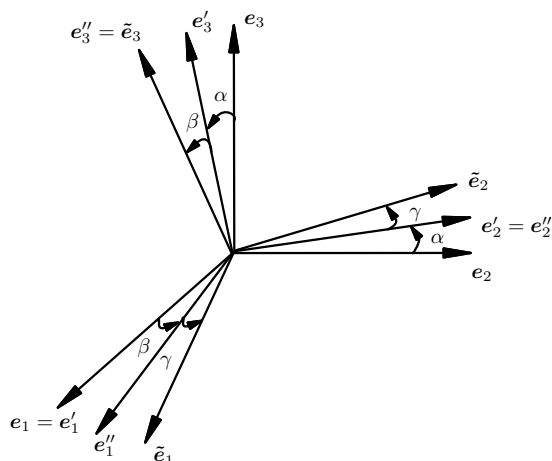


Abb. 2.17: Kardan-Winkel. Es wird nacheinander je einmal um die erste (mit Winkel α), zweite (mit Winkel β) und dritte Achse (mit Winkel γ) gedreht.

1. Elementardrehung

Winkel α um die e_1 -Achse

$$e'_i = T_{1,ij}(\alpha)e_j, \text{ mit } [T_{1,ij}(\alpha)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

2. Elementardrehung

Winkel β um die e'_2 -Achse

$$e''_i = T_{2,ij}(\beta)e'_j, \text{ mit } [T_{2,ij}(\beta)] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

3. Elementardrehung

Winkel γ um die e''_3 -Achse

$$\tilde{e}_i = T_{3,ij}(\gamma)e''_j, \text{ mit } [T_{3,ij}(\gamma)] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Hintereinanderausführung der drei Elementardrehungen führt insgesamt auf $\tilde{\mathbf{e}}_i = T_{ij}^{\mathbf{K}} \mathbf{e}_j$ mit

$$T_{ij}^{\mathbf{K}} = T_{3,ik}(\gamma)T_{2,kl}(\beta)T_{1,lj}(\alpha),$$

$$[T_{ij}^{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma & \sin \alpha \cos \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \\ \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}.$$

Die Kardan-Winkel besitzen sogenannte singuläre Lagen für $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$. In diesem Fall sind die Richtungen für die erste und dritte Elementardrehung identisch.

In allen anderen Fällen können die Kardan-Winkel aus der Transformationsmatrix \mathbf{T} der Richtungscosinus bestimmt werden, wenn diese mit $\mathbf{T}^{\mathbf{K}}$ gleichgesetzt wird. Durch Vergleich der einzelnen Matrixeinträge ergeben sich dann zwei Möglichkeiten für β :

$$\sin \beta = T_{31}, \quad \cos \beta = \pm \sqrt{1 - T_{31}^2}.$$

Damit bestimmt sich dann der Winkel α zu

$$\sin \alpha = -\frac{T_{32}}{\cos \beta}, \quad \cos \alpha = \frac{T_{33}}{\cos \beta}$$

und der Winkel γ zu

$$\sin \gamma = -\frac{T_{21}}{\cos \beta}, \quad \cos \gamma = \frac{T_{11}}{\cos \beta}.$$

Wird die Transformationsmatrix $\mathbf{T}^{\mathbf{K}}$ der Kardan-Winkel für kleine Winkel linearisiert, indem jeweils der Cosinus des Winkel eins gesetzt wird, der Sinus durch sein Argument ersetzt wird und quadratische Terme in den Winkeln vernachlässigt werden, dann ergibt sich

$$[T_{ij}^{\mathbf{K}}] \approx \begin{bmatrix} 1 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 1 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Winkelfunktionen befinden sich in diesem Fall auf den Nebendiagonalen. Die Nebendiagonalelemente sind schiefssymmetrisch.

Wie kann nun mit Hilfe der Elementardrehungen der Vektor der Drehgeschwindigkeiten gebildet werden? Dazu benötigen wir den folgenden Satz:

Satz 2.22 (Hintereinanderausführung von Drehungen)

Werden zwei Drehungen des Bezugssystems mit Drehgeschwindigkeiten $\boldsymbol{\omega}_1(t)$ und $\boldsymbol{\omega}_2(t)$ hintereinander ausgeführt, dann addieren sich die Drehgeschwindigkeiten. Die Drehgeschwindigkeit der gesamten Drehung ist dann $\boldsymbol{\omega}(t) = \boldsymbol{\omega}_1(t) + \boldsymbol{\omega}_2(t)$.

Beweis. Aus $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ folgt zunächst $d\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} dt$. Für die erste Drehung ergibt sich dann $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\mathbf{r}_1$, mit $d\mathbf{r}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} dt$. Nach der 2. Drehung ergibt sich dann

$$d\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}_1 dt = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r} + d\mathbf{r}_1) dt = \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r} dt + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} (dt)^2).$$

Der gesamte Zuwachs ist daher

$$d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} dt + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r} dt + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} (dt)^2).$$

Da der letzte Term quadratisch klein in dt ist, gilt

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}. \quad \blacksquare$$

Die Drehgeschwindigkeiten der Elementardrehungen dürfen also zum gesamten Drehgeschwindigkeitsvektor addiert werden. Daher lässt sich die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ mit den Geschwindigkeiten der Kardan-Winkel wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} \mathbf{e}_1 + \dot{\beta} \mathbf{e}'_2 + \dot{\gamma} \tilde{\mathbf{e}}_3.$$

Die Drehgeschwindigkeiten der einzelnen Elementardrehungen beziehen sich jedoch auf unterschiedliche Bezugssysteme, so dass die Darstellung von $\boldsymbol{\omega}$ nicht in einem einheitlichen Bezugssystem vorliegt. Hierzu müssen noch die Basisvektoren mit Hilfe der Transformationsmatrizen der Elementardrehungen in die bewegte Basis bzw. in die raumfeste Basis transformiert werden. In der bewegten Basis ist dann $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma, \\ \tilde{\omega}_2 &= -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma, \\ \tilde{\omega}_3 &= \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Insbesondere sind die Koordinaten des Drehgeschwindigkeitsvektors keine Zeitableitungen der Winkel, also keine „Winkelgeschwindigkeiten“! Durch Differentiation der Drehgeschwindigkeit unter Beachtung der Zeitabhängigkeit der Basisvektoren erhält man dann die Drehbeschleunigung.

Beispiel 2.23 (Sphärische Koordinaten)

Wir drehen zunächst um die raumfeste \mathbf{e}_z -Achse mit $\alpha = \varphi$, vgl. Abb 2.8. Der Basisvektor \mathbf{e}_x des raumfesten Bezugssystems geht dann über in \mathbf{e}_R . Da um diese Achse nicht gedreht wird, ist $\beta = 0^\circ$. Die letzte Drehung erfolgt um die \mathbf{e}_φ -Achse mit $\gamma = \vartheta$. Durch Hintereinanderausführung der beiden Drehungen sind dann die raumfesten Basisvektoren $(\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ in $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\vartheta, \mathbf{e}_\varphi)$ übergegangen. Unter Beachtung dieser Reihenfolge ergeben sich die drei Drehgeschwindigkeiten aus (2.26) zu

$$\begin{aligned} \omega_r &= \tilde{\omega}_1 = \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma = \dot{\varphi} \cos \vartheta, \\ \omega_\vartheta &= \tilde{\omega}_2 = -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma = -\dot{\varphi} \sin \vartheta, \\ \omega_\varphi &= \tilde{\omega}_3 = \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} = \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Durch Bilden des Vektorprodukts mit den drei Basisvektoren kann man sich leicht davon überzeugen, dass sich mit Hilfe dieses Drehgeschwindigkeitsvektors wieder die in Abschnitt 2.2.1 hergeleiteten Zeitableitungen für die Basisvektoren der sphärischen Koordinaten ergeben. \diamond

Kardan-Winkel finden vor allem in der Luftfahrt sowie in der Fahrzeugtechnik Anwendung. Die Drehung um die Fahrzeuglängsachse wird als Rollen, diejenige um die Querachse als Nicken und die Drehung um die Hochachse als Gieren bezeichnet. Teilweise sind auch die Bezeichnungen Wanken, Stampfen und Schlingern für diese drei Drehungen üblich.

Eine andere Vorgehensweise geht auf Leonhard Euler zurück. Die dabei auftretenden drei Parameter zur Beschreibung der Gesamtdrehung werden daher **Euler-Winkel** genannt. Daneben existieren weitere Möglichkeiten (z.B. Euler-Parameter, Quaternionen) zur Beschreibung der Gesamtdrehung.

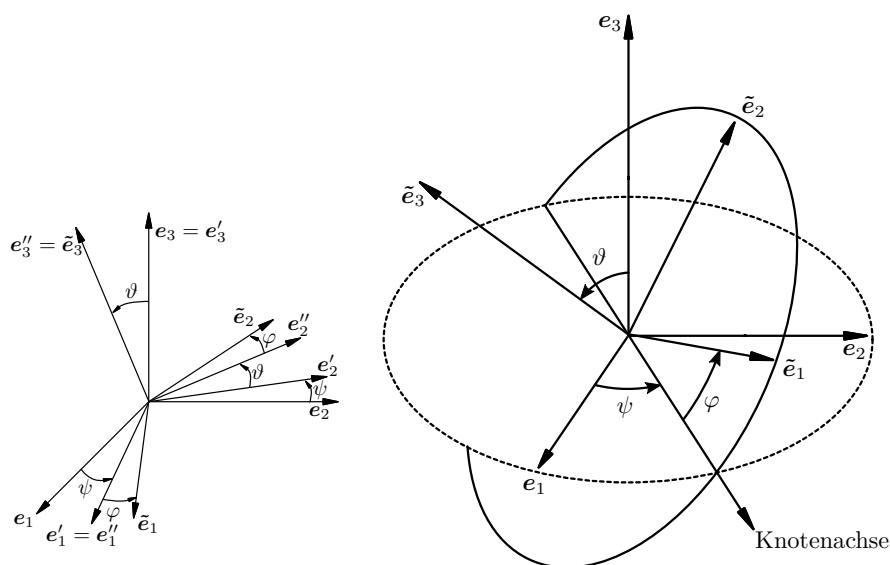


Abb. 2.18: Euler-Winkel. Rechts: Die gestrichelt gezeichnete Ellipse wird in die durchgezogene gezeichnete Ellipse überführt, indem die e_1 -Achse durch Drehung mit ψ um die e_3 -Achse in die e'_1 -Knotenachse gedreht wird, die Ellipse um die Knotenachse mit ϑ verkippt wird und anschließend um die \tilde{e}_3 -Achse mit φ in die Endlage gedreht wird.

1. Elementardrehung

Winkel ψ um die e_3 -Achse

$$\mathbf{e}'_i = T_{3,ij}(\psi)\mathbf{e}_j, \text{ mit } [T_{3,ij}(\psi)] = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Elementardrehung

Winkel ϑ um die e'_1 -Achse

$$\mathbf{e}''_i = T_{1,ij}(\vartheta)\mathbf{e}'_j, \text{ mit } [T_{1,ij}(\vartheta)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

3. Elementardrehung

Winkel φ um die \mathbf{e}_3'' -Achse

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = T_{3,ij}(\varphi)\mathbf{e}_j'', \text{ mit } [T_{3,ij}(\varphi)] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Hintereinanderausführung der drei Elementardrehungen führt insgesamt auf $\tilde{\mathbf{e}}_i = T_{ij}^E \mathbf{e}_j$ mit

$$T_{ij}^E = T_{3,ik}(\varphi)T_{1,kl}(\vartheta)T_{3,lj}(\psi),$$

$$[T_{ij}^E] = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix}.$$

Der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ lässt sich mit den Winkelgeschwindigkeiten der Elementardrehungen wie folgt schreiben:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta} \mathbf{e}'_1 + \dot{\varphi} \mathbf{e}''_3.$$

Durch Einsetzen der Transformationsbeziehungen ergibt sich daraus die Basisdarstellung $\boldsymbol{\omega} = \tilde{\omega}_i \tilde{\mathbf{e}}_i$ der Drehgeschwindigkeit mit

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \tilde{\omega}_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \tilde{\omega}_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Zu jeder Verdrehung der Basisvektoren $\tilde{\mathbf{e}}_i$ gegenüber den Basisvektoren \mathbf{e}_i lassen sich Euler-Winkel finden, die diese Verdrehung beschreiben. Sind \mathbf{e}_3 und $\tilde{\mathbf{e}}_3$ parallel (also $\mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{0}$), dann wird nur um die Knotenachse gedreht. Für $\mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_3 \neq \mathbf{0}$ ergeben sich die Basisvektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \frac{\mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_3}{\|\mathbf{e}_3 \times \tilde{\mathbf{e}}_3\|}, \\ \mathbf{e}'_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}'_1, \\ \mathbf{e}''_2 &= \tilde{\mathbf{e}}_3 \times \mathbf{e}'_1. \end{aligned}$$

Aus den Richtungscosinus, bspw. $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}_3 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3$, $\mathbf{e}'_1 \cdot \tilde{\mathbf{e}}_1$, können dann die drei Euler-Winkel ψ , ϑ , φ bestimmt werden.

Auch bei den Euler-Winkeln gibt es singuläre Lagen, nämlich für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$. In diesem Fall sind wieder die Richtungen für die erste und dritte Elementardrehung identisch. In allen anderen Fällen können auch die Euler-Winkel aus der Transformationsmatrix der Richtungscosinus bestimmt werden. Es ergeben sich dann zwei Möglichkeiten für ϑ :

$$\sin \vartheta = \pm \sqrt{1 - T_{33}^2}, \quad \cos \vartheta = T_{33}$$

und damit der Winkel ψ zu

$$\sin \psi = \frac{T_{31}}{\sin \vartheta}, \quad \cos \psi = -\frac{T_{32}}{\sin \vartheta}$$

und der Winkel φ zu

$$\sin \varphi = \frac{T_{13}}{\sin \vartheta}, \quad \cos \varphi = \frac{T_{23}}{\sin \vartheta}.$$

Die Linearisierung der Transformationsmatrix \mathbf{T}^E liefert

$$[T_{ij}^E] \approx \begin{bmatrix} 1 & \psi + \varphi & 0 \\ -\varphi - \psi & 1 & \vartheta \\ 0 & -\vartheta & 1 \end{bmatrix}.$$

In der linearisierten Transformationsmatrix sind Nebendiagonaleinträge null, während in anderen die Summe zweier Winkel steht. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass zweimal, bei der ersten und der letzten Elementardrehung, um die dritte Achse gedreht wurde.

Zwischen Euler- und Kardan-Winkel ist eine Umrechnung leicht möglich. Dazu können die Transformationsmatrizen gleichgesetzt werden, da sie ja die Transformation zwischen den gleichen Basisvektoren, denen des raumfesten und des bewegten Bezugssystems, beschreiben. Die Gleichsetzung der einzelnen Einträge der Matrix führt dann bspw. auf folgende trigonometrische Beziehungen zur Ermittlung der Kardan-Winkel bei gegebenen Euler-Winkeln:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= -\cos \psi \tan \vartheta, \\ \sin \beta &= \sin \psi \sin \vartheta, \\ \tan \gamma &= \frac{\cos \psi \tan \varphi + \sin \psi \cos \vartheta}{\cos \psi - \sin \psi \cos \vartheta \tan \varphi}. \end{aligned}$$

Für Kreisel ist die Darstellung mit Euler-Winkeln vorteilhaft, wie wir im letzten Kapitel des Skripts sehen werden. Die drei Winkel werden dann der Präzession, der Nutation und der Eigenrotation (dem Spin) des Kreisels zugeordnet; die Präzession findet um die raumfeste Hochachse und die Eigenrotation um die Hochachse des symmetrischen Kreisels statt.

3 Kinematik der Kontinua

Die in der Kinematik des Massenpunkts gewonnenen Erkenntnisse lassen sich auf die kinematischen Untersuchungen beliebiger Körper (also materiell geschlossener Systeme) sinngemäß übertragen. Dies wird nachstehend durchgeführt. Die Ergebnisse lassen sich wiederum auf materiell offene Systeme erweitern.

3.1 Bewegung eines Körpers

Wir betrachten einen Körper \mathcal{B} , der zu einem bestimmten Zeitpunkt $t := t^*$ das Raumgebiet $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}(\mathcal{B}, t)$ einnimmt. Ein beliebig aber fest gewählter materieller Punkt $\mathcal{P} := \mathcal{P}^*$ aus \mathcal{B} ($\mathcal{P} \in \mathcal{B}$) befindet sich zum Zeitpunkt $t := t^*$ in dem raumfesten Punkt $P := P^*$ mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} := \mathbf{r}^*$. Der geometrische Punkt P wird der **Ort** des materiellen Punkts \mathcal{P} zum Zeitpunkt t genannt. Der Ortsvektor \mathbf{r} hängt von \mathcal{P} und t ab.

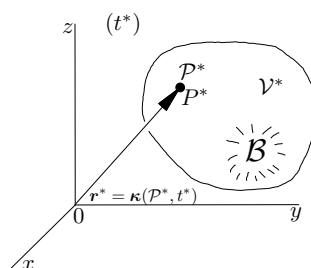


Abb. 3.1: Bewegung eines Körpers zum Zeitpunkt $t := t^*$.

Definition 3.1 (Bewegung eines Körpers)

Eine Funktion

$$\mathbf{r} = \kappa(\mathcal{P}, t) \text{ mit } \mathcal{P} \in \mathcal{B}, t \in Z_t \quad (3.1)$$

die jedem materiellen Punkt \mathcal{P} eines Körpers \mathcal{B} zu jedem Zeitpunkt t des betrachteten Zeitintervalls Z_t einen Ort P mit dem Ortsvektor \mathbf{r} zuordnet, wird die **kinematische Bewegungsgleichung** von \mathcal{B} oder kurz die **Bewegung** von \mathcal{B} im Zeitintervall Z_t genannt.

Die Funktion $\mathbf{r} = \kappa(\mathcal{P}, t)$ nennt man häufig auch die **materielle Darstellung** (Notation) der Bewegung, weil hier der materielle Punkt \mathcal{P} direkt, und zwar als unabhängige, „materielle“ Variable auftritt.

Definition 3.2 (Momentanlage)

Die Menge der Orte aller materiellen Punkte des Körpers zum Zeitpunkt t^* , d.h. die Menge aller Punkte mit den Ortsvektoren $\mathbf{r} = \kappa(\mathcal{P}, t^*)$, $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$, wird die **Momentanlage** des Körpers \mathcal{B} zum Zeitpunkt t^* genannt.

Somit ist die Momentanlage das Raumgebiet $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}(\mathcal{B}, t^*)$, das \mathcal{B} zum Zeitpunkt t^* einnimmt. Die Bewegung $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$ kann daher als eine einparametrische Folge der Abbildungen des Körpers \mathcal{B} auf seine raumfesten Momentanlagen $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{B}, t)$ aufgefasst werden, wobei die Zeit t der Abbildungsparameter ist.

Wählen wir in \mathcal{B} einen beliebigen materiellen Punkt $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$, so erhalten wir damit aus der allgemeinen Körperbewegung $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$ die Bewegung

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}^*, t) =: \mathbf{r}(t)$$

von \mathcal{P}^* , also die gleiche Darstellung, wie im Fall der Bewegung eines Massenpunkts. Daher lassen sich alle Überlegungen der Kinematik des Massenpunkts sinngemäß auf materielle Punkte übertragen.

Einen wichtigen und häufig vorkommenden Spezialfall stellt die ebene Bewegung dar.

Definition 3.3 (Ebene Bewegung)

*Bewegt sich jeder materielle Punkt eines Körpers oder eines materiell offenen Systems in einer Ebene und verlaufen alle Bewegungsebenen parallel, so nennt man einen solchen Vorgang **ebene Bewegung** dieses Körpers oder dieses materiell offenen Systems.*

Beispiel 3.4

Ein typisches Beispiel für eine ebene Bewegung eines materiell offenen Systems stellt in der Fluiddynamik die **Schichtströmung** (auch **Laminarströmung** genannt) dar.

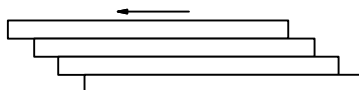


Abb. 3.2: Modell einer Laminarströmung. ◇

3.2 Materielle und räumliche Parametrisierung der Bewegung

In der materiellen Darstellung $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$ einer Bewegung eines Körpers treten als unabhängige Variablen die materielle Variable \mathcal{P} und die analytische Variable t auf.

Zwecks einer besseren Handhabung der Funktion $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$ empfiehlt es sich, der symbolischen, materiellen Variablen \mathcal{P} irgendwelche analytische Variablen (z.B. Koordinaten oder Parameter) zuzuordnen, damit man die materiellen Punkte analytisch kennzeichnen und somit voneinander unterscheiden kann.

Definition 3.5 (Materielle und räumliche Koordinaten)

Die der analytischen Kennzeichnung materieller Punkte dienenden Koordinaten werden **materielle Koordinaten** genannt. Die Ortskoordinaten der materiellen Punkte eines Körpers in der jeweiligen Momentanlage des Körpers werden **räumliche Koordinaten** genannt.

Im Gegensatz zu den räumlichen Koordinaten, die ja von der Momentanlage des Körpers abhängen, sind die materielle Koordinaten stets zeitunabhängig. Materielle und räumliche Koordinaten werden nachstehend eingeführt und näher untersucht.

Wir betrachten den in Abbildung 3.3 skizzierten Körper \mathcal{B} zu einem bestimmten, jedoch frei gewählten Zeitpunkt t_0 und zu einem beliebigen Zeitpunkt t .

Definition 3.6 (Bezugslage, Bezugskonfiguration)

Die Momentanlage \mathcal{V}_0 von \mathcal{B} zu einem bestimmten, jedoch frei gewählten Zeitpunkt t_0 wird die **Bezugslage** bzw. die **Bezugskonfiguration** von \mathcal{B} genannt. Der Zeitpunkt t_0 heißt **Bezugszeit**.

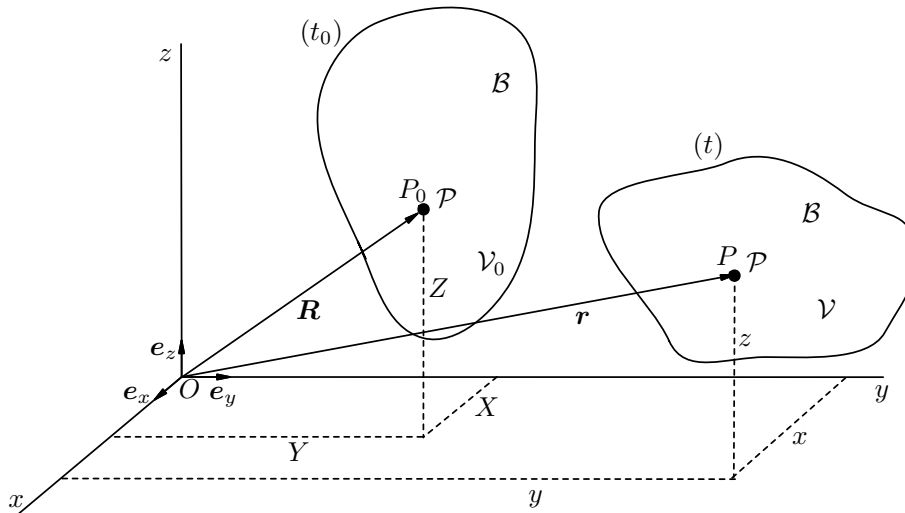


Abb. 3.3: Bezugslage und Momentanlage eines Körpers \mathcal{B} .

Die Momentanlage von \mathcal{B} zum Zeitpunkt t bezeichnen wir mit \mathcal{V} . Ein materieller Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ habe zum Zeitpunkt t_0 (d.h. in der Bezugslage) den Ortsvektor \mathbf{R} und zum Zeitpunkt t (d.h. in der Momentanlage) den Ortsvektor \mathbf{r} . Stellt man \mathbf{R} und \mathbf{r} in der Komponentenform z.B. im kartesischen Bezugssystem O ,

$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ dar, so folgt

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= X\mathbf{e}_x + Y\mathbf{e}_y + Z\mathbf{e}_z = [X \ Y \ Z]_{\langle \mathbf{e}_i \rangle} \\ \mathbf{r} &= x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = [x \ y \ z]_{\langle \mathbf{e}_i \rangle}\end{aligned}\tag{3.2}$$

Definition 3.7 (Materielle und räumliche Ortsvektoren und Koordinaten)

Der Ortsvektor \mathbf{R} des materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in der Bezugslage heißt der **materielle** Ortsvektor von \mathcal{P} . Seine Koordinaten X, Y, Z heißen **materielle Koordinaten**.

Der Ortsvektor \mathbf{r} des materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in der Momentanlage heißt der **räumliche** Ortsvektor von \mathcal{P} . Seine Koordinaten x, y, z heißen **räumliche Koordinaten**.

Die Koordinaten X, Y, Z von \mathbf{R} sind also die Koordinaten des Ortes P_0 von \mathcal{P} zum Zeitpunkt t_0 , und die Koordinaten x, y, z sind die Koordinaten des (momentanen) Ortes P von \mathcal{P} zum Zeitpunkt t .

Setzt man in der Bewegung $\mathbf{r} = \kappa(\mathcal{P}, t)$ die Anfangswerte $t := t_0$ und $\mathbf{r} := \mathbf{R}$ ein, so folgt

$$\mathbf{R} = \kappa(\mathcal{P}, t_0) =: \kappa_0(\mathcal{P})\tag{3.3}$$

Dies bedeutet: jedem materiellen Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ lässt sich der materielle Ortsvektor \mathbf{R} , somit auch die materiellen Koordinaten X, Y, Z zuordnen. Umgekehrt aber entspricht jedem Ortsvektor \mathbf{R} genau ein materieller Punkt \mathcal{P} , weil die Materie undurchdringlich ist.

Deshalb kann (3.3) stets nach \mathcal{P} aufgelöst werden, und wir erhalten die Funktion

$$\mathcal{P} = \kappa_0^{-1}(\mathbf{R}).\tag{3.4}$$

Dies bedeutet: Durch die Angabe des materiellen Ortsvektors \mathbf{R} , bzw. der materiellen Koordinaten X, Y, Z ist ein bestimmter materieller Punkt \mathcal{P} eindeutig festgelegt. Somit kann ein Koordinatentripel X, Y, Z als eine dreiwertige „Marke“ des dadurch gekennzeichneten materiellen Punkts \mathcal{P} aufgefasst werden. Der materielle Ortsvektor \mathbf{R} und seine Koordinaten X, Y, Z hängen wegen (3.3) nicht von der Zeit t , sondern nur von der Wahl des materiellen Punkts \mathcal{P} ab.

Setzt man (3.4) in (3.1) ein, so folgt

$$\mathbf{r} = \kappa(\kappa_0^{-1}(\mathbf{R}), t) =: \chi(\mathbf{R}, t).\tag{3.5}$$

Diese Gleichung nennt man die **materielle Parametrisierung** der Bewegung. Mit den Komponentendarstellungen (3.2) von \mathbf{R} und \mathbf{r} in kartesischen Koordinaten erhält man daraus die Darstellung

$$\begin{aligned}x &= \chi_x(X, Y, Z, t) \\ y &= \chi_y(X, Y, Z, t) \\ z &= \chi_z(X, Y, Z, t)\end{aligned}\tag{3.6}$$

der Bewegung in Koordinatenschreibweise.

Lässt sich Gleichung (3.5) nach \mathbf{R} auflösen, so erhält man

$$\mathbf{R} = \chi^{-1}(\mathbf{r}, t). \quad (3.7)$$

Anmerkung. Die zur Kennzeichnung materieller Punkte eingeführten materiellen Koordinaten X, Y, Z werden genauso wie die räumlichen Koordinaten in einem gemeinsamen, **raumfesten** Bezugssystem O, x, y, z definiert. Bei zahlreichen kinematischen Betrachtungen, so z.B. in der Kinematik des starren Körpers, ist es zweckmäßig, die materiellen Koordinaten in bewegten Bezugssystemen und nicht im Zusammenhang mit der Anfangslage eines Körpers einzuführen.

3.3 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eines Körpers

3.3.1 Definition des Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeldes

Das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eines Körpers wird analog zur Geschwindigkeit $\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ und Beschleunigung $\mathbf{a} := \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ eines Massenpunkts definiert.

Definition 3.8 (Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld eines Körpers)

Es sei \mathcal{B} ein Körper und $\chi(\mathbf{R}, t)$ die Bewegung des materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in materieller Parametrisierung. Dann heißt

1. die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{v}(\mathbf{R}, t) := \dot{\mathbf{r}} := \frac{\partial \chi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \quad (3.8)$$

das **Geschwindigkeitsfeld** von \mathcal{B} zum Zeitpunkt t in materieller Parametrisierung und

2. die vektorwertige Funktion

$$\mathbf{a}(\mathbf{R}, t) := \dot{\mathbf{v}} := \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{R}, t)}{\partial t}$$

das **Beschleunigungsfeld** von \mathcal{B} zum Zeitpunkt t in materieller Parametrisierung.

Eine skalare, vektor- oder tensorwertige Funktion $f(\mathbf{r}, t)$ des Ortes und der Zeit wird **zeitabhängige Ortsfunktion** oder **zeitabhängiges Feld** (mit t als Parameter) genannt. Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Körpers sind Beispiele für **zeitabhängige Vektorfelder**.

Die Ableitungen

$$\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right)_{\mathbf{R}} \quad \text{und} \quad \mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}} = \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right)_{\mathbf{R}}$$

stellen Geschwindigkeit und Beschleunigung ein und desselben materiellen Punkts dar, weil bei der jeweiligen partiellen Differentiation nach der Zeit der materielle Ortsvektor \mathbf{R} nicht mitdifferenziert wird. Deshalb werden $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ und $\mathbf{a} := \dot{\mathbf{v}}$ auch **materielle Ableitungen** genannt.

Ersetzt man in den Feldern $\mathbf{v}(\mathbf{R}, t)$ und $\mathbf{a}(\mathbf{R}, t)$ den materiellen Ortsvektor \mathbf{R} durch $\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{r}, t)$ gemäß Gl. (3.7), so ergibt sich mit

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{r}, t), t), \\ \bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{a}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{r}, t), t).\end{aligned}$$

die **räumliche Parametrisierung** des Geschwindigkeits- bzw. des Beschleunigungsfeldes.

Wir können die räumliche Parametrisierung $\bar{\mathbf{a}}(\mathbf{r}, t)$ des Beschleunigungsfeldes auch durch direkte Differentiation des Geschwindigkeitsfeldes $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ nach der Zeit gewinnen. Hierzu müssen wir berücksichtigen, dass die räumlichen Koordinaten x, y, z von \mathbf{r} wegen (3.6), d.h. wegen $x = \chi_x(X, Y, Z, t)$, $y = \chi_y(X, Y, Z, t)$, $z = \chi_z(X, Y, Z, t)$, Funktionen der Zeit t sind, und es gilt

$$\dot{x} = \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{X,Y,Z} = v_x, \quad \dot{y} = \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)_{X,Y,Z} = v_y, \quad \dot{z} = \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{X,Y,Z} = v_z$$

Dies folgt nach Ausschreiben der Komponenten der Vektorgleichung (3.8).

Um aus $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$ das Beschleunigungsfeld zu erhalten, bilden wir zunächst das vollständige Differential $d\bar{\mathbf{v}}$. Es folgt

$$d\bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} dz + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} dt.$$

Division durch dt liefert

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t},$$

woraus man mit $\bar{\mathbf{a}} := \dot{\bar{\mathbf{v}}} = \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}$ die Beziehung

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \bar{v}_z + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

erhält, wobei

$$\begin{aligned}\bar{v}_x(x, y, z, t) &= v_x(\boldsymbol{\chi}^{-1}(x, y, z, t), t), \\ \bar{v}_y(x, y, z, t) &= v_y(\boldsymbol{\chi}^{-1}(x, y, z, t), t), \\ \bar{v}_z(x, y, z, t) &= v_z(\boldsymbol{\chi}^{-1}(x, y, z, t), t)\end{aligned}$$

einzusetzen ist. Der Anteil

$$\bar{\mathbf{a}}_k := \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial x} \bar{v}_x + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial y} \bar{v}_y + \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \bar{v}_z$$

heißt **konvektive Beschleunigung** und der Anteil

$$\bar{\mathbf{a}}_l := \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t}$$

wird **lokale Beschleunigung** genannt. Damit gilt

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_k + \bar{\mathbf{a}}_l.$$

3.3.2 Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers

Wir betrachten den in Abbildung 3.4 skizzierten starren Körper \mathcal{B} , wählen einen beliebigen, aber körperfesten Punkt A und binden an A eine körperfeste, folglich auch starre, orthonormierte Basis $\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$. Es entsteht dadurch das körperfeste Bezugssystem $A, \tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$. Den Ortsvektor eines beliebigen materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ bezüglich eines raumfesten Punkts O bezeichnen wir – wie üblich – mit \mathbf{r} und den relativen Ortsvektor von \mathcal{P} bezüglich des körperfesten Punkts A mit \mathbf{R} .

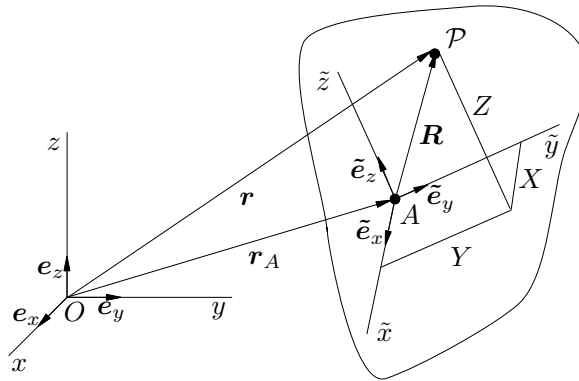


Abb. 3.4: Materielle Parametrisierung der Bewegung des starren Körpers.

Der Abbildung entnimmt man die grundlegende Beziehung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R}. \quad (3.9)$$

Der relative Ortsvektor \mathbf{R} lässt sich in der körperfesten Basis $\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$ in der Komponentenform

$$\mathbf{R} = X\tilde{\mathbf{e}}_x + Y\tilde{\mathbf{e}}_y + Z\tilde{\mathbf{e}}_z \quad (3.10)$$

darstellen. Die Koordinaten X, Y, Z von \mathbf{R} bleiben für ein und denselben materiellen Punkt \mathcal{P} im Laufe der Bewegung konstant, weil sich die relative Lage von \mathcal{P} im körperfesten Bezugssystem $A, \tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$ im Laufe der Bewegung nicht ändert. Deshalb sind X, Y, Z zeitunabhängig. Sie ändern sich nur beim Übergang zu einem anderen materiellen Punkt. Wir stellen somit fest, dass X, Y, Z die (in einem körperfesten Bezugssystem $A, \tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$ gemessenen) materiellen Koordinaten sind, weil sie die Lage des materiellen Punkts \mathcal{P} in einem körperfesten Bezugssystem beschreiben.

Sind in (3.10) die körperfesten Vektoren $\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y, \tilde{\mathbf{e}}_z$ als Funktionen der Zeit t gegeben, so erhält man damit aus (3.10) die Beziehung

$$\mathbf{R}(X, Y, Z, t) = X\tilde{\mathbf{e}}_x(t) + Y\tilde{\mathbf{e}}_y(t) + Z\tilde{\mathbf{e}}_z(t). \quad (3.11)$$

Ist außerdem in (3.9): $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A(t)$, so erhält man mit (3.11):

$$\chi(X, Y, Z, t) = \mathbf{r}(X, Y, Z, t) = \mathbf{r}_A(t) + \mathbf{R}(X, Y, Z, t), \quad (3.12)$$

also die Bewegung eines starren Körpers in materieller Parametrisierung; vgl. hierzu die allgemeine kinematische Bewegungsgleichung (3.5).

Aufgrund der Darstellung (3.12) sind wir nun in der Lage, das Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers mit den Mitteln der Relativkinematik (s. Abschnitt 2.2.3) zu bestimmen. Aus den Gleichungen (2.24) und (2.25) folgt der Satz:

Satz 3.9 (Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfeld des starren Körpers)

Das Geschwindigkeitsfeld des starren Körpers ist

$$\mathbf{v}(X, Y, Z, t) = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t) \quad (3.13)$$

und das Beschleunigungsfeld ist

$$\mathbf{a}(X, Y, Z, t) = \mathbf{a}_A(t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)). \quad (3.14)$$

Dabei sind $\mathbf{v}_A(t)$ und $\mathbf{a}_A(t)$ Geschwindigkeit und Beschleunigung im körperfesten Punkt A , $\boldsymbol{\omega}(t)$ ist die Drehgeschwindigkeit des starren Körpers und $\mathbf{R}(X, Y, Z, t)$ der Ortsvektor von A zum Ort des materiellen Punkts \mathcal{P} .

Beweis. Da der Körper starr ist, verschwinden \mathbf{v}_{rel} und \mathbf{a}_{rel} . Die Gleichungen folgen dann direkt aus (2.24) und (2.25). ■

Die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsanteile lassen sich wie folgt deuten:

1. Geschwindigkeit:

- a) $\mathbf{v}_A(t)$: translatorischer Anteil der Geschwindigkeit des materiellen Punkts \mathcal{P}
- b) $\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$: rotatorischer Anteil der Geschwindigkeit des materiellen Punkts \mathcal{P} (Rotation um A)

2. Beschleunigung:

- a) $\mathbf{a}_A(t)$: translatorischer Anteil der Beschleunigung des materiellen Punkts \mathcal{P}
- b) $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t)$: rotatorischer Anteil aufgrund der Drehbeschleunigung
- c) $\boldsymbol{\omega}(t) \times (\boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{R}(X, Y, Z, t))$: rotatorischer Anteil aufgrund der Zentripetalbeschleunigung

Das gesamte Geschwindigkeitsfeld des starren Körpers lässt sich aus der Geschwindigkeit in einem Punkt und der Drehgeschwindigkeit bestimmen. Wir fassen diese Größen zur Kinemate zusammen.

Definition 3.10 (Kinemate)

Es sei A ein körperfester Punkt, $\mathbf{v}_A(t)$ die Geschwindigkeit in diesem Punkt und $\boldsymbol{\omega}(t)$ die Drehgeschwindigkeit. Die kinematisch-geometrische Größe $(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$ heißt **Kinemate** zur Zeit t .

Zwischen zwei Kinematen desselben Geschwindigkeitsfeldes mit unterschiedlichem Bezugspunkt besteht ein Zusammenhang; denn aus Gl. (3.13) folgt:

Satz 3.11 (Kinematenversetzung)

Es seien A und B zwei körperfeste Punkte eines starren Körpers. Zwischen den Kinematen $(\mathbf{v}_A, A, \boldsymbol{\omega})$ und $(\mathbf{v}_B, B, \boldsymbol{\omega})$ des Geschwindigkeitsfeldes besteht die Beziehung

$$\mathbf{v}_B(t) = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{r}_B(t) - \mathbf{r}_A(t)).$$

Dabei sind $\mathbf{r}_B(t)$ und $\mathbf{r}_A(t)$ die von einem gemeinsamen Bezugspunkt aus bestimmten Ortsvektoren der Punkte A und B zur Zeit t .

Zwei Kinematen heißen äquivalent, wenn die Drehgeschwindigkeiten gleich sind und die Geschwindigkeiten die Kinematenversetzungsgleichung erfüllen. Unmittelbar aus dem Satz über die Kinematenversetzung folgt, dass zwei Kinematen desselben Geschwindigkeitsfeldes eines starren Körpers äquivalent sind.

Wir wollen einige Spezialfälle der Kinemate betrachten:

1. **Translatorische Bewegung:** Bei einer reinen Translation ist $(\mathbf{v}, A, \mathbf{0})$ für **jeden** körperfesten Punkt A . Geschwindigkeit und Beschleunigung sind daher räumlich konstante Vektorfelder.
2. **Drehung um einen festen Punkt:** Wird der feste Punkt als Bezugspunkt A gewählt, verschwinden in den Gleichungen (3.13) und (3.14) auf der rechten Seite die jeweils ersten Terme, da der Bezugspunkt seine Lage nicht ändert und somit $\mathbf{v}_A(t)$ und $\mathbf{a}_A(t)$ Nullvektoren sind. Die Kinemate ist dort $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$.
3. **Drehung um eine feste Achse:** In diesem Fall ist es zweckmäßig, als körperfestes Bezugssystem Zylinderkoordinaten zu wählen und die z -Achse mit der Drehachse zusammenfallen zu lassen, so dass der Bezugspunkt auf der Drehachse liegt. Für alle Punkte A der Drehachse ist dann die Kinemate $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$.

Da sich der Bezugspunkt nicht ändert, entfallen die ersten Terme auf der rechten Seite in den Gleichungen (3.13) und (3.14). Ferner ergibt sich mit $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_z$, $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\varphi$ der Geschwindigkeitsvektor zu

$$\mathbf{v}(R, t) = \omega R \mathbf{e}_\varphi.$$

Insbesondere haben alle Punkte mit gleichem Abstand von der Drehachse auch den gleichen Betrag der Geschwindigkeit und der Betrag nimmt linear

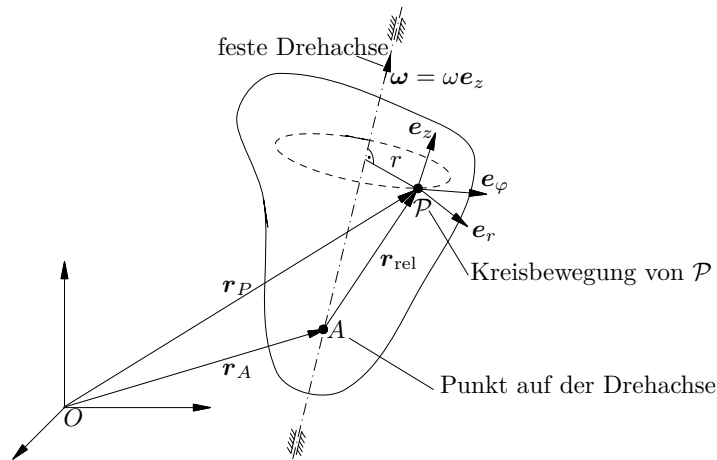


Abb. 3.5: Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

mit dem Abstand von der Drehachse zu. Zur Ermittlung des Beschleunigungsvektors ist es erforderlich, diese Gleichung nach der Zeit abzuleiten. Mit $\dot{e}_\varphi = -\omega e_R$, s. Gl. (2.7), finden wir dann

$$\mathbf{a}(R, t) = \dot{\omega} R \mathbf{e}_\varphi - \omega^2 R \mathbf{e}_R.$$

Auch die Beschleunigung ist daher unabhängig von der Koordinate Z . Sie ändert sich ebenfalls linear in radialer Richtung, aber auch in Umfangsrichtung, sofern die Drehgeschwindigkeit zeitlich nicht konstant ist.

4. **Ebene Bewegung:** Führen wir auch hier wieder zylindrische Koordinaten ein, so dass der Vektor der Drehgeschwindigkeit in Richtung der z -Achse und die Bewegung in der durch \mathbf{e}_R und \mathbf{e}_φ aufgespannten Ebene liegt, dann ist der Relativvektor durch $\mathbf{R} = R \mathbf{e}_R$ gegeben und die Gleichungen für die Drehung um eine feste Achse können formal übernommen werden, da dort ja Geschwindigkeit und Beschleunigung unabhängig von der Z -Koordinate waren; sie müssen allerdings noch um die Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punkts A ergänzt werden, der sich nun ebenfalls bewegen kann. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(R, t) &= \mathbf{v}_A + \omega R \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{a}(R, t) &= \mathbf{a}_A + \dot{\omega} R \mathbf{e}_\varphi - \omega^2 R \mathbf{e}_R. \end{aligned}$$

Ist für einen Punkt A zu einem Zeitpunkt t die Kinemate $(\mathbf{0}, A, \boldsymbol{\omega})$, dann lässt sich das Geschwindigkeitsfeld momentan, d.h. im Zeitpunkt t , als eine Rotation um den Punkt A auffassen. Der Punkt A ergibt sich rein rechnerisch aus Gleichung (3.13); es muss sich dabei also nicht um einen Punkt handeln, der auf dem starren Körper liegt. Wir können uns stattdessen diesen Punkt als momentanes Zentrum der Rotation denken, das momentan starr (damit Gl. (3.13) gilt) mit dem Körper verbunden ist.

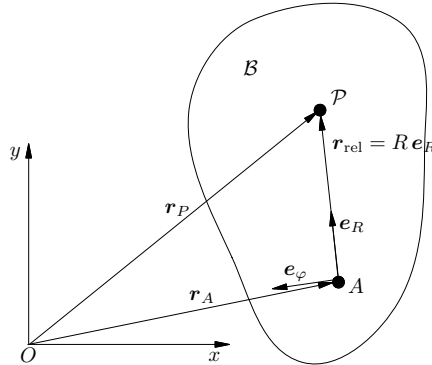


Abb. 3.6: Ebene Bewegung des starren Körpers.

Definition 3.12 (Momentanpol)

Ein Punkt M eines starren Körpers, für den zu einem Zeitpunkt t der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_M(t)$ verschwindet, heißt **Momentanpol**.

Zur Ermittlung des Momentanpols setzen wir die linke Seite von Gl. (3.13) zu null:

$$\mathbf{0} = \mathbf{v}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{AM} \quad (3.15)$$

und lösen nach dem Ortsvektor \mathbf{R}_{AM} , der vom körperfesten Punkt A zum Momentanpol M gerichtet ist, auf. Aus der Darstellung (3.15) ist sofort ersichtlich, dass die Lösung \mathbf{R}_{AM} nicht eindeutig ist; denn zu jeder Lösung \mathbf{R}_{AM} ist auch

$$\mathbf{R}_{AM} + \lambda \boldsymbol{\omega}, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3.16)$$

eine Lösung von (3.15), da $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. Im Fall einer ebenen Bewegung und $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$ lässt sich jedoch ein eindeutiger Momentanpol finden, der in der Bewegungsebene liegt; denn die durch (3.16) beschriebene Gerade steht senkrecht auf der Bewegungsebene, da der Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ und damit der Richtungsvektor der Geraden senkrecht auf der Bewegungsebene steht. Daher betrachten wir im Folgenden nur noch die ebene Bewegung.

Wir wollen den Ortsvektor zum Momentanpol für eine ebene Bewegung berechnen. Hierzu werten wir Gl. (3.15) für die ebene Bewegung in kartesischen Koordinaten aus:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -R_{AMy} \\ R_{AMx} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Die beiden Gleichungen können leicht nach R_{AMy} und R_{AMx} aufgelöst werden, wenn \mathbf{v}_A und ω bekannt sind. Ist ω nicht bekannt und sind stattdessen die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_B in zwei körperfesten Punkten A und B des starren

Körpers gegeben, so muss zunächst Gl. (3.13) für die ebene Bewegung und die Punkte A und B ausgewertet werden,

$$\begin{bmatrix} v_{Bx} \\ v_{By} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{Ax} \\ v_{Ay} \end{bmatrix} + \omega \begin{bmatrix} -R_{ABy} \\ R_{ABx} \end{bmatrix},$$

um mit Hilfe des bekannten Ortsvektors \mathbf{R}_{AB} die Drehgeschwindigkeit ω zu ermitteln. Anschließend kann dann mit Hilfe von (3.17) der Ortsvektor zum Momentanpol bestimmt werden. Graphisch kann der Momentanpol wie folgt ermittelt werden:

1. Sind die beiden Geschwindigkeitsvektoren \mathbf{v}_A und \mathbf{v}_B nicht parallel, dann ist der Schnittpunkt der Senkrechten auf die Geschwindigkeitsvektoren der Momentanpol, da aufgrund von (3.15) Drehgeschwindigkeit, Geschwindigkeitsvektor und Ortsvektor zum Momentanpol senkrecht aufeinander stehen.
2. Sind die beiden Geschwindigkeitsvektoren parallel, aber nicht gleich groß, dann ist der Momentanpol der Schnittpunkt der Senkrechten auf die Geschwindigkeitsvektoren mit der Verbindungslinie der Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren, da sich der Betrag der Geschwindigkeitsvektoren linear mit dem Abstand vom Momentanpol verändert.
3. Sind die beiden Geschwindigkeitsvektoren parallel und gleich groß, dann liegt eine rein translatorische Bewegung vor. In diesem Fall verschwindet die Drehgeschwindigkeit und ein Momentanpol existiert nicht bzw. nur, wenn die beiden Geschwindigkeitsvektoren Nullvektoren sind und somit alle Geschwindigkeiten null sind.

Im Momentanpol verschwindet der Geschwindigkeitsvektor. Dies könnte leicht zu der Vorstellung verleiten, dass der Momentanpol ruht – was aber nicht der Fall ist. Der Momentanpol ist ja ein Punkt im Raum, für den formal Gl. (3.15) erfüllt ist. Dieser Punkt verändert im Laufe der Bewegung des starren Körpers seine Lage und beschreibt dadurch eine Kurve im Raum. Diese Kurve kann nun selbst wieder im raumfesten Bezugssystem oder im körperfesten Bezugssystem betrachtet werden.

Definition 3.13 (Spurkurve, Rollkurve)

Die Kurve des Momentanpols im raumfesten Bezugssystem heißt **Spurkurve** (oder Rastpolbahn, Polhodie), die Kurve des Momentanpols im körperfesten Bezugssystem heißt **Rollkurve** (oder Gangpolbahn, Herpolhodie).

Beispiel 3.14

1. Rollendes Rad

Wir betrachten ein starres Rad, das entlang einer Geraden rollt. Im Kontaktpunkt P zwischen Rad und Gerade soll das Rad nicht gleiten, d.h., der momentane Kontaktpunkt ist der Momentanpol der Bewegung. Im raumfesten Bezugssystem ist die Gerade die Kurve der Momentanpole, also die Spurkurve. Für ein mit dem Rad mitrotierendes Bezugssystem wird die Kurve der Momentanpole durch den Rand des Rades gebildet, er ist daher

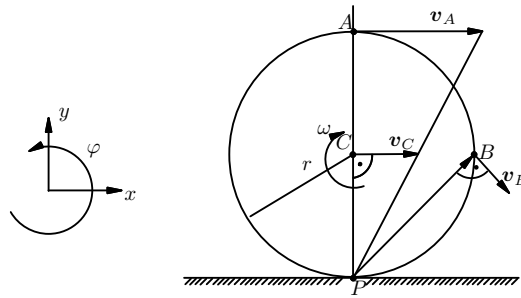


Abb. 3.7: Rollendes Rad.

die Rollkurve.

Die Geschwindigkeit im Massenmittelpunkt C ergibt sich mit $\mathbf{v}_P = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega} = -\omega \mathbf{e}_z$ und $\mathbf{R}_{PC} = r \mathbf{e}_y$ zu

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{PC} = \mathbf{0} + \omega r \mathbf{e}_x.$$

Daher gilt

$$v_C = \|\mathbf{v}_C\| = \omega r.$$

Bei Kenntnis der Geschwindigkeit v_C oder der Drehgeschwindigkeit ω kann die jeweils andere Größe mit Hilfe dieser Gleichung leicht berechnet werden. Für \mathbf{v}_A ergibt sich

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times 2r \mathbf{e}_y = 2\omega r \mathbf{e}_x = 2v_C \mathbf{e}_x.$$

Die Geschwindigkeit in A ist daher doppelt so groß wie die Geschwindigkeit im Massenmittelpunkt und gleich gerichtet. Genauso finden wir für \mathbf{v}_B :

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (r \mathbf{e}_x + r \mathbf{e}_y) = \omega r (-\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_x) = v_C (\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

Die Geschwindigkeit in B hat eine Komponente in x - **und** in y -Richtung.

2. Rollenbewegung

Für das skizzierte System mit drei starren Rollen seien die Radien der Rollen r_1 , r_2 und r_3 sowie die Drehgeschwindigkeiten ω_1 , ω_2 gegeben. Gesucht ist die Bewegung der dritten Rolle in Form ihrer Drehgeschwindigkeit ω_3 und der Geschwindigkeit \mathbf{v}_C ihres Mittelpunkts.

Für die Geschwindigkeiten in A , B , D und E finden wir die Abrollbedingungen für reines Rollen

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{v}_B &= -\omega_2 r_2 \mathbf{e}_y \end{aligned}$$

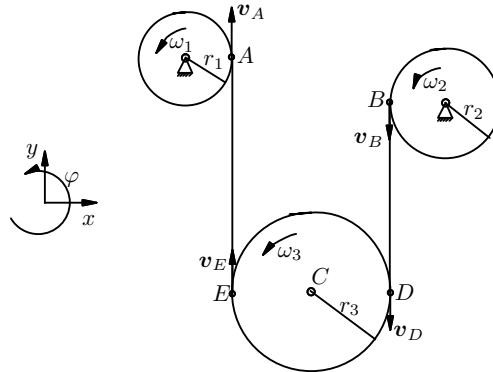


Abb. 3.8: System mit drei Rollen.

und die kinematischen Bedingungen

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_A,$$

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B.$$

Ferner lässt sich \mathbf{v}_D auch mit Hilfe von \mathbf{v}_E ausdrücken, da D und E materielle Punkte des selben starren Körpers sind:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_E + \boldsymbol{\omega}_3 \times 2r_3 \mathbf{e}_x = \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y + 2\omega_3 r_3 \mathbf{e}_y = (\omega_1 r_1 + 2\omega_3 r_3) \mathbf{e}_y$$

Gleichsetzen mit \mathbf{v}_B (s. kinematische Bedingung) liefert die Drehgeschwindigkeit ω_3 :

$$\omega_1 r_1 + 2\omega_3 r_3 = -\omega_2 r_2, \text{ also } \omega_3 = -\frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2r_3}$$

Bei bekannter Drehgeschwindigkeit ω_3 kann nun \mathbf{v}_C leicht aus der Geschwindigkeit im Punkt E (oder auch D) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_E + \boldsymbol{\omega}_3 \times r_3 \mathbf{e}_x = \omega_1 r_1 \mathbf{e}_y - \frac{\omega_1 r_1 + \omega_2 r_2}{2r_3} r_3 \mathbf{e}_y \\ &= \left(\omega_1 r_1 - \frac{\omega_1 r_1}{2} - \frac{\omega_2 r_2}{2} \right) \mathbf{e}_y = \left(\frac{\omega_1 r_1}{2} - \frac{\omega_2 r_2}{2} \right) \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Die Bewegungsrichtung der dritten Rolle wird von den Geschwindigkeiten in den Punkten A und B bzw. von den Drehgeschwindigkeiten der ersten beiden Rollen bestimmt.

3. Vierecken

Wir betrachten das Vierecken in der skizzierten Lage; die geometrischen Abmessungen r , ℓ , b , der Winkel $\varphi = 45^\circ$ und die Drehgeschwindigkeit ω_1 des ersten Getriebeglieds seien gegeben. Gesucht sind die Drehgeschwindigkeiten der beiden anderen Getriebeglieder sowie die Geschwindigkeit im Gelenk B .

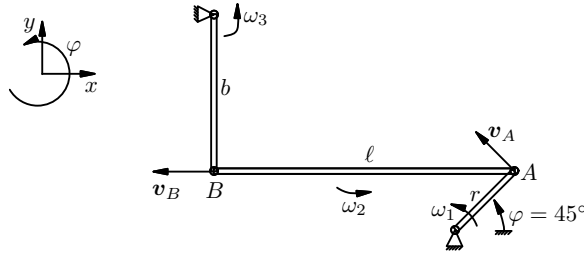


Abb. 3.9: Viergelenk.

Ausgehend von den Vorgaben können wir die Geschwindigkeit im Gelenk A zu

$$\mathbf{v}_A = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_y$$

ermitteln. Die Geschwindigkeit im Punkt B können wir auf zwei Weisen, einmal über das mittlere Getriebeglied und einmal über das letzte Getriebeglied, berechnen:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A - \omega_2 \ell \mathbf{e}_y = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_x + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r - \omega_2 \ell\right) \mathbf{e}_y,$$

$$\mathbf{v}_B = \omega_3 b \mathbf{e}_x.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann

$$-\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r = \omega_3 b \Rightarrow \omega_3 = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\frac{r}{b}\omega_1,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r - \omega_2 \ell = 0 \Rightarrow \omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 \frac{r}{\ell}$$

und damit $\mathbf{v}_B = \omega_3 b \mathbf{e}_x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\omega_1 r \mathbf{e}_x$.

◇

3.4 Verzerrungszustand eines deformierbaren Körpers

Wir betrachten einen deformierbaren Körper in seiner Bezugs- und Momentan- konfiguration. Für die Bewegung des materiellen Punkts \mathcal{P} gilt dann

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{u}.$$

Der Vektor $\mathbf{u} := \mathbf{r} - \mathbf{R}$ heißt **Verschiebung** des materiellen Punkts \mathcal{P} . Das Verschiebungsfeld der materiellen Punkte kann wieder materiell oder räumlich parametrisiert werden.

Wir betrachten nun einen benachbarten materiellen Punkt \mathcal{Q} . Ausgehend von \mathcal{P} kann er in der Bezugskonfiguration mit Hilfe des Relativvektors $d\mathbf{R}$ und in der Momentan- konfiguration mit Hilfe des Relativvektors $d\mathbf{r}$ beschrieben werden. Aus dem Vektorparallelogramm in Abb. 3.10 ergibt sich, dass beide Vektoren

über $d\mathbf{u}$ zusammenhängen: $\mathbf{u} + d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}$, also $d\mathbf{r} = d\mathbf{R} + d\mathbf{u}$. Für den Längenvergleich der beiden Relativvektoren $d\mathbf{R}$ und $d\mathbf{r}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|d\mathbf{r}\|^2 - \|d\mathbf{R}\|^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} - (d\mathbf{r} - d\mathbf{u}) \cdot (d\mathbf{r} - d\mathbf{u}) \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u} \\ &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - \|d\mathbf{u}\|^2.\end{aligned}\tag{3.18}$$

Ist $\|d\mathbf{u}\|$ klein im Sinne von

$$\|d\mathbf{u}\|^2 \ll 2|d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}|,$$

dann kann der letzte Term in Gl. (3.18) vernachlässigt werden⁵, und es ergibt sich

$$\|d\mathbf{r}\|^2 - \|d\mathbf{R}\|^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{u} + d\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r}.\tag{3.19}$$

Aus $\mathbf{u} = \mathbf{r} - \mathbf{R}$ folgt wegen der Konstanz des Ortsvektors in der Referenzkonfiguration $d\mathbf{u} = \text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$. Damit wird aus Gl. (3.19):

$$\begin{aligned}\|d\mathbf{r}\|^2 - \|d\mathbf{R}\|^2 &= d\mathbf{r} \cdot (\text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) + (\text{grad } \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \\ &= d\mathbf{r} \cdot (\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T) \cdot d\mathbf{r}.\end{aligned}$$

Damit haben wir die Längenänderung der Relativvektoren durch ein Skalarprodukt dargestellt, in dem neben den Differentialen $d\mathbf{r}$ noch ein Tensor zweiter Stufe, $\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T$, auftritt.

Definition 3.15 (Linearisierter Verzerrungstensor)

Sei \mathbf{r} der Ortsvektor des materiellen Punkts $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ in der Momentanlage. Der Tensor zweiter Stufe

$$\boldsymbol{\epsilon} := \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{r} + (\text{grad } \mathbf{r})^T).$$

heißt **linearisierter Verzerrungstensor**.

Der zusätzliche Faktor $\frac{1}{2}$ in dieser Definition ist in der Literatur so üblich, erforderlich ist er nicht.

⁵Wir werden uns im Folgenden stets auf diesen Spezialfall und damit linearisierte Verzerrungen beschränken.

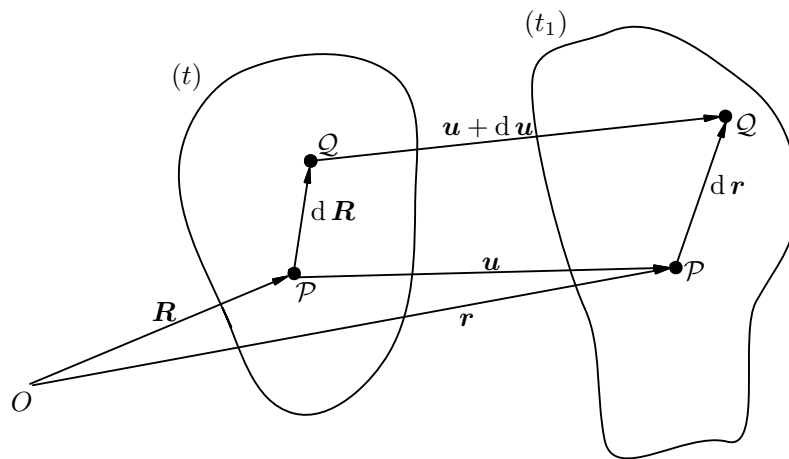


Abb. 3.10: Ortsvektoren des materiellen Punkts \mathcal{P} in der Referenz- und Momentankonfiguration.

4 Geführte Bewegungen

4.1 Freiheitsgrade von Körpern und Körpersystemen

Werden einem Körper während einer Bewegung keine geometrischen Einschränkungen auferlegt, kann er sich im Raum frei bewegen in dem Sinne, dass wir ihn in jede beliebige Lage im Raum (z.B. durch Einwirken entsprechender Kräfte) bringen können. So bewegt sich z.B. (in vereinfachender Idealisierung) eine Fliege in der Luft oder ein Fisch im Wasser.

Definition 4.1 (Freie Bewegung)

*Eine Bewegung, die keinen geometrischen Einschränkungen unterworfen ist, wird **freie Bewegung** genannt.*

Die Bewegung eines Körpers wird jedoch häufig dadurch eingeschränkt, dass man verlangt, dass sich der Körper beispielsweise auf einer vorgegebenen Fläche⁶ oder Kurve⁷ bewegen soll.

Definition 4.2 (Bindung, geführte Bewegung)

*Bedingungen, welche die Bewegung eines Körpers einschränken, werden **Bindungen** oder **Zwangsbedingungen** genannt. Eine Bewegung, die Zwangsbedingungen unterworfen wird, heißt **geführt**.*

Bewegungsmöglichkeiten eines Körpers oder Körpersystems lassen sich messen (genauer gesagt: zählen). Die Maßeinheit für Bewegungsmöglichkeiten heißt Freiheitsgrad.

Definition 4.3 (Freiheitsgrad)

*Die Anzahl der **voneinander unabhängigen** Koordinaten oder Parameter, die zu einer eindeutigen Bestimmung der momentanen Lage eines Körpers oder Körpersystems notwendig sind, wird die **Anzahl der Freiheitsgrade** dieses Körpers oder Körpersystems genannt.*

4.1.1 Freiheitsgrade des Massenpunkts

Demnach hat beispielsweise ein Massenpunkt

1. im Fall einer freien Bewegung **drei** Freiheitsgrade, weil in diesem Fall die Koordinaten x , y , z seiner Momentanlage voneinander unabhängig sind,
2. im Fall einer Bewegung auf einer Fläche **zwei** Freiheitsgrade,
3. im Fall einer Bewegung auf einer Kurve **einen** Freiheitsgrad,
4. im Fall einer Fixierung an einen Punkt **null** Freiheitsgrade, weil hier keine der drei Koordinaten x , y , z von den übrigen unabhängig ist.

⁶So bewegt sich z.B. ein in einem Gebirge fahrendes und zu einem Massenpunkt idealisiertes Geländefahrzeug.

⁷So bewegt sich z.B. der zu einem Massenpunkt idealisierte Wagen einer Achterbahn.

Definition 4.4 (Vollständige Bindung)

Eine Bewegung mit null Freiheitsgraden heißt **vollständig gebunden** oder **eingepägt**.

4.1.2 Freiheitsgrade deformierbarer Körper und materiell offener Systeme

Ein Körper „besteht“ aus unendlich vielen materiellen Punkten und jeder materielle Punkt eines deformierbaren Körpers kann sich unter Krafteinwirkungen unabhängig von anderen materiellen Punkten dieses Körpers bewegen, obwohl seine Bewegung durch die Verschiebungen seiner Nachbarpunkte und durch die Festigkeitseigenschaften des Stoffes beeinflusst wird. Weil ein materieller Punkt im Raum drei Freiheitsgrade besitzt, besitzt ein deformierbarer Körper „drei mal unendlich“ Freiheitsgrade, also unendlich viele Freiheitsgrade.

Daraus folgern wir, dass ein beliebiges deformierbares Kontinuum (d.h. ein deformierbarer Körper oder ein deformierbares materiell offenes System) unendlich viele Freiheitsgrade besitzt.

Dementsprechend besitzt ein beliebiges deformierbares Kontinuum im Fall einer ebenen Bewegung „zwei mal unendlich“, also ebenfalls unendlich viele Freiheitsgrade.

4.1.3 Freiheitsgrade des starren Körpers

Per definitionem ist ein Körper starr, wenn für den Abstand $\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ zweier beliebiger materieller Punkte \mathcal{A} und \mathcal{B} dieses Körpers die Bedingung

$$\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \text{const. bzgl. } t \quad (4.1)$$

erfüllt ist, vgl. Definition 1.8. Diese Bedingung wird **Starrheitsbedingung** genannt.

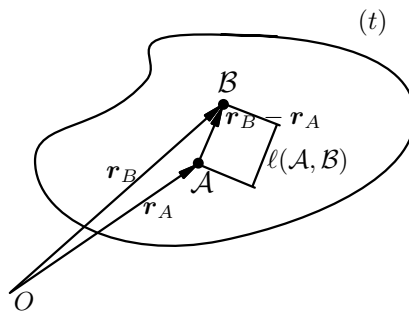


Abb. 4.1: Starrheitsbedingung.

Bezeichnet man die Ortsvektoren der Momentanlagen von \mathcal{A} und \mathcal{B} mit $\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_A(t)$ und $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_B(t)$, so gilt $\ell(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\|$ und damit folgt aus (4.1)

$$\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| = \text{const. bzgl. } t. \quad (4.2)$$

Nach dieser Vorbereitung beweisen wir den

Satz 4.5 (Freiheitsgrade des starren Körpers)

Ein sich frei im Raum bewegnender starrer Körper besitzt sechs Freiheitsgrade.

Beweis. Wir wählen im Körper drei nichtkollineare materielle Punkte \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} mit den Ortsvektoren \mathbf{r}_A , \mathbf{r}_B , \mathbf{r}_C ihrer Momentanlagen. Wegen der Starrheit des Körpers gilt nach (4.2)

$$\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| = \text{const. bzgl. } t,$$

$$\|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\| = \text{const. bzgl. } t,$$

$$\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C\| = \text{const. bzgl. } t$$

und wir stellen fest:

1. Der materielle Punkt \mathcal{A} hat **drei** Freiheitsgrade.
2. Durch die Hinzunahme von \mathcal{B} kommen zwei Freiheitsgrade hinzu (drei Freiheitsgrade von \mathcal{B} abzüglich der Zwangsbedingung $\|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A\| = \text{const. bzgl. } t$).
3. Durch die Hinzunahme von \mathcal{C} kommt ein Freiheitsgrad hinzu (drei Freiheitsgrade von \mathcal{C} abzüglich der Zwangsbedingungen $\|\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B\| = \text{const. bzgl. } t$ und $\|\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C\| = \text{const. bzgl. } t$).
4. Durch die Hinzunahme eines weiteren materiellen Punkts \mathcal{P} ändert sich die Anzahl der Freiheitsgrade nicht, weil die drei zusätzlichen Freiheitsgrade von \mathcal{P} durch die Zwangsbedingungen $\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_A\| = \text{const. bzgl. } t$, $\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_B\| = \text{const. bzgl. } t$, $\|\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_C\| = \text{const. bzgl. } t$ aufgehoben werden.

Daraus folgert man: ein sich frei bewegnender starrer Körper hat $3 + 2 + 1 = 6$ Freiheitsgrade. ■

Korollar 4.6

Die Bewegung eines starren Körpers wird im Raum durch die Bewegung eines beliebigen körperfesten Dreiecks festgelegt.

Im Spezialfall einer **ebenen Bewegung** des starren Körpers bewegen sich die materiellen Punkte \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} in zueinander parallelen Ebenen. Deshalb existieren jetzt die drei zusätzlichen Zwangsbedingungen

$$\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$

$$\mathbf{r}_B \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$

$$\mathbf{r}_C \cdot \mathbf{n} = \text{const. bzgl. } t$$

wobei \mathbf{n} der gemeinsame Normalenvektor der Bewegungsebenen von \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} ist.

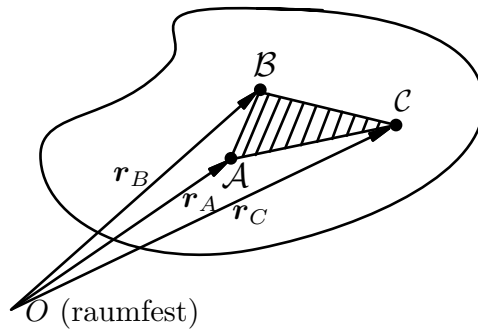


Abb. 4.2: Körperfestes Dreieck.

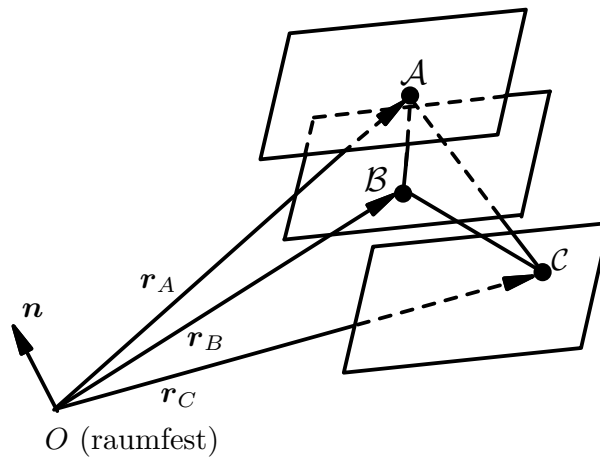


Abb. 4.3: Bewegungsebenen mit gemeinsamem Normalenvektor.

Folglich wird im Fall einer ebenen Bewegung des starren Körpers die ursprüngliche Anzahl der sechs Freiheitsgrade um drei vermindert. Dies bedeutet:

Korollar 4.7

Ein starrer Körper besitzt im Fall einer ebenen Bewegung $6 - 3 = 3$ Freiheitsgrade.

Im Folgenden werden Zwangsbedingungen klassifiziert und anhand von Beispielen illustriert.

4.2 Bindungen

Bindungen schränken die Bewegung des Körpers oder eines Körpersystems ein. Die Lage eines Massenpunkts im Raum können wir durch drei Koordinaten beschreiben, die Lage eines starren Körpers durch drei Koordinaten und drei

Winkel. Dies entspricht den drei Freiheitsgraden eines Massenpunkts und den sechs Freiheitsgraden eines starren Körpers. Wir fassen für die folgenden Überlegungen die Lagekoordinaten und -parameter zu einem Vektor \mathbf{r} zusammen. Für Systeme aus Massenpunkten und starren Körper können wir für jeden Körper \mathcal{B}_i einen derartigen Vektor \mathbf{r}_i aufstellen und alle Vektoren zu einem gesamten Vektor \mathbf{r} zusammenfassen. Dieser Vektor hat die Dimension $n = 3p + 6k$, wenn das System aus p Massenpunkten und k starren Körpern besteht (für eine ebene Bewegung beträgt die Dimension $2p + 3k$). Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf derartige Körpersysteme (sog. **diskrete Systeme**), deformierbare Körper werden nicht betrachtet.

Ebenso lassen sich die Geschwindigkeiten – im Fall eines starren Körpers der Geschwindigkeitsvektor in einem Punkt und der Vektor der Drehgeschwindigkeit – zu einem Vektor \mathbf{s} zusammenfassen.

Definition 4.8 (Klassifikation von Bindungen)

1. Eine Ungleichung $f(\mathbf{r}, t) \geq 0$ bzw. $f(\mathbf{s}, t) \geq 0$ heißt **einseitige Bindung**, eine Gleichung $f(\mathbf{r}, t) = 0$ bzw. $f(\mathbf{s}, t) = 0$ heißt **zweiseitige Bindung**.
 2. Eine Bindung, die zeitabhängig ist, heißt **rheonom**, eine zeitunabhängige Bindung **skleronom**.
 3. Eine zweiseitige Bindung, die einen Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter durch eine Funktion der anderen Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter ausdrückt, heißt **explizite Bindung**, eine zweiseitige Bindung als Funktion aller Lage- bzw. Geschwindigkeitsparameter heißt **implizite Bindung**.
 4. Eine Bindung zwischen den Lageparametern heißt **geometrische Bindung**, eine Bindung, die auch von den Geschwindigkeitsparametern abhängt, heißt **kinematische Bindung**.
 5. Geometrische Bindungen und kinematische Bindungen, die sich durch Integration in eine geometrische Bindung überführen lassen, heißen **holonome Bindungen**. Lässt sich eine kinematische Bindung nicht durch Integration in eine geometrische Bindung überführen, dann heißt diese kinematische Bindung **nichtholonom** oder **anholonom**.
-

Die Anzahl der unabhängigen Parameter zur Beschreibung der Bewegung wird durch zweiseitige geometrische und zweiseitige holonome kinematische Bindungen eingeschränkt. Ein Körpersystem mit n Lageparametern und m derartigen Bindungen besitzt $f = n - m$ Freiheitsgrade. Geeignete, voneinander unabhängige f Größen q_1, q_2, \dots, q_f , die die Momentanlage des Systems vollständig bestimmen, werden **allgemeine Koordinaten** oder **generalisierte Koordinaten** genannt.

Beispiel 4.9 (Mathematisches Pendel)

Im Fall des mathematischen Pendels gilt: Abstand $\overline{AP} \leq \ell$, also

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \leq \ell^2, \quad (4.3)$$

weil sich der Massenpunkt \mathcal{P} zwar in das Innere der Kugel S hinein bewegen kann, aber wegen der Undehnbarkeit des Seils AP die Kugeloberfläche nach außen nicht verlassen darf. Deshalb stellt (4.3) eine einseitige skleronome geometrische Bindung dar. Das Ungleichheitszeichen legt die möglichen Bewegungsrichtungen fest. Ist der Massenpunkt nicht mit einem Seil, sondern mit einer starren Stütze mit der Umgebung verbunden, dann liegt eine zweiseitige skleronome geometrische Bindung vor. Der Massenpunkt bewegt sich dann auf einer Kugeloberfläche und hat daher nur zwei Freiheitsgrade.

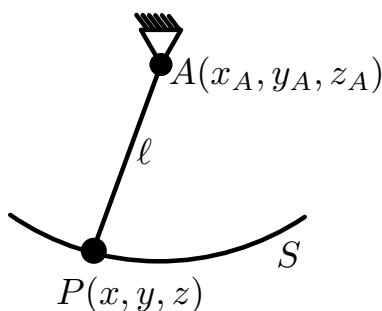


Abb. 4.4: Geometrische Bindung beim mathematischen Pendel. \diamond

Eine nicht-integrierbare kinematische Bindung ist eine Beziehung zwischen den Differentialen dq_i der generalisierten Koordinaten q_i in der Gestalt

$$a_1 dq_1 + a_2 dq_2 + \dots + a_f dq_f + a_0 dt = 0 \quad (4.4)$$

in der $a_0, a_1, a_2, \dots, a_f$ gegebene Funktionen der Variablen q_1, q_2, \dots, q_f, t sind und die linke Seite von (4.4) kein vollständiges Differential einer Funktion F ist. In diesem Fall liegt also eine nicht-holonome Bindung vor. Dies verdeutlicht das folgende Beispiel.

Beispiel 4.10 (Bewegung einer Schneide oder Kufe)

Die Lage der Kufe, ein starrer Körper in der Ebene, wird vollständig bestimmt durch die drei Koordinaten

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = \vartheta.$$

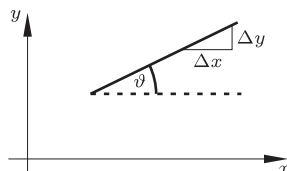


Abb. 4.5: Bewegung einer Schneide.

Sie sind **global** unabhängig voneinander, denn die Kufe kann jede mögliche Lage in der Ebene einnehmen. **Lokal** existiert jedoch eine Bindung zwischen

den Koordinaten (die Kufe kann sich nur tangential zur Bewegungsrichtung fortbewegen, nicht aber bspw. in Querrichtung):

$$\tan \vartheta = \frac{dy}{dx}, \quad \text{d.h.} \quad \tan q_3 = \frac{dq_2}{dq_1}$$

oder

$$\tan q_3 \, dq_1 - dq_2 = 0.$$

Wäre nun $\tan q_3 \, dq_1 - dq_2$ tatsächlich ein vollständiges Differential einer Funktion $F(q_1, q_2)$, dann ließe sich die Anzahl der Freiheitsgrade auf zwei (hier: q_1, q_2) reduzieren. Die Gleichung $dF = \tan q_3 \, dq_1 - dq_2$ führt auf die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_1} = \tan q_3 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial q_2} = -1$$

Man sieht hier leicht, dass der Schwarzsche Vertauschungssatz für die zweiten partiellen Ableitungen nicht erfüllt ist, denn es ist

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q_2 \partial q_1} = \frac{\partial \tan q_3}{\partial q_2} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_1 \partial q_2} = 0$$

und die Ableitung $\frac{\partial \tan q_3}{\partial q_2}$ verschwindet i. Allg. nicht, sondern ist von der Bahn der Kufe abhängig.

Man sagt dazu: Im Großen hat das System weiterhin drei Freiheitsgrade, aber **lokal** - im Kleinen - liegt eine Bindung vor, die die Freiheitsgrade auf zwei einschränkt. \diamond

5 Massenkinematische Größen eines Körpers

Die Massenkinematik befasst sich mit Größen, in denen die Masse bzw. eine Dichte als Maß der Verteilung der Masse mit den kinematischen Größen, Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung verknüpft wird.

Die vier grundlegenden massenkinematischen Größen sind:

1. das statische Massenmoment \mathbf{H}^Q ,
2. der Impuls \mathbf{I} ,
3. der Drall \mathbf{D}^Q ,
4. die kinetische Energie E .

Sie werden mit Hilfe von Volumengebietsintegralen definiert. Impuls und Drall treten u.a. in den Newton-Eulerschen Bewegungsgesetzen (vgl. Axiom 7.1) auf. Das statische Moment wird u.a. bei der Herleitung des Massenmittelpunktsatzes 8.4 benötigt. Die kinetische Energie tritt u.a. in den Leistungs- und Arbeitssätzen sowie im Energiesatz auf. Sie wird in Abschnitt 9.1.1 eingeführt.

5.1 Massendichte und Masse

Die Masse eines Körpers ist das Maß der Materiemenge dieses Körpers. Sie lässt sich mit Hilfe der Massendichte definieren, die axiomatisch eingeführt wird.

Axiom 5.1 (Existenz einer Massendichte)

*Es existiert eine skalare Ortsfunktion, $\rho = \rho(\mathbf{r})$, welche im Volumengebiet \mathcal{V} der Momentanlage eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der Materieverteilung in \mathcal{V} darstellt. Sie wird **Massendichte** oder kurz **Dichte** genannt.*

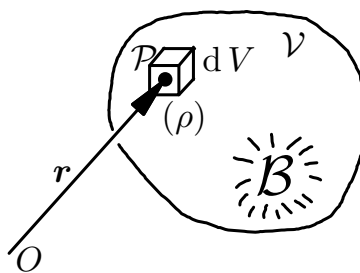


Abb. 5.1: Dichtefeld eines Körpers im materiellen Punkt \mathcal{P} .

Definition 5.2 (Masse)

Das Volumenintegral

$$m := \int_{\mathcal{V}} \rho \, dV, \quad (5.1)$$

erstreckt über die Momentanlage \mathcal{V} des Körpers \mathcal{B} , wird **Masse** von \mathcal{B} genannt.

Demnach ist die Masse m ein physikalischer Skalar. Die Größe $dm := \rho \, dV$ wird **Massenelement** genannt. Damit kann die Definitionsgleichung (5.1) auch in der symbolischen Form

$$m = \int_{\mathcal{B}} dm$$

notiert werden, in der dm „über den Körper \mathcal{B} “ integriert wird.

Die Dichte $\rho(\mathbf{r})$ lässt sich näherungsweise bestimmen. Hierzu teilen wir den Körper in n disjunkte Teilkörper $\Delta\mathcal{B}_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) und bezeichnen die Massen von $\Delta\mathcal{B}_i$ mit Δm_i sowie die Momentanlage von $\Delta\mathcal{B}_i$ zum Zeitpunkt t mit $\Delta\mathcal{V}_i$. Damit folgt aus (5.1):

$$\Delta m_i := \int_{\Delta\mathcal{V}_i} \rho \, dV \quad \text{mit } \rho = \rho(P), \quad P \in \Delta\mathcal{V}_i. \quad (5.2)$$

Sind die Teilkörper hinreichend klein, dann können wir annehmen, dass die Dichte $\rho(\mathbf{r})$ innerhalb eines jeden Teilkörpers $\Delta\mathcal{B}_i$ näherungsweise konstant ist. Folglich gilt

$$\rho(P) =: \rho_i = \text{const. in } \Delta\mathcal{V}_i.$$

Deshalb kann in (5.2) die Dichte $\rho =: \rho_i$ vor das Integral geschrieben werden und wir erhalten

$$\Delta m_i := \rho_i \int_{\Delta\mathcal{V}_i} dV = \rho_i \Delta V_i,$$

wobei $\Delta V_i = \int_{\Delta\mathcal{V}_i} dV$ das Volumen des Teilkörpers $\Delta\mathcal{B}_i$ zum Zeitpunkt t ist. Daraus folgt

$$\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Die Größe ρ_i heißt **mittlere Dichte** im Raumgebiet $\Delta\mathcal{V}_i$. Damit kann das Dichtefeld im Rahmen der Messgenauigkeit näherungsweise ermittelt werden.

5.2 Statisches Massenmoment und Massenmittelpunkt

Das statische Massenmoment wird zur Berechnung des Massenmittelpunkts benötigt.

Definition 5.3 (Statisches Massenmoment)

Das **statische Massenmoment** \mathbf{H}^Q eines Körpers \mathcal{B} , bezogen auf einen beliebigen (d.h. auch bewegten) Punkt Q ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{H}^Q = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \, dm \quad (5.3)$$

definierte physikalische Vektor.

Speziell für $Q \equiv O$ folgt daraus wegen $\mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{H}^O = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm \quad (5.4)$$

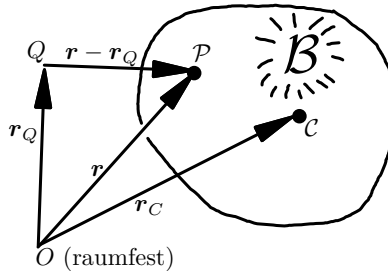


Abb. 5.2: Ortsvektoren zur Berechnung des statischen Massenmoments \mathbf{H}^Q .

Spezialfälle:

1. Für einen Massenpunkt mit Masse m und Ortsvektor \mathbf{r} ist $\mathbf{H}^O = m\mathbf{r}$.
2. Für einen Punkthaufen mit Massen Δm_i und den Ortsvektoren \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ist $\mathbf{H}^O = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \mathbf{r}_i$.

Bei zahlreichen mechanischen Betrachtungen spielt der Massenmittelpunkt eine wichtige Rolle.

Definition 5.4 (Massenmittelpunkt)

Der **Massenmittelpunkt** eines Körpers \mathcal{B} ist derjenige Punkt C , dessen Ortsvektor \mathbf{r}_C die Gleichung

$$\mathbf{r}_C m = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm \quad (5.5)$$

erfüllt.

Mit (5.4) folgt daraus

$$\mathbf{r}_C m = \mathbf{H}^O.$$

Der Massenmittelpunkt kann sowohl innerhalb als auch außerhalb des Körpers liegen. In einem deformierbaren Körper ändert i. Allg. der Massenmittelpunkt seine Lage bezüglich des Körpers. Dagegen ist der Massenmittelpunkt eines starren Körpers ein **körperfester** Punkt, d.h. ein mit diesem Körper starr verbundener Punkt.

Für das statische Massenmoment \mathbf{H}^C bezüglich des Massenmittelpunkts C erhalten wir aus (5.3) mit $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_C$ die Beziehung

$$\mathbf{H}^C = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \, dm = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_C \, dm,$$

und daraus wegen der Konstanz von \mathbf{r}_C :

$$\mathbf{H}^C = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm - \mathbf{r}_C \underbrace{\int_{\mathcal{B}} dm}_{=m}$$

und schließlich mit der Definitionsgleichung (5.5):

$$\mathbf{H}^C = \mathbf{0}, \text{ also } \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \, dm = \mathbf{0}, \text{ bzw. } \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \, dm = \mathbf{0}$$

mit

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C.$$

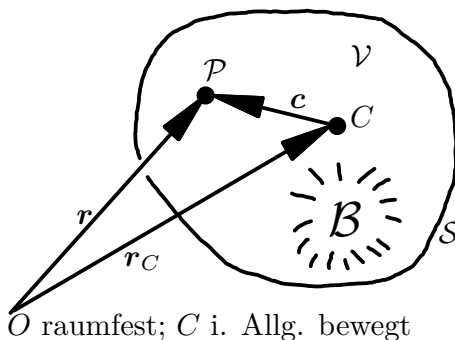


Abb. 5.3: Relativer Ortsvektor des materiellen Punkts \mathcal{P} bzgl. des Massenmittelpunkts C .

Damit gilt folgender

Satz 5.5 (Statisches Massenmoment bzgl. Massenmittelpunkt)
 Das statische Massenmoment \mathbf{H}^C eines Körpers, bezogen auf den Massenmittelpunkt C , ist gleich dem Nullvektor.

5.3 Impuls und Drall

Impuls und Drall sind zentrale physikalische Größen der Kinetik.

Definition 5.6 (Impuls)

Der **Impuls \mathbf{I}** eines Körpers \mathcal{B} ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{V}} \dot{\mathbf{r}} \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm \tag{5.6}$$

definierte physikalische Vektor, wobei $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$ das Geschwindigkeitsfeld von \mathcal{B} und \mathcal{V} die Momentanlage von \mathcal{B} zur Zeit t sind.

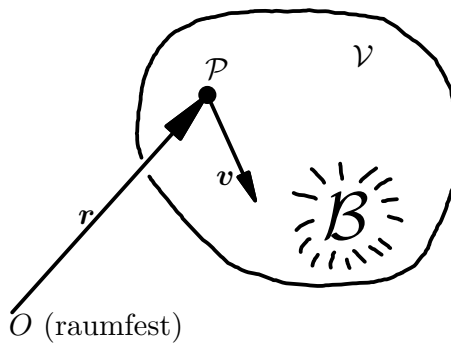


Abb. 5.4: Vektoren zur Berechnung des Impulses.

Im Fall eines Körpers, d.h. stets derselben Materiemenge, ist die Integration über den Körper von der Differentiation nach der Zeit unabhängig; deshalb dürfen die beiden Operationen in (5.6) vertauscht werden und man erhält für den Impuls \mathbf{I} eines Körpers die Darstellung

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}} \, dm = \frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \, dm \right) = (\mathbf{r}_{CM})' \stackrel{\uparrow}{=} m \dot{\mathbf{r}}_C = m \mathbf{v}_C. \tag{5.7}$$

$m = \text{const.}$ für einen Körper

Die Beziehung $\mathbf{I} = m \mathbf{v}_C$ wird u.a. bei der Herleitung des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls (Abschnitt 8.2) verwendet. Die Definition (5.6) des Impulses gilt auch für materiell offene Systeme, aber die Umformung (5.7) nur für Körper.

Definition 5.7 (Drall)

Der **Drall** D^Q eines Körpers \mathcal{B} , bezogen auf einen beliebigen (also auch einen bewegten) Punkt Q , ist der durch die Gleichung

$$D^Q := \int_{\mathcal{V}} \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} \rho dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} dm = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q) dm \quad (5.8)$$

definierte physikalische Vektor, wobei $\mathbf{q} := \mathbf{r} - \mathbf{r}_Q$ der relative Ortsvektor von \mathcal{P} bezüglich Q ist und folglich $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_Q$ die relative Geschwindigkeit von \mathcal{P} bezüglich Q ist.

Die Definition (5.8) des Dralls gilt auch für materiell offene Systeme.

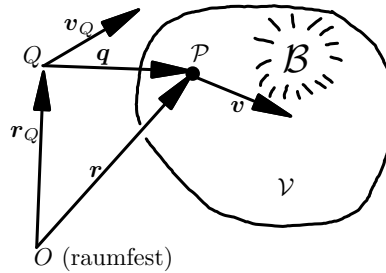


Abb. 5.5: Vektoren zur Berechnung des Dralls.

Zwei wichtige Spezialfälle des Dralls:

1. Für den Punkt O als Bezugspunkt erhalten wir aus (5.8) wegen $Q \equiv O$, also mit $\mathbf{r}_Q = \mathbf{0}$, den Drall

$$D^O := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dm = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} dm,$$

wobei $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ das Geschwindigkeitsfeld von \mathcal{B} ist.

2. Für den Massenmittelpunkt C als Bezugspunkt erhalten wir aus (5.8) wegen $Q \equiv C$, also mit $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_C$, den Drall

$$D^C := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \dot{\mathbf{c}} dm = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} dm, \quad (5.9)$$

wobei $\mathbf{c} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_C$ der relative Ortsvektor von \mathcal{P} bezüglich des Massenmittelpunkts C ist und folglich $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_C$ die relative Geschwindigkeit von \mathcal{P} bezüglich C ist.

Satz 5.8 (Drall im Massenmittelpunkt)

Für einen starren Körper besteht zwischen D^O und D^C die Beziehung

$$D^O = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C m + D^C \stackrel{(5.7)}{=} \mathbf{r}_C \times \mathbf{I} + D^C. \quad (5.10)$$

Beweis. Wir formen D^O , Gleichung (5.9), mit $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{c}$ um:

$$\begin{aligned} D^O &= \int_B \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_B (\mathbf{r}_C + \mathbf{c}) \times (\dot{\mathbf{r}}_C + \dot{\mathbf{c}}) \, dm \\ &= \int_B \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C \, dm + \int_B \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{c}} \, dm + \int_B \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{r}}_C \, dm + \int_B \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm \\ &= \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C \underbrace{\int_B dm}_{=m} + \mathbf{r}_C \times \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\int_B \mathbf{c} \, dm}_{=0} \right) + \underbrace{\int_B \mathbf{c} \, dm}_{=0} \times \dot{\mathbf{r}}_C + \underbrace{\int_B \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm}_{=D^C} \end{aligned}$$

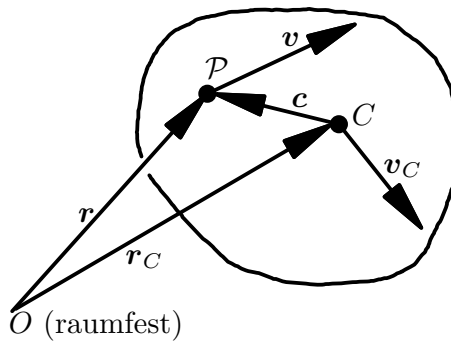


Abb. 5.6: Berechnung des Dralls im Massenmittelpunkt C .

und erhalten tatsächlich (5.10). ■

6 Dynamische Größen

Zu den dynamischen Größen der Technischen Mechanik gehören Kraftdichten, Kräfte und Momente. Sie sind physikalische Vektoren. Kraftdichten werden axiomatisch eingeführt und in

1. Flächenkraftdichten und
2. Volumenkraftdichten

eingeteilt in Abhängigkeit davon, ob sich ihre Wirkung auf die Oberfläche \mathcal{S} oder auf die Momentanlage \mathcal{V} eines Körpers erstreckt. Mit Hilfe von Flächen- und Volumenkraftdichten werden Kräfte und Momente definiert. Kräfte und Momente sind messbare Eigenschaften der mechanischen Einflüsse der **äußeren** Umgebung auf den Körper. Zur Betonung dieser Tatsache werden sie häufig **äußere** Kräfte bzw. Momente genannt.

6.1 Kraftdichten, Kräfte und Momente

Axiom 6.1 (Existenz einer Flächenkraftdichte)

*Es existiert ein Vektorfeld $\mathbf{f}_S = \mathbf{f}_S(\mathbf{r})$, das auf der Oberfläche \mathcal{S} eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der mechanischen Einflüsse der Umgebung auf die Oberfläche darstellt. Es wird **Flächenkraftdichte** oder (äußere) **Spannung** genannt.*

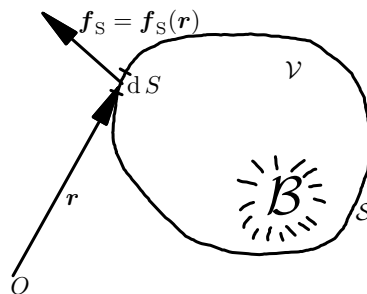


Abb. 6.1: Flächenkraftdichte auf der Oberfläche eines Körpers.

Axiom 6.2 (Existenz einer Volumenkraftdichte)

*Es existiert ein Vektorfeld $\mathbf{f}_V = \mathbf{f}_V(\mathbf{r})$, das im Volumengebiet \mathcal{V} eines Körpers \mathcal{B} erklärt ist und die Intensität der mechanischen Einflüsse der Umgebung bezüglich der Momentanlage des Körpers darstellt. Es wird **Volumenkraftdichte** genannt.*

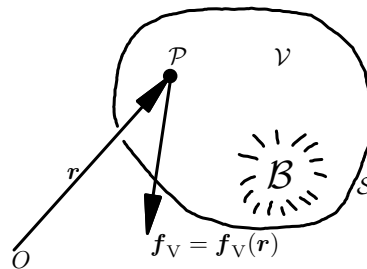


Abb. 6.2: Volumenkräfte im Volumengebiet eines Körpers.

Definition 6.3 (Flächenkraft, Volumenkraft)

Das Oberflächenintegral

$$\mathbf{F}_S = \int_S \mathbf{f}_S \, dS \quad (\mathcal{S} \text{ ist die Oberfläche von } \mathcal{B}) \quad (6.1)$$

heißt die (auf den Körper wirkende) **Flächenkraft** und das Volumenintegral

$$\mathbf{F}_V = \int_V \mathbf{f}_V \, dV \quad (\mathcal{V} \text{ ist die Momentanlage von } \mathcal{B})$$

heißt die (auf den Körper wirkende) **Volumenkraft**.

Axiom 6.4 (Additivität von Flächen- und Volumenkräften)

Flächenkräfte und Volumenkräfte sind addierbare Vektoren.

Definition 6.5 (Resultierende Kraft)

Der physikalische Vektor

$$\mathbf{F} := \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V \quad (6.2)$$

wird die **resultierende Kraft** oder kurz die **Resultierende** genannt. Sie ist die gesamte auf den Körper wirkende Kraft.

Ein typisches Beispiel einer **Flächenkraft** ist die auf die Oberfläche unseres Körpers wirkende Windkraft.

Ein typisches Beispiel einer **Volumenkraft** ist die Gewichtskraft eines Körpers \mathcal{B} der Masse m . Sie ist in guter Näherung mit der Schwerkraft identisch und beträgt $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ bei konstanter **Erdgravitationsfeldstärke** \mathbf{g} in \mathcal{V} .

Die Erdgravitationsfeldstärke ist stets zum Mittelpunkt der Erde gerichtet, und der Betrag $g := \|\mathbf{g}\|$ ist in der Nähe der Erdoberfläche annähernd konstant. Die

Messungen von g in Höhe der Meeresoberfläche haben $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ergeben.

Man beachte, dass \mathbf{g} zwar die Einheit der Beschleunigung besitzt, dem Wesen nach jedoch **keine Beschleunigung** ist. So gilt z.B. für einen ruhenden Klotz $\mathbf{v} \equiv \mathbf{0}$, deshalb auch $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, jedoch $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ mit $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$.

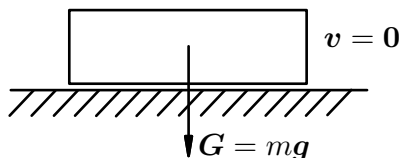


Abb. 6.3: Klotz unter Einwirkung des Gravitationsfeldes.

Wegen der näherungsweisen Konstanz von \mathbf{g} innerhalb der Momentanlage \mathcal{V} von \mathcal{B} gilt:

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{g} \rho \, dV = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \, dm = m\mathbf{g},$$

also insbesondere

$$\mathbf{G} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_{V_G} \, dV$$

mit der Volumenkraftdichte $\mathbf{f}_{V_G} = \rho\mathbf{g}$.

Mit Hilfe von Flächen- und Volumenkraftdichten lassen sich weitere physikalische Vektoren, Momente genannt, definieren.

Definition 6.6 (Moment einer Kraftdichte)

Das **Moment** M_S^Q der **Flächenkraftdichte** \mathbf{f}_S bezüglich des Punkts Q ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{M}_S^Q = \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_S \, dS \tag{6.3}$$

definierte physikalische Vektor. Das **Moment** M_V^Q der **Volumenkraftdichte** \mathbf{f}_V bezüglich des Punkts Q ist der durch die Gleichung

$$\mathbf{M}_V^Q = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_V \, dV$$

definierte physikalische Vektor.

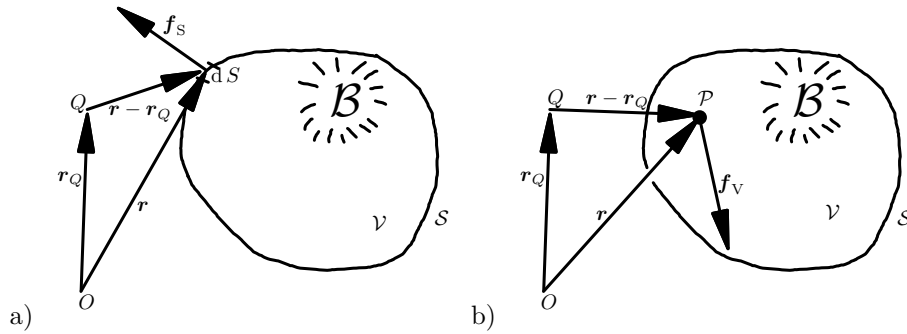


Abb. 6.4: Moment einer Flächenkraftdichte (a) und einer Volumenkraftdichte (b).

Definition 6.7 (Resultierendes Moment einer Kraftdichte)

Der Vektor

$$\mathbf{M}^Q = \mathbf{M}_S^Q + \mathbf{M}_V^Q \quad (6.4)$$

heißt das **resultierende Moment** der Kraftdichten.

In den Spezialfällen des Bezugspunkts O bzw. C folgt daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^O &= \int_S \mathbf{r} \times \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V \, dV, \\ \mathbf{M}^C &= \int_S (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{f}_V \, dV. \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.2 Dynamik einer Kraftdichte

Wir führen die nachstehenden Überlegungen für Flächenkraftdichten (Spannungen) durch. Die Ergebnisse gelten für Volumenkraftdichten entsprechend.

Wir betrachten die skizzierte Spannungsverteilung \mathbf{f}_S über dem Flächenstück ΔS . Die Resultierende \mathbf{F} von \mathbf{f}_S ist gemäß (6.1):

$$\mathbf{F} = \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S \, dS, \quad (6.6)$$

und das auf den Punkt A bezogene resultierende Moment \mathbf{M}^A ist nach (6.3):

$$\mathbf{M}^A = \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{f}_S \, dS. \quad (6.7)$$

Die Resultierende \mathbf{F} , Gl. (6.6), besitzt keinen Angriffspunkt, weil sie ein freier Vektor ist. Im Hinblick auf die grundlegenden Betrachtungen über die Newton-Euler-Bewegungsgesetze, Axiom 7.1, ist es jedoch zweckmäßig, \mathbf{F} an den Be-

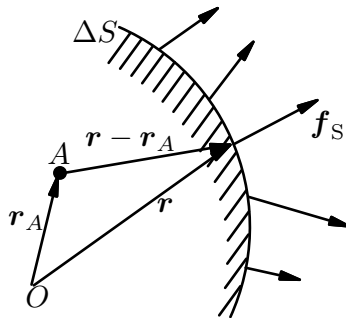


Abb. 6.5: Spannungsverteilung f_S .

zugspunkt A des Momentes M^A zu binden, d.h. den Punkt A zum Angriffspunkt von F zu machen, und die rein dynamische Größe F , den (geometrischen) Bezugspunkt A und die dynamisch-geometrische Größe M^A zu einem Gebilde zusammenzufassen:

Definition 6.8 (Dynamie)

Die an den Punkt A gebundene Resultierende

$$F = \int_{\Delta S} f_S dS,$$

einer Spannungsverteilung f_S und das auf den Punkt A bezogene resultierende Moment

$$M^A = \int_{\Delta S} (r - r_A) \times f_S dS$$

von f_S bilden zusammen eine dynamisch-geometrische Größe, welche **Dynamie** genannt wird und mit (F, A, M^A) bezeichnet wird. Es heißen F der **Kraftwert**, M^A der **Momentenwert** und A der **Angriffspunkt** der Dynamie (F, A, M^A) .

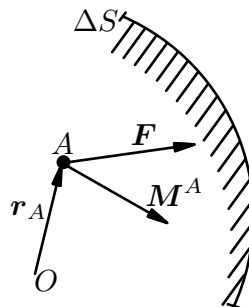


Abb. 6.6: Grafische Darstellung einer Dynamie.

Die Dynamie $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ repräsentiert die auf den Punkt A bezogene dynamische Wirkung der Spannungsverteilung \mathbf{f}_S . Ist \mathbf{f}_S gegeben, so ist die Dynamie $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt lassen sich zu einer vorgegebenen Dynamie unendliche viele Spannungsverteilungen \mathbf{f}_S konstruieren, deren Resultierenden jeweils gleich \mathbf{F} und deren resultierende Momente jeweils gleich \mathbf{M}^A sind.

6.3 Momentenversetzungsgleichung

Ein und dieselbe Spannungsverteilung \mathbf{f}_S besitzt eine eindeutig bestimmte Resultierende $\mathbf{F} := \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S \, dS$. Dagegen können für \mathbf{f}_S beliebig viele verschiedene Momente gebildet werden; denn ein Moment hängt i. Allg. vom Bezugspunkt ab. Zwischen den Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ und $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ derselben Spannungsverteilung \mathbf{f}_S besteht folgender Zusammenhang:

Satz 6.9 (Momentenversetzungsgleichung)

Zwischen den Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ und $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ derselben Spannungsverteilung \mathbf{f}_S besteht die Beziehung

$$\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}.$$

Diese Gleichung wird **Momentenversetzungsgleichung** genannt, das Moment

$$\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{6.8}$$

heißt **Versetzungsmoment**.

Beweis. Wir berechnen zunächst die Momente \mathbf{M}^A und \mathbf{M}^B ,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^A &= \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{f}_S \, dS, \\ \mathbf{M}^B &= \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_S \, dS \end{aligned}$$

und erhalten nach seitenweiser Subtraktion

$$\mathbf{M}^B - \mathbf{M}^A = \int_{\Delta S} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{f}_S \, dS,$$

sowie daraus wegen der Konstanz von $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ bezüglich S auch

$$\mathbf{M}^B - \mathbf{M}^A = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S \, dS \stackrel{(6.6)}{=} (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}. \tag{6.9}$$

Somit besteht für die Momente \mathbf{M}^A und \mathbf{M}^B ein und derselben Spannungsverteilung \mathbf{f}_S die Beziehung

$$\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}. \quad \blacksquare$$

Gemäß der Momentenversetzungsgleichung setzt sich das „neue“ Moment \mathbf{M}^B aus dem „alten“ Moment \mathbf{M}^A und dem **Versetzungsmoment** zusammen, falls der Momentenbezugspunkt von Punkt A zum Punkt B verlegt wird.

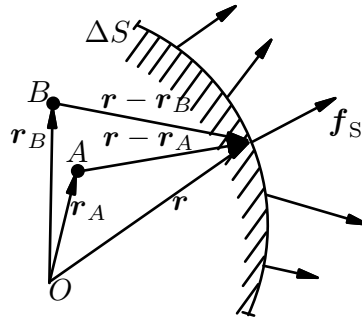


Abb. 6.7: Bezugspunkte A und B.

Anmerkung. Die Dynamen für Volumenkraftdichten \mathbf{f}_V werden genauso wie die Dynamen für Flächenkraftdichten \mathbf{f}_S berechnet. Deshalb gelten die nachstehenden Betrachtungen über Dynamen, Einzelkräfte und freie Momente sowie die Momentenversetzungsgleichung (6.9) auch für beliebige Resultierende gemäß Gleichung (6.2) und für beliebige resultierende Momente gemäß Gleichung (6.4), d.h. für beliebige \mathbf{f}_S , \mathbf{f}_V -Kraftdichteverteilungen.

6.4 Versetzen einer Dynamen und Dynamenäquivalenz

Die Momentenversetzungsgleichung (6.9) erlaubt es uns, aus der alten Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ die neue Dynamen $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ einer \mathbf{f}_S , \mathbf{f}_V -Kraftdichteverteilung direkt zu ermitteln. Dieser Vorgang wird **Versetzen** der Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ zum Punkt B genannt. Dadurch wird die zumeist umfangreiche Berechnung des Momentes \mathbf{M}^B mittels Integration gemäß Gleichung (6.7) vermieden. Dabei gilt die

Regel für das Versetzen einer Dynamen:

Der Übergang von einer Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ zu einer Dynamen $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ ein und derselben Kraftdichteverteilung geschieht in drei Schritten:

1. Die Kraft \mathbf{F} wird von A nach B parallel verschoben („versetzt“).
2. Es wird das neue Moment $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + \mathbf{M}_A^B$ mit dem Versetzungsmoment $\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ ermittelt.
3. Das neue Moment \mathbf{M}^B wird im Punkt B „aufgepflanzt“, und das alte Moment \mathbf{M}^A „gelöscht“.

Wird insbesondere eine Dynamen $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ längs der durch den Punkt A und die Kraft \mathbf{F} bestimmten Geraden versetzt, so hat die neue Dynamen $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ wegen $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \parallel \mathbf{F}$, d.h. wegen $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ den unveränderten Momentenwert $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A$; dies folgt unmittelbar aus der Momentenversetzungsgleichung $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ nach Einsetzen von $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Diese Eigenschaft heißt **Linienflüchtigkeit** einer Dynamen (wobei zu beachten ist, dass sich der Kraftwert einer Dynamen bei einem beliebigen Versetzen nie ändert).

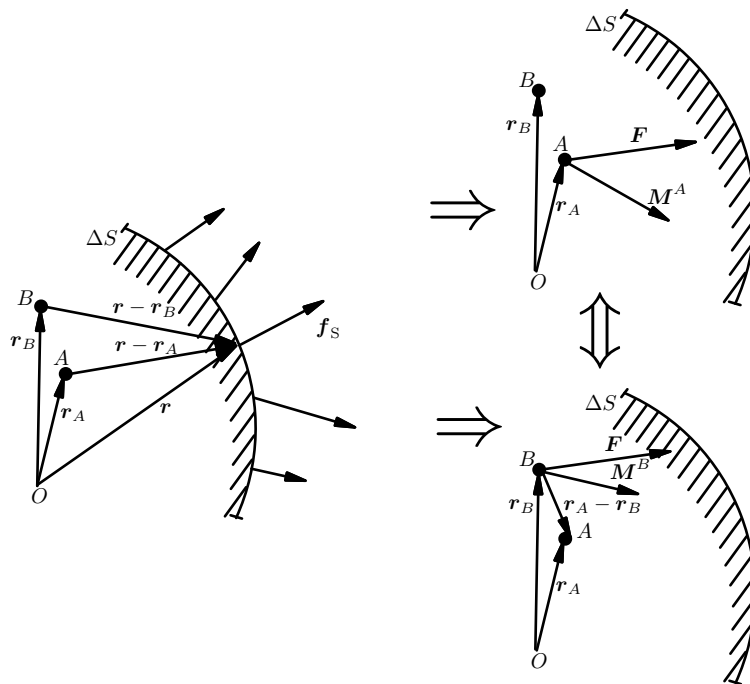


Abb. 6.8: Versetzungsmoment und Versetzen einer Dynam.

Definition 6.10 (Äquivalenz von Dynamen)

Zwei Dynamen $(\mathbf{F}_1, A, \mathbf{M}^A)$ und $(\mathbf{F}_2, B, \mathbf{M}^B)$, deren Resultierende \mathbf{F}_1 und \mathbf{F}_2 gleich sind ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2 =: \mathbf{F}$), und deren Momente \mathbf{M}^A und \mathbf{M}^B die Momentenversetzungsgleichung $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$ erfüllen, heißen **dynamisch äquivalent** oder **gleich**; in Zeichen: $(\mathbf{F}_1, A, \mathbf{M}^A) = (\mathbf{F}_2, B, \mathbf{M}^B)$.

Zwei Dynamen ein und derselben Kraftdichteverteilung haben stets die gleichen Resultierende, und ihre Momente erfüllen die Momentenversetzungsgleichung. Deshalb gilt der

Satz 6.11 (Dynamenäquivalenz)

Zwei Dynamen ein und derselben Kraftdichteverteilung sind dynamisch äquivalent.

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Äquivalenten Dynamen können verschiedene Kraftdichteverteilungen zugrunde liegen.

6.5 Einzelkräfte und freie Momente

Bei den Dynamen unterscheidet man grundsätzlich zwei Spezialfälle:

Definition 6.12 (Einzelkraft, freies Moment)

1. Eine *Dyname* $(\mathbf{F}, A, \mathbf{0}) =: (\mathbf{F}, A)$ mit verschwindendem resultierenden Moment, d.h. mit $\mathbf{M}^A = \mathbf{0}$ heißt **Einzelkraft**. Es heißen \mathbf{F} der **Kraftwert**, A der **Angriffspunkt** und die durch A und \mathbf{F} bestimmte Gerade die **Wirkungslinie** der Einzelkraft (\mathbf{F}, A) .
 2. Eine *Dyname* mit verschwindender Resultierender $(\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A) =: \mathbf{M}$ heißt **freies Moment**.
-

Die Bezeichnung von $\mathbf{M} := (\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A)$ als **freies Moment** liegt in der Tatsache begründet, dass der Momentenwert \mathbf{M}^A von \mathbf{M} vom Bezugspunkt A unabhängig ist; denn versetzt man $\mathbf{M} := (\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A)$ vom Punkt A zu einem neuen Punkt B , so gilt wegen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ für das Versetzungsmoment $\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$, deshalb auch $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A + \mathbf{0} = \mathbf{M}^A$. Die versetzte Dyname ist dann $(\mathbf{0}, B, \mathbf{M}^B)$ mit $\mathbf{M}^B = \mathbf{M}^A$, also $(\mathbf{0}, B, \mathbf{M}^B) = \mathbf{M}$. Dies bedeutet in der Tat, dass ein freies Moment $\mathbf{M} := (\mathbf{0}, A, \mathbf{M}^A)$ vom Bezugspunkt unabhängig ist.

Jede **Einzelkraft** besitzt ihren Angriffspunkt. Dadurch ist es möglich, Einzelkräfte grafisch darzustellen.

Beispiel 6.13

Ein möglicher Angriffspunkt der Schwerkraft eines Körpers ist der Schwerpunkt. Für die Gewichtskraft des Körpers ist dies in guter Näherung ebenfalls ein möglicher Angriffspunkt. Ist die Erdgravitationsfeldstärke innerhalb der Momentanlage des Körpers konstant, dann fallen Schwerpunkt und Massenmittelpunkt zusammen. \diamond

Zur Vereinfachung der grafischen Darstellung schreibt man an den Pfeil, der eine Einzelkraft repräsentiert, lediglich ihren Kraftwert; denn die Skizze selbst gibt uns Auskunft über den Angriffspunkt der Einzelkraft. So sind z.B. in der Abbildung 6.9 drei **verschiedene** Einzelkräfte (\mathbf{F}, A) , (\mathbf{F}, B) und (\mathbf{F}, C) mit dem gleichen Kraftwert \mathbf{F} skizziert.

Im Hinblick auf die zahlreichen Anwendungen von Einzelkräften in der Mechanik empfiehlt es sich, in Analogie zum Moment $\mathbf{M}^Q = \int_{\Delta S} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{f}_S \, dS$ einer Spannungsverteilung \mathbf{f}_S das Moment einer Einzelkraft einzuführen.

Definition 6.14 (Moment einer Einzelkraft)

Das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A) := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{6.10}$$

wird das **Moment** der (im Punkt A angreifenden) **Einzelkraft** (\mathbf{F}, A) bezüglich des Punkts B genannt.

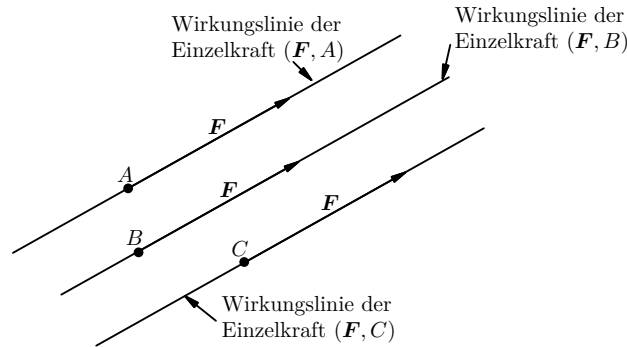


Abb. 6.9: Drei verschiedene Einzelkräfte mit gleichem Kraftwert.

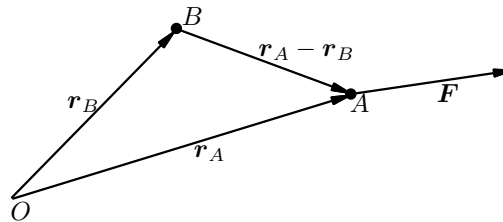


Abb. 6.10: Vektoren zur Berechnung des Moments einer Einzelkraft.

Der Vergleich von Gleichung (6.8) mit Gleichung (6.10) liefert

$$\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A) = \mathbf{M}_A^B,$$

d.h. das Moment $\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A)$ der Einzelkraft (\mathbf{F}, A) bezüglich des Punkts B ist gleich dem Versetzungsmoment $\mathbf{M}_A^B := (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$, wobei in der letzten Beziehung die Resultierende \mathbf{F} , Gleichung (6.2), **keinen** Angriffspunkt besitzt.

Versetzt man eine Einzelkraft (\mathbf{F}, A) , d.h. die Dynamie $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ mit $\mathbf{M}^A := \mathbf{0}$, vom Angriffspunkt A zu einem neuen, beliebigen Angriffspunkt B , so gewinnt man die Dynamie $(\mathbf{F}, B, \mathbf{M}^B)$ mit dem Momentenwert $\mathbf{M}^B = \mathbf{0} + \mathbf{M}_A^B = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = \mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A)$.

Dies bedeutet: Beim Versetzen einer Einzelkraft (\mathbf{F}, A) zu einem neuen, beliebigen Angriffspunkt B ist der neuen, in Punkt B angreifenden Kraft (\mathbf{F}, B) das Versetzungsmoment \mathbf{M}_A^B hinzuzufügen (das gleich dem Moment $\mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A)$ der Einzelkraft (\mathbf{F}, A) bzgl. B ist). Versetzt man insbesondere eine Einzelkraft (\mathbf{F}, A) längs ihrer Wirkungslinie, so liegt der neue Angriffspunkt A^* auf dieser (unveränderten) Wirkungslinie, folglich ist $(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{A^*}) \parallel \mathbf{F}$, also $\mathbf{M}^{A^*} = \mathbf{M}_A^{A^*} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_{A^*}) \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Die neue Dynamie ist dann $(\mathbf{F}, A^*, \mathbf{0})$, also ebenfalls eine Einzelkraft, und die beiden Einzelkräfte (\mathbf{F}, A) und (\mathbf{F}, A^*) sind gleich:

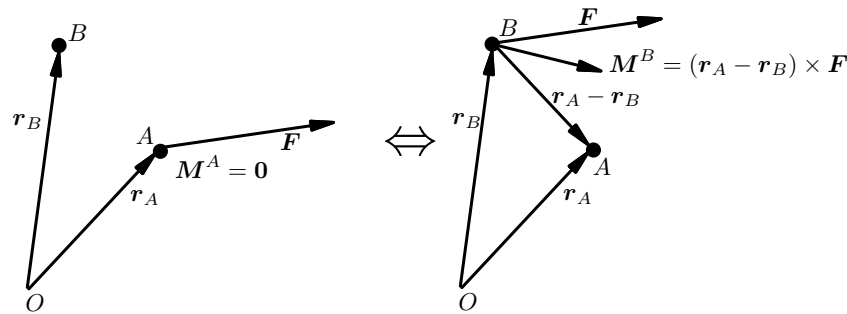


Abb. 6.11: Versetzen einer Einzelkraft.

$(\mathbf{F}, A) = (\mathbf{F}, A^*)$. Das Moment \mathbf{M}^B von (\mathbf{F}, A^*) ist gemäß (6.10):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A^*) &= (\mathbf{r}_{A^*} - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_{A^*} - \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \\ &= (\mathbf{r}_{A^*} - \mathbf{r}_A) \times \mathbf{F} + (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{M}^B(\mathbf{F}, A). \end{aligned}$$

Somit bleibt das auf ein und denselben Punkt bezogene Moment einer Einzelkraft beim Versetzen dieser Einzelkraft längs ihrer Wirkungslinie unverändert. Diese Eigenschaft wird **Linienflüchtigkeit** einer Einzelkraft genannt. Demnach ist jede Einzelkraft linienflüchtig.

6.6 Einteilung der Dynamen

Die (äußeren) Kräfte werden in

1. eingeprägte Kräfte und
2. Reaktionskräfte eingeteilt.

Reaktionskräfte rühren von den geometrischen Bindungen des Körpers her. Die Reaktionskräfte werden entweder aus den Gleichgewichtsbedingungen oder aus den Bewegungsgleichungen ermittelt.

Eingeprägte Kräfte sind durch physikalische Gleichungen, **Kraftgleichungen** genannt, gegeben.

Beispiele:

Die Haftkraft ist eine Reaktionskraft. Sie wird deshalb im Fall der Statik aus den Gleichgewichtsbedingungen und im Fall der Kinetik aus den Bewegungsgleichungen ermittelt. Haften ist gewährleistet, wenn die ermittelte Reaktionskraft H betragsmäßig nicht größer als die Grenz-Haftkraft H_0 ist, wobei für H_0 die Beziehung

$$H_0 = \mu_0 N \text{ mit } N > 0,$$

gilt. Hier ist N die Normalkraft und μ_0 heißt **Grenz-Haftzahl**. Sie wird aus Versuchen ermittelt und hängt im wesentlichen vom Material und dem Zustand der

Eingeprägte Kräfte	Reaktionskräfte
Gewichtskraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$	Normalkraft N
Reibkraft $R = \mu N$	Haftkraft H
Federkraft $F = c\Delta\ell$	Lagerreaktionskräfte
Auftriebskraft $\mathbf{A} = -\gamma_M V_B \frac{\mathbf{g}}{\ \mathbf{g}\ } = \rho_M V_B \mathbf{g}$	
Widerstandskraft $\mathbf{W} = -\frac{\mathbf{v}}{\ \mathbf{v}\ } (a_0 + a_1 \ \mathbf{v}\ + \dots + a_n \ \mathbf{v}\ ^n)$	

Tab. 6.1: Einteilung der Dynamen.

Berührflächen der aneinanderhaftenden Körper ab. Die Grenz-Haftzahl hängt nicht von der Größe der Berührungsfläche und nicht von der Größe der Kraft N ab.

Die **Haftbedingung** lautet also

$$|H| \leq H_0.$$

Gilt $\mu_0 = \text{const.}$ in alle Richtungen der Berührebene, dann bestimmt μ_0 einen Haftkegel, dessen Öffnungswinkel α durch $\tan \frac{\alpha}{2} = \mu_0$ gegeben ist. Die resultierende Berührungskraft aus H und N muss im Haftkegel liegen, um Haften zu gewährleisten.

Im Fall $|H| > H_0$ tritt Bewegung zwischen den Berührkörpern auf. In diesem Fall liegt eine Reibkraft R als eingeprägte Kraft vor, und es gilt dann $R = \mu N$ mit $\mu \leq \mu_0$.

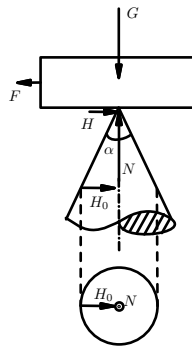


Abb. 6.12: Haftkegel für den Klotz auf einer Berührebene.

7 Dynamische Axiome der Mechanik

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir für einen Körper \mathcal{B} die zwei grundlegenden massenkinematischen Größen

a) den Impuls

$$\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}} \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \rho \, dV,$$

b) den auf einen raumfesten Punkt bezogenen Drall

$$\mathbf{D}^O := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} \, dm = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho \, dV,$$

sowie die zwei grundlegenden dynamischen Größen

α) die resultierende Kraft

$$\mathbf{F} := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_V \, dV$$

β) das auf O bezogene resultierende Moment

$$\mathbf{M}^O := \int_{\mathcal{S}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V \, dV$$

definiert, wobei \mathcal{V} die Momentanlage und \mathcal{S} die Momentanoberfläche von \mathcal{B} zur Zeit t sind.

Zwischen diesen Größen bestehen zwei fundamentale Beziehungen, **Newton-Eulersche Bewegungsgesetze** genannt.

7.1 Impulsgesetz und Drallgesetz

Axiom 7.1 (Newton-Eulersche Bewegungsgesetze)

Für jede beliebige Bewegung eines Körpers in einem Inertialsystem gelten die nachstehenden, voneinander unabhängigen, dynamischen Bilanzgleichungen:

1. das **Impulsgesetz**

$$\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F} \quad (\text{Newton, 1686}), \quad (7.1)$$

wonach die zeitliche Ableitung des Impulses \mathbf{I} gleich der (äußeren) resultierenden Kraft \mathbf{F} ist, und

2. das **Drallgesetz**

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O \quad (\text{Euler, 1775}),$$

wonach die zeitliche Ableitung des Dralls \mathbf{D}^O gleich dem (äußeren) resultierenden Moment \mathbf{M}^O ist; hier ist O ein im Inertialraum ruhender (also raumfester), aber sonst beliebiger Bezugspunkt.

Anmerkungen:

1. Die Newton-Eulerschen Gesetze $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ werden **axiomatisch** eingeführt, d.h. als Grundtatsachen, die auf irgendwelche ursprünglichere Aussagen nicht mehr zurückzuführen sind. Sie sind deshalb physikalische Axiome, und stehen am Anfang mechanischer Untersuchungen. Trotz ihrer Unbeweisbarkeit sind die aus ihnen gewonnenen Aussagen durch wissenschaftliche Erfahrung und durch physikalische Experimente hinreichend bestätigt. Deshalb wird die Gültigkeit der Newton-Eulerschen Gesetze im Rahmen der klassischen Mechanik als gesichert angesehen.
2. Die Newton-Eulerschen Gesetze $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ sind zunächst für **Körper** (d.h. materiell geschlossene Systeme) formuliert. Durch geeignete Umformungen können sie auch auf materiell offene Systeme übertragen werden (z.B. in der Strömungsmechanik).
3. Die Newton-Eulerschen Gesetze $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ gelten für **alle** Körper, und zwar unabhängig von irgendwelchen speziellen Eigenschaften dieser Körper, wie z.B. Festigkeitseigenschaften, elektrische oder thermische Leitfähigkeit etc. Somit gehören sie der Klasse der **universellen Gleichungen** an.
4. Die Existenz eines Inertialraumes und der Inertialzeit lässt sich nicht nachweisen, weil diese Begriffe axiomatisch eingeführt wurden. Die Einführung dieser Begriffe lässt sich jedoch durch eine gute Übereinstimmung experimenteller Ergebnisse mit den rechnerischen Lösungen durchaus rechtfertigen. Die Wahl eines geeigneten Inertialraumes und des mit ihm fest verbundenen Inertialsystems richtet sich nach der Problemstellung. Werden z.B. dynamische Probleme von Körpern auf der Erdoberfläche betrachtet, so kann häufig ein mit der Erdoberfläche fest verbundenes Koordinatensystem als Inertialsystem aufgefasst werden. Werden dagegen die auf die Erde wirkenden Kräfte und die Erdbewegungen unter dem Einfluss dieser Kräfte untersucht, dann ist die Erde kein Inertialsystem mehr. In diesem Fall ist es aber zulässig und zweckmäßig, die Sonne als ein Inertialsystem zu wählen. Die Richtigkeit der Wahl eines Inertialsystems kann erst nachträglich durch Vergleich der gewonnenen rechnerischen Lösungen mit experimentellen Ergebnissen bestätigt werden.
5. Die Newton-Eulerschen Gesetze $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ gelten nicht nur für einzelne Körper, sondern auch für beliebige Teile von Körpern, wenn man die durch Abtrennung von Teilen verlorenen mechanischen Einflüsse nach dem Eulerschen Schnittprinzip, Axiom 7.2, durch die entsprechende Flächenkraft- und Volumenkraftdichten (bzw. die dynamisch äquivalenten Kräfte und Momente) ersetzt.

7.2 Schneiden, Freischneiden, Eulersches Schnittprinzip

Bei unseren bisherigen Betrachtungen über Kraftdichten, Kräfte und Momente haben wir stillschweigend angenommen, dass die betrachteten Körper von ihrer Umgebung mechanisch vollständig abgetrennt werden. Meistens stehen aber Körper mit den sie umgebenden Gegenständen in Kontakt. Bevor wir also an

diesen Körpern Kraftdichten ansetzen, müssen wir diese Körper von den sie umgebenden Gegenständen abtrennen.

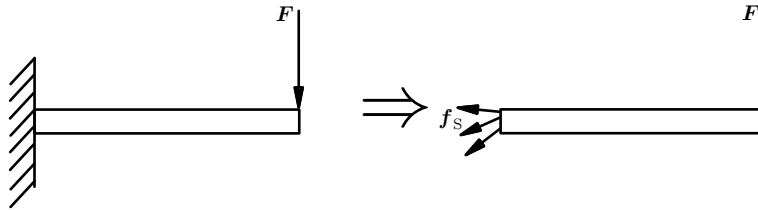


Abb. 7.1: Schneiden eines masselosen Balkens.

Eine grundsätzliche Auskunft über die Möglichkeit solcher Trennvorgänge liefert das nachstehende

Axiom 7.2 (Eulersches Schnittprinzip)

Jeder Körper kann von seiner Umgebung mechanisch abgetrennt werden. Ebenso kann jeder Teil des Körpers von seinem Rest mechanisch abgetrennt werden. Die durch das Abtrennen verlorenen mechanischen Einflüsse werden durch die entsprechenden Flächenkraft- und Volumenkraftdichten bzw. die dynamisch äquivalenten Kräfte und Momente ersetzt.

Zwecks einer sprachlichen Vereinfachung ist es sinnvoll, die nachstehenden Begriffe einzuführen.

Definition 7.3 (Schneiden)

*Ein in Gedanken vollzogener Vorgang, durch den ein Körper bzw. ein Teil des Körpers von seiner Umgebung teilweise abgetrennt wird, nennt man **Schneiden**. Eine in Gedanken vollzogene, vollständige Trennung eines Körpers bzw. eines Teils des Körpers von der Umgebung nennt man **Freischneiden**.*

Durch Schneiden bzw. Freischneiden wird das System „Körper-Umgebung“ verändert. Die dadurch verlorenen mechanischen Einflüsse stellt man mit Hilfe von Kraftdichten bzw. dynamisch äquivalenten Kräften und Momenten wieder her.

Anmerkung. Das Eulersche Schnittprinzip gilt auch im Fall materiell offener Bereiche.

Beispiel 7.4 (Schneiden eines Körpers)

Zur Veranschaulichung des Schneidens betrachten wir den in Abbildung 7.2 skizzierten Körper \mathcal{B} , der von seiner Umgebung an seiner Oberfläche \mathcal{S} freigeschnitten wurde. Die (mit \mathcal{S} identische) Schnittfläche ist gestrichelt skizziert.

Der mechanische Einfluss der äußeren Umgebung auf den Körper ist durch die Flächenkraftdichte (\equiv Spannungsfeld) f_s und durch die Volumenkraftdichte f_v repräsentiert.

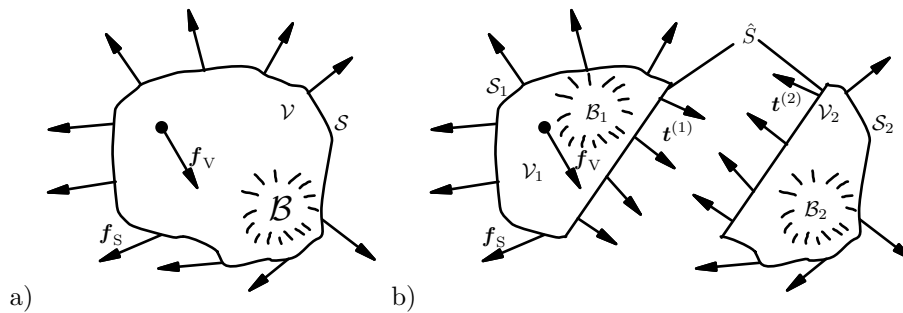


Abb. 7.2: Schneiden eines Körpers.

In zahlreichen mechanischen Betrachtungen ist es notwendig, den Körper \mathcal{B} in zwei Teilkörper \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 zu zerlegen, wie dies in Abbildung 7.2 durch Schneiden von \mathcal{B} an der Schnittfläche \hat{S} geschehen ist. Der Teilkörper \mathcal{B}_1 hat das Volumengebiet \mathcal{V}_1 und die Oberfläche $\mathcal{S}_1 \cup \hat{S}$.

Dementsprechend hat der Teilkörper \mathcal{B}_2 das Volumengebiet \mathcal{V}_2 und die Oberfläche $\mathcal{S}_2 \cup \hat{S}$. Den durch das Schneiden an der Schnittfläche \hat{S} verlorengegangenen mechanischen Einfluss von \mathcal{B}_2 auf \mathcal{B}_1 ersetzen wir durch das Vektorfeld der Schnittspannungen $\mathbf{t}^{(1)}$ und den Einfluss von \mathcal{B}_1 auf \mathcal{B}_2 ersetzen wir durch das Vektorfeld der Schnittspannungen $\mathbf{t}^{(2)}$. \diamond

Axiom 7.5 (Cauchysches Spannungsprinzip)

Der Spannungsvektor in einem Punkt der Schnittfläche ist nur vom Ort und der Zeit sowie dem Normalenvektor in dem Punkt der Schnittfläche abhängig.

Eine Abhängigkeit von anderen geometrischen Größen, bspw. der Schnittflächenkrümmung, wird damit ausgeschlossen. In Abschnitt 8.1 werden wir beweisen, dass die Schnittspannungen linear vom Normalenvektor abhängen und die Beziehung $\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}$ („actio = reactio“) gilt.

8 Dynamische Sätze der Mechanik

Mit Hilfe des Impuls- und Drallgesetzes ergeben sich die in diesem Kapitel zusammengefassten Sätze.

8.1 Gegenwirkungssatz

Gemäß dem Cauchyschen Spannungsprinzip ist das Spannungsvektorfeld einer Schnittfläche neben dem Ort und der Zeit auch vom Normalenvektorfeld der Fläche abhängig. Wir werden im Folgenden zeigen, dass die Schnittspannungen **linear** vom Normalenvektor abhängen. Der **Spannungstensor** vermittelt die lineare Abbildung zwischen dem Normalenvektor und den Schnittspannungen.

Satz 8.1 (Existenz des Spannungstensors (Satz von Cauchy))

Zu einer Schnittfläche sei \mathbf{t} das Vektorfeld der Schnittspannungen. Dann existiert ein eindeutiges Feld $\boldsymbol{\sigma}$ von Tensoren 2. Stufe, so dass in jedem Punkt der Schnittfläche

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

mit dem Normalenvektor \mathbf{n} der Schnittfläche gilt. Das Tensorfeld $\boldsymbol{\sigma}$ heißt Spannungstensorfeld.

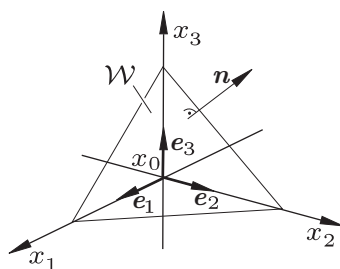


Abb. 8.1: Spannungsvektoren am Tetraeder.

Beweis. Zu einem festen Zeitpunkt t und für einen festen materiellen Punkt $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ mit Ortsvektor \mathbf{r} in der Momentankonfiguration betrachten wir das in Abbildung 8.1 skizzierte Tetraeder $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ mit Höhe ℓ und der eingezeichneten Lage des materiellen Punkts. Wegen $\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Vol}(\mathcal{W})}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = 0$ (das Volumen $\text{Vol}(\cdot)$ geht in dritter Potenz mit ℓ gegen null, die Fläche $\text{Fl}(\cdot)$ nur in zweiter Potenz)), folgt aus dem Impulsgesetz, dass auch

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\int_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) \, ds}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = \mathbf{0}$$

gilt. Gemäß dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existieren Punkte mit Ortsvektoren \mathbf{z} , \mathbf{z}_i , $i = 1, \dots, 3$, auf den Tetraederflächen, so dass

$$\frac{\int_{\partial\mathcal{W}} \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) \, ds}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = \frac{1}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} \left(\mathbf{t}(\mathbf{z}, t, \mathbf{n}) \text{Fl}(\Sigma) + \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{z}_i, t, -\mathbf{n}_i) \text{Fl}(\Sigma_i) \right),$$

wobei $-\mathbf{n}_i$ der nach außen gerichtete Normalenvektor von Σ_i in \mathbf{z}_i ist. Auf der rechten Seite der Gleichung ergibt sich

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Fl}(\Sigma)}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = \alpha \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\text{Fl}(\Sigma_i)}{\text{Fl}(\partial\mathcal{W})} = n_i \alpha,$$

wobei $\mathbf{n} = n_i \mathbf{e}_i$ der Grenzwert des Normalenvektors ist, da Σ_i die Projektionen von Σ längs der Basisvektoren sind. Damit liefert der Grenzübergang $\ell \rightarrow 0$:

$$\mathbf{0} = \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n})\alpha + \sum_{i=1}^3 \alpha n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, -\mathbf{e}_i),$$

also

$$\mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{n}) = - \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, -\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{e}_i).$$

Setzt man nun $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t) := \sum_{i=1}^3 \mathbf{t}(\mathbf{r}, t, \mathbf{e}_i) \otimes \mathbf{e}_i$, so leistet $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}, t)$ das Gewünschte. ■

Korollar 8.2 (Gegenwirkungssatz für Spannungen)

Für die in einem Punkt einer Schnittfläche eines Körpers wirkenden Schnittspannungen $\mathbf{t}^{(1)}$ und $\mathbf{t}^{(2)}$ gilt die Beziehung

$$\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)} \tag{8.1}$$

Beweis. Da der Spannungstensor nur von dem gewählten Punkt auf der Schnittfläche abhängt, haben beide Schnittspannungen den gleichen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$. Die Normalenvektoren haben den gleichen Betrag, aber entgegengesetzte Richtung: $\mathbf{n}^{(1)} = -\mathbf{n}^{(2)}$. Damit gilt für die Schnittspannungen:

$$\mathbf{t}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(1)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{n}^{(2)}) = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}^{(2)} = -\mathbf{t}^{(2)}. \quad \blacksquare$$

Anmerkung. Es lässt sich zeigen, dass der Gegenwirkungssatz auch an Schnittflächen materiell offener Bereiche gilt.

Der Gegenwirkungssatz ist in der Literatur unter dem Namen „Drittes Newtonsches Gesetz“ bekannt.

Korollar 8.3

Für die Schnittkräfte

$$\mathbf{F}^{(1)} := \int_{\hat{S}} \mathbf{t}^{(1)} \, dS \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^{(2)} := \int_{\hat{S}} \mathbf{t}^{(2)} \, dS$$

gilt die Beziehung

$$\mathbf{F}^{(1)} = -\mathbf{F}^{(2)} \quad (\text{Gegenwirkungssatz für Schnittkräfte}) \tag{8.2}$$

und für die Schnittmomente

$$\mathbf{M}^{Q,1} := \int_{\hat{S}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{t}^{(1)} \, dS \quad \text{und} \quad \mathbf{M}^{Q,2} := \int_{\hat{S}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_Q) \times \mathbf{t}^{(2)} \, dS$$

die Beziehung

$$\mathbf{M}^{Q,1} = -\mathbf{M}^{Q,2} \quad (\text{Gegenwirkungssatz für Schnittmomente}). \quad (8.3)$$

Gleichungen (8.1), (8.2) und (8.3) werden kurz als „actio=reactio“ bezeichnet.

8.2 Sätze für den Massenmittelpunkt

Satz 8.4 (Massenmittelpunktsatz für den Impuls)

Für jeden Körper gilt die Beziehung

$$m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}, \quad (8.4)$$

wonach das Produkt der Masse m des Körpers und der Beschleunigung $\ddot{\mathbf{r}}_C$ des Massenmittelpunkts C gleich der resultierenden Kraft \mathbf{F} ist.

Beweis. Für einen Körper gilt $m = \text{const.}$ und für den Impuls dieses Körpers gilt gemäß (5.7):

$$\mathbf{I} = m\mathbf{v}_C = m\dot{\mathbf{r}}_C.$$

Dies, nach der Zeit differenziert, liefert

$$\dot{\mathbf{I}} = (m\dot{\mathbf{r}}_C)' = m\ddot{\mathbf{r}}_C.$$

\uparrow
 $m = \text{const.}$

und damit folgt aus dem Impulsgesetz $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ der Massenmittelpunktsatz für den Impuls(8.4). ■

Anmerkung. Der Massenmittelpunktsatz $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ gibt **nur** Auskunft über die Beschleunigung des Massenmittelpunkts C des Körpers. Da C i. Allg. kein körperfester Punkt ist, stellt die Funktion $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_C(t)$ i. Allg. **keine materielle Bewegung** dar.

Aus dem Massenmittelpunktsatz $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ folgt als Spezialfall der

Satz 8.5 (Gleichförmige Bewegung kräftefreier Körper)

Der Massenmittelpunkt C eines kräftefreien Körpers bewegt sich gleichförmig, d.h. geradlinig und mit konstanter Geschwindigkeit.

Beweis. Wegen der Kräftefreiheit gilt $\mathbf{F} = \mathbf{0}$. Damit folgt aus $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$, Gleichung (8.4), die Beziehung

$$\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{0},$$

und daraus nach Integration

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_C = \mathbf{A}t + \mathbf{B} \quad (8.5)$$

mit den Integrationskonstanten \mathbf{A} , \mathbf{B} . Nach Einsetzen der Anfangsbedingungen

$$\dot{\mathbf{r}}_C(t=0) =: \mathbf{v}_0 \text{ und } \mathbf{r}_C(t=0) = \mathbf{r}_0$$

folgt dann $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0$ und $\mathbf{B} = \mathbf{r}_0$ und damit aus (8.5):

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{v}_0 \text{ und } \mathbf{r}_C = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0. \quad (8.6)$$

Dies bedeutet, dass sich der Massenmittelpunkt C des kräftefreien Körpers auf der Geraden $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0 t$ (t Parameter) mit der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 bewegt. ■

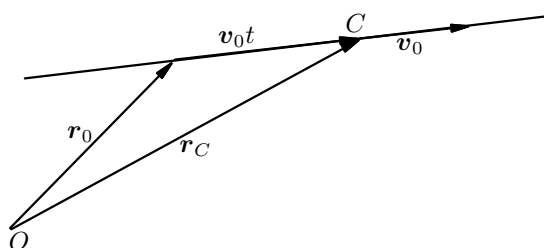


Abb. 8.2: Gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunkts C .

Anmerkung. Die Aussage (8.6) über eine gleichförmige Bewegung des Massenmittelpunkts C eines kräftefreien Körpers stimmt überein mit dem Inhalt des Galileischen Trägheitsprinzips, Axiom 2.2, wonach eine gleichförmige Bewegung eines kräftefreien Massenpunkts axiomatisch postuliert wird. Damit wird nachträglich bestätigt, dass die Definition des Impulses $\mathbf{I} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm$, Gl. (5.6), widerspruchsfrei zum Galileischen Trägheitsprinzip gewählt wurde.

Das Drallgesetz $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ wurde axiomatisch für einen raumfesten Punkt O postuliert. Es behält seine Form beim Übergang von O zu dem (i. Allg. bewegten) Massenmittelpunkt C bei.

Satz 8.6 (Massenmittelpunktsatz für den Drall)

Bezogen auf den Massenmittelpunkt C gilt:

$$\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C \quad (8.7)$$

mit

$$\mathbf{D}^C = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} \times \dot{\mathbf{c}} \, dm$$

und

$$\mathbf{M}^C = \int_S \mathbf{c} \times \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \mathbf{c} \times \mathbf{f}_V \, dV.$$

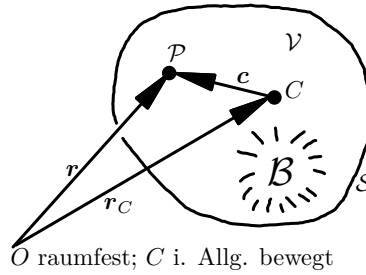


Abb. 8.3: Berechnung des Dralls bzgl. des Massenmittelpunkts C .

Beweis. Zwischen \mathbf{D}^O und \mathbf{D}^C besteht die Beziehung

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C m + \mathbf{D}^C.$$

Dies nach der Zeit differenziert, ergibt

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \underbrace{\dot{\mathbf{r}}_C \times \dot{\mathbf{r}}_C}_{=0} m + \mathbf{r}_C \times \ddot{\mathbf{r}}_C m + \dot{\mathbf{D}}^C. \quad (8.8)$$

Wir formen \mathbf{M}^O , Gl. (6.5), mit Hilfe von $\mathbf{r} = \mathbf{r}_C + \mathbf{c}$ wie folgt um:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^O &= \int_S (\mathbf{r}_c + \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_S dS + \int_V (\mathbf{r}_c + \mathbf{c}) \times \mathbf{f}_V dV \\ &= \mathbf{r}_c \times \left(\int_S \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{f}_V dV \right) + \underbrace{\int_S \mathbf{c} \times \mathbf{f}_S dS + \int_V \mathbf{c} \times \mathbf{f}_V dV}_{=: \mathbf{M}^C} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: \mathbf{F}} \end{aligned}$$

Dies mit (8.8) in das Drallgesetz $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O$ eingesetzt, ergibt

$$\mathbf{r}_C \times \underbrace{(\ddot{\mathbf{r}}_C m - \mathbf{F})}_{=0, (8.4)} + \dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C,$$

also tatsächlich $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$. ■

Anmerkung. Sowohl das Impuls- und Drallgesetz als auch die beiden auf den Massenmittelpunkt bezogenen Sätze lassen sich so formulieren, dass sie rein formal den aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen (vgl. Abschnitt 8.6) entsprechen. Bezogen auf den Massenmittelpunkt ergibt sich bspw.

$$\begin{aligned} \mathbf{F} - m\ddot{\mathbf{r}}_C &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^C - \dot{\mathbf{D}}^C &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichungen werden dann so ermittelt, dass mit einem Freischnitt analog zur Statik begonnen wird, in den dann zusätzlich als sog. „Trägheitsreaktionen“ die Trägheitsterme in negativer Beschleunigungsrichtung eingezeichnet werden. Dieses Vorgehen bei der Auswertung des Impuls- und Drallgesetzes bzw. der Sätze für den Massenmittelpunkt wird in der Literatur häufig als „Prinzip von d’Alembert“ bezeichnet. Wir werden den Verweis auf d’Alembert hier nur für den Freischnitt übernehmen und von einem Freischnitt gemäß (oder im Sinne von) d’Alembert sprechen.

Beispiel 8.7 (Feder-Masse-Dämpfer-System)

Ein Beispiel möge die unterschiedlichen Vorgehensweisen erläutern. Betrachtet wird das in Abb. 8.4 skizzierte System bestehend aus einem starren Körper der Masse m , der reibungsfrei auf einer Unterlage gleitet, einem geschwindigkeitsproportionalen Dämpfer (Dämpferkonstante k) und einer linear-elastischen Feder (Federkonstante c), die für $x = 0$ entspannt sei. Die Variable x misst dabei die Auslenkung des Massenmittelpunkts, in dem zusätzlich eine äußere Kraft $F(t)$ angreift.

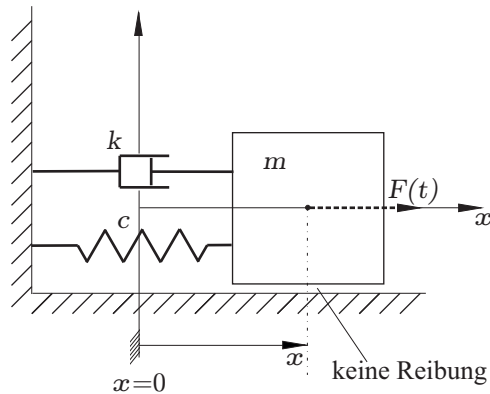


Abb. 8.4: Feder-Masse-Dämpfer-System.

Abb. 8.5 a) zeigt den Freischnitt im üblichen Sinne und Abb. 8.5 b) den Freischnitt gemäß d'Alembert, also mit Darstellung der Trägheitsterme.

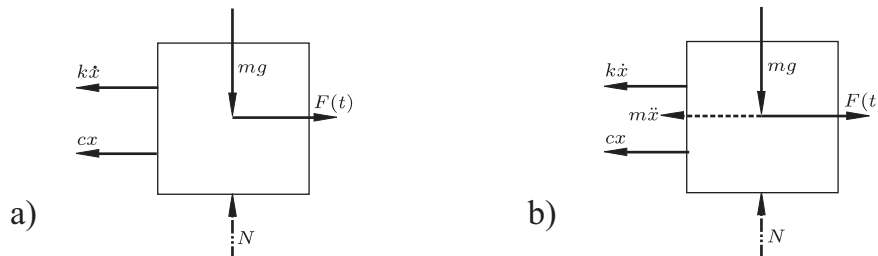


Abb. 8.5: Freischnitt (a) und Freischnitt gemäß d'Alembert (b) des Feder-Masse-Dämpfer-Systems.

Die Auswertung des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ liefert

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) - k\dot{x} - cx \\ N - mg \end{bmatrix}.$$

Wird hingegen der Freischnitt gemäß d'Alembert, Abb. 8.5 b), wie in der Statik ausgewertet, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \rightarrow: & -m\ddot{x} - k\dot{x} - cx + F(t) = 0, \\ \uparrow: & N - mg = 0. \end{aligned}$$

Offenbar erhält man in beiden Fällen die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t)$$

und die Zwangsbedingung $N = mg$. \diamond

8.3 Impuls- und Drallgesetz im bewegten Bezugssystem

Wir können in die Definitionsgleichungen für Impuls und Drall die Darstellung der Bewegung und der Geschwindigkeit im bewegten Bezugssystem einsetzen. Damit lassen sich dann nicht nur das Impuls- und Drallgesetz im bewegten Bezugssystem formulieren, sondern auch die Massenmittelpunktsätze aus Abschnitt 8.2.

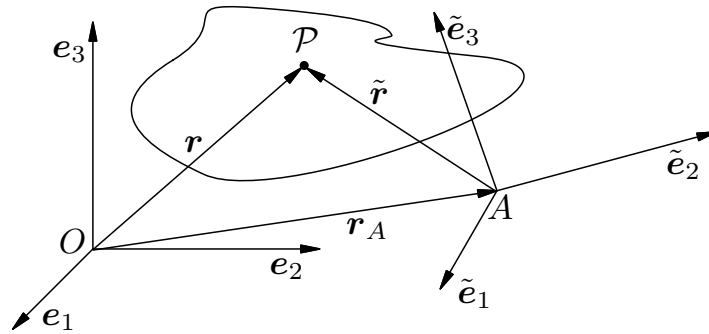


Abb. 8.6: Ortsvektoren eines materiellen Punkts im raumfesten und im bewegten Bezugssystem.

Wird Gl. (2.24) für die Relativgeschwindigkeit in die Definition (5.6) des Impulses eingesetzt, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}(t) + \dot{x}_i(t) \tilde{\mathbf{e}}_i(t)) \, dm \\ &= \dot{\mathbf{r}}_A(t)m + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}^A + \mathbf{I}_{\text{rel}}, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{H}^A das statische Moment bezogen auf den Ursprung des bewegten Bezugssystems ist und der Impuls im Relativsystem durch

$$\mathbf{I}_{\text{rel}} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_{\text{rel}} \, dm$$

gegeben ist. Bei der Ableitung des Impulses nach der Zeit ist zu beachten, dass \mathbf{H}^A und \mathbf{I}_{rel} Vektoren im bewegten Bezugssystem sind und die zeitliche Änderung der Basisvektoren daher bei der Ableitung zu berücksichtigen ist. Da es zweckmäßig ist, die entstehenden Ausdrücke mit Hilfe des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls (8.4) zu vereinfachen, bietet es sich an, als Ausgangspunkt direkt den Massenmittelpunktsatz für den Impuls (8.4) zu verwenden und dort die Beschleunigung gem. Gl. (2.25) für den Massenmittelpunkt im bewegten Bezugssystem einzusetzen.

Es ergibt sich dann der Massenmittelpunktsatz für den Impuls im bewegten Bezugssystem:

Satz 8.8 (Massenmittelpunktsatz für den Impuls, bew. Bezugss.)

Für ein bewegtes Bezugssystem lautet der Massenmittelpunktsatz für den Impuls

$$m (\ddot{\mathbf{r}}_A(t) + \boldsymbol{\alpha} \times \tilde{\mathbf{r}}_C(t) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C(t)) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{C,\text{rel}} + \mathbf{a}_{C,\text{rel}}) = \mathbf{F}.$$

Darin bezeichnen $\tilde{\mathbf{r}}_C$, $\mathbf{v}_{C,\text{rel}}$, $\mathbf{a}_{C,\text{rel}}$ den Ortsvektor sowie die Vektoren der Relativgeschwindigkeit und der Relativbeschleunigung des Massenmittelpunkts C im bewegten Bezugssystem.

In einem bewegten Bezugssystem treten daher Trägheitsterme bedingt durch die Führungsbeschleunigung, die Coriolisbeschleunigung und die Relativbeschleunigung auf. Verschwinden die Führungsbeschleunigung und die Coriolisbeschleunigung, so ist der Massenmittelpunktsatz im bewegten Bezugssystem mit dem im raumfesten Bezugssystem formal identisch. Bewegt sich das Bezugssystem so, dass die Drehgeschwindigkeit (und damit auch die Drehbeschleunigung) des bewegten Bezugssystems verschwinden und der Bezugspunkt gegenüber dem Inertialsystem nicht beschleunigt wird, so verschwinden auch die durch die Führungsbeschleunigung und die Coriolisbeschleunigung hervorgerufenen Trägheitsterme. Gegenüber dem raumfesten Bezugssystem kann daher im bewegten Bezugssystem

1. der Bezugspunkt zu einem festen Zeitpunkt um einen Vektor verschoben sein,
2. der Bezugspunkt sich dann mit konstanter Geschwindigkeit bewegen,
3. das System der Basisvektoren des bewegten Bezugssystems um eine zeitlich konstante Drehung gegenüber dem raumfesten Bezugssystem verdreht sein,

ohne dass im Massenmittelpunktsatz für den Impuls zusätzliche Trägheitsterme auftreten. Beziehen wir ferner noch die Zeitmessung mit ein, so kann zwischen beiden Bezugssystemen ein Zeitversatz τ existieren, ohne dass zusätzliche Trägheitsterme hervorgerufen werden. Zwischen dem Ortsvektor $\mathbf{r}(t)$ des raumfesten und dem Ortsvektor $\tilde{\mathbf{r}}(t - \tau)$ des bewegten Bezugssystems vermittelt dann die Transformation

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{T} (\mathbf{v}_A \cdot (t - \tau) + \mathbf{r}_A + \tilde{\mathbf{r}}(t - \tau)),$$

wobei die Verdrehung durch die Drehmatrix \mathbf{T} repräsentiert wird. Diese Transformation hat zehn Parameter (drei Komponenten der Verschiebung \mathbf{r}_A , drei Verdrehwinkel, z.B. Euler-Winkel in der Drehmatrix \mathbf{T} , drei Komponenten der konstanten Geschwindigkeit \mathbf{v}_A sowie den Zeitversatz τ). Man bezeichnet sie als **Galilei-Transformation**. Unterscheiden sich zwei Bezugssysteme und Bezugszeiten nur durch eine Galilei-Transformation, dann sind sie inertial (also bzgl. der Trägheit) äquivalent. Der Massenmittelpunktsatz für den Impuls gilt somit unverändert für die im jeweiligen Bezugssystem gemessene Beschleunigung des Massenmittelpunkts. Man sagt dazu auch, dass er **invariant** unter

Galilei-Transformationen ist.

Beispiel 8.9

1. Bewegung eines Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel

Wir wollen die Bewegungsgleichung für den Massenpunkt bestimmen, der sich im Schwerfeld entlang einer pendelnden Koppel bewegt. Die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ der Pendelbewegung sei konstant und vorgegeben.

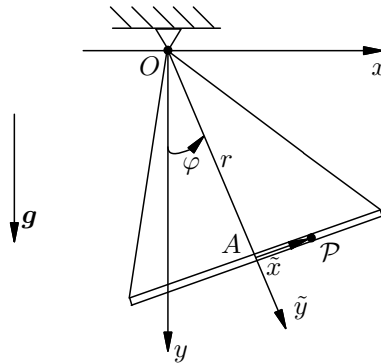


Abb. 8.7: Bewegung eines Massenpunkts entlang einer pendelnden Koppel im Schwerfeld.

Hierzu verwenden wir wieder einen Freischnitt gemäß d'Alembert, in den alle Trägheitsreaktionen eingezeichnet werden, vgl. Abb 8.8. Diese ergeben sich (vgl. Beispiel 2.20) unter Beachtung von $\dot{\varphi} = 0$ aus der Führungsbeschleunigung $\mathbf{a}_F = -\dot{\varphi}^2(\tilde{x}\tilde{\mathbf{e}}_x + r\tilde{\mathbf{e}}_y)$, der Coriolisbeschleunigung $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\dot{\tilde{x}}\dot{\varphi}\tilde{\mathbf{e}}_y$ und der Relativbeschleunigung $\mathbf{a}_{\text{rel}} = \ddot{\tilde{x}}\tilde{\mathbf{e}}_x$. Die Richtung der Führungsbeschleunigung ergibt sich nach Vektoraddition als die Richtung der Verbindungslinie von \mathcal{P} zum Lagerpunkt O .

Die Auswertung des Freischnitts erfolgt zweckmäßigerweise im bewegten A, $\tilde{\mathbf{e}}_x, \tilde{\mathbf{e}}_y$ -Bezugssystem, da sich dann in \tilde{x} -Richtung die Bewegungsgleichung und in \tilde{y} -Richtung die Zwangsbedingung ergibt. Gemäß d'Alembert erhalten wir:

$$\text{in } \tilde{x}\text{-Richtung: } -m\ddot{\tilde{x}} + m\dot{\varphi}^2\tilde{x} - mg \sin \varphi = 0$$

$$\text{in } \tilde{y}\text{-Richtung: } -N + mg \cos \varphi + mr\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{\tilde{x}} = 0$$

Die Bewegungsgleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Normalkraft N ist variabel und vom Bewegungszustand abhängig.

2. Wirkung der Coriolisbeschleunigung

Ein erdfestes Bezugssystem ist ein bewegtes Bezugssystem. In ihm erfährt jeder Körper, der sich nicht exakt in Richtung der Erdachse bewegt, eine Coriolisbeschleunigung. Wir betrachten die Wirkung der Coriolisbeschleunigung auf einen Massenpunkt im Rhein bei Karlsruhe. Wir nehmen an,

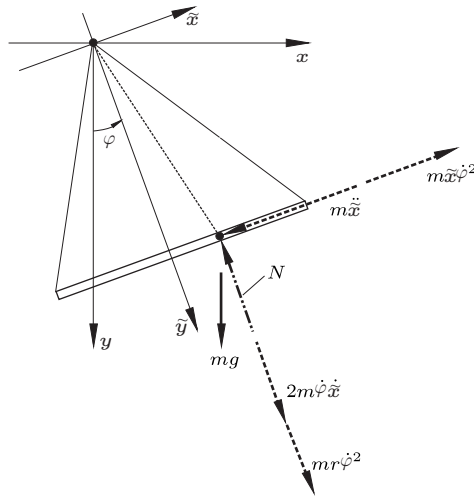


Abb. 8.8: Freischnitt des Massenpunkts nach d'Alembert.

dass der Rhein genau in Richtung Norden fließt und rechnen vereinfachend mit einer konstanten Fließgeschwindigkeit v . Das bewegte Bezugssystem ist das erdfeste A, $\tilde{e}_x, \tilde{e}_y, \tilde{e}_z$ -Bezugssystem, wobei die \tilde{e}_y -Richtung zum Längengreis von Karlsruhe zeigt und die \tilde{e}_z -Achse nach Norden ausgerichtet ist, vgl. Abb. 8.9. Die Coriolisbeschleunigung ist $\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{v}}_{C,\text{rel}}$, mit $\boldsymbol{\omega} = \omega \tilde{e}_z$, der Vektor der Relativgeschwindigkeit verläuft tangential an den Längengreis (Fließrichtung Norden) und ist $\tilde{\mathbf{v}}_{C,\text{rel}} = -v \sin \varphi \tilde{e}_y + v \cos \varphi \tilde{e}_z$. Die Auswertung des Vektorprodukts liefert dann

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = -2\omega v \sin \varphi (\tilde{e}_z \times \tilde{e}_y) = 2\omega v \sin \varphi \tilde{e}_x$$

Die Coriolisbeschleunigung verläuft daher tangential zum Breitenkreis in Richtung Westen, ihre Trägheitswirkung im Sinne d'Alemberts weist nach Osten. Sie bewirkt bspw. einen größeren Sedimentabbau am Ostufer im Vergleich zum Westufer des Rheins.

◇

Wir wenden uns nun dem Drall zu. Für den Drall bezüglich eines raumfesten Punkts O können wir unter Verwendung des Ortsvektors $\tilde{\mathbf{r}}$ und des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v}_{rel} der Relativbewegung des materiellen Punkts \mathcal{P} im mit A mitbewegten Bezugssystem

$$\mathbf{D}^O = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, d m = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r}_A + \tilde{\mathbf{r}}) \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) \, d m$$

schreiben. Die Vektoren $\mathbf{r}_A, \mathbf{v}_A$ und $\boldsymbol{\omega}$ bezeichnen hierbei den Ortsvektor und den Geschwindigkeitsvektor von A sowie die Drehgeschwindigkeit des bewegten Bezugssystems bezogen auf das raumfeste Bezugssystem. Wir multiplizieren im Integranden aus und berechnen sämtliche Terme unter Einführung des Massen-

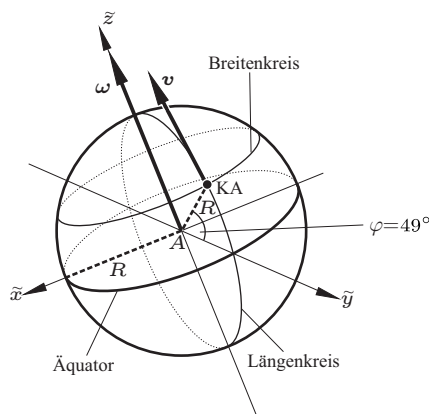


Abb. 8.9: Erdfestes bewegtes Bezugssystem.

mittelpunkts:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) dm &= \mathbf{r}_A \times \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) dm \\ &= \mathbf{r}_A \times (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}}_C + \mathbf{v}_{C,\text{rel}})m = \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_C m \\ \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} \times \mathbf{v}_A dm &= \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} dm \times \mathbf{v}_A = m \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{v}_A \\ \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) dm &=: \mathbf{D}^A \end{aligned}$$

Dabei ist \mathbf{v}_C die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts im raumfesten Bezugssystem und \mathbf{D}^A der Drall bezüglich des Bezugspunkts des bewegten Bezugssystems. Insgesamt erhalten wir somit

$$\mathbf{D}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{v}_C m + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{v}_A m + \mathbf{D}^A.$$

Für das Drallgesetz wird die zeitliche Ableitung dieses Ausdrucks benötigt. Es ergibt sich zunächst

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_C m + \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_C m + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \times \mathbf{v}_A m + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A.$$

Wegen $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C$ kann im dritten Term $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C$ durch $\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A$ ersetzt werden:

$$\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_C \times \mathbf{v}_A m = (\mathbf{v}_C - \mathbf{v}_A) \times \mathbf{v}_A m = (\mathbf{v}_C \times \mathbf{v}_A - \mathbf{0})m = -\mathbf{v}_A \times \mathbf{v}_C m.$$

Der dritte Term hebt sich also mit dem ersten heraus, und es verbleibt

$$\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_C m + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A.$$

Drallgesetz, Momentenversetzung und Massenmittelpunktsatz für den Impuls liefern nun

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_A \times \mathbf{a}_C m + \tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A &= \dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{M}^O \\ &= \mathbf{M}^A + \mathbf{r}_A \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{M}^A + \mathbf{r}_A \times m \mathbf{a}_C. \end{aligned}$$

Hier hebt sich der erste Term auf der linken Seite mit dem letzten Term auf der rechten Seite auf. Es verbleibt daher

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A.$$

Wir erhalten damit den Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt:

Satz 8.10 (Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt)

Bezüglich eines bewegten Punkts A gilt

$$\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A.$$

Darin ist $\tilde{\mathbf{r}}_C$ der Ortsvektor von A zum Massenmittelpunkt C und \mathbf{a}_A die Absolutbeschleunigung von A .

Korollar 8.11

Gilt für einen bewegten Punkt A

1. $A = C$ (*A fällt mit dem Massenmittelpunkt zusammen*),
2. $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ (*Der Bezugspunkt bewegt sich unbeschleunigt*) oder
3. $\tilde{\mathbf{r}}_C \parallel \mathbf{a}_A$,

dann ist $\dot{\mathbf{D}}^A = \mathbf{M}^A$.

Beweis. In allen drei Fällen verschwindet das Vektorprodukt $\tilde{\mathbf{r}}_C \times \mathbf{a}_A$. ■

Der erste Fall des Korollars ist mit der Aussage des Massenmittelpunktsatzes für den Drall identisch. Der zweite Fall des Korollars besagt, dass auch das Drallgesetz invariant in unbeschleunigten Bezugssystemen (also unter Galilei-Transformationen) ist und daher in Einklang mit dem Galileischen Trägheitsprinzip steht.

8.4 Räumliche Dynamik des starren Körpers

Beim starren Körper bleibt der Massenmittelpunktsatz für den Impuls $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ unverändert; im Unterschied zu beliebigen Körpern ist jedoch der Massenmittelpunkt C des starren Körpers ein körperfester Punkt.

Im Gegensatz zum Massenmittelpunktsatz für den Impuls $m\ddot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{F}$ lässt sich der Massenmittelpunktsatz für den Drall $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$ und insbesondere der darin auftretende Drall \mathbf{D}^C im Fall des starren Körpers umformen und wesentlich vereinfachen.

8.4.1 Drall und Massenträgheitstensor des starren Körpers

Wir betrachten einen starren Körper \mathcal{B} und wählen einen körperfesten Punkt A sowie eine an A gebundene orthonormierte körperfeste Vektorbasis $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$,

die dann das körperfeste Bezugssystem A , \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , \tilde{e}_3 bildet. Der Vektor \mathbf{R} ist der relative Ortsvektor des zugehörigen materiellen Punkts \mathcal{P} bezüglich A :

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_A. \quad (8.9)$$

Stellt man \mathbf{R} in der körperfesten Vektorbasis \tilde{e}_1 , \tilde{e}_2 , \tilde{e}_3 dar, so folgt

$$\mathbf{R} = X_1 \tilde{e}_1 + X_2 \tilde{e}_2 + X_3 \tilde{e}_3 \equiv X_i \tilde{e}_i$$

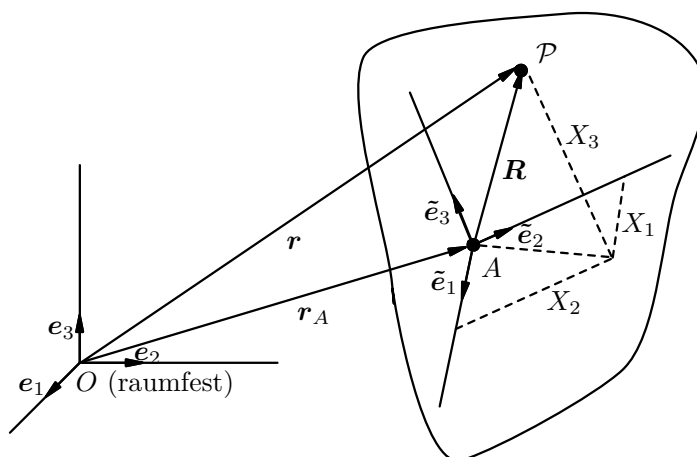


Abb. 8.10: Materielle Koordinaten des starren Körpers.

Die Koordinaten X_1 , X_2 , X_3 heißen **materielle** Koordinaten, weil sie den zugehörigen materiellen Punkt \mathcal{P} markieren. Im Gegensatz dazu heißen die Koordinaten x , y , z des Ortsvektors

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \equiv x_i \mathbf{e}_i$$

der Momentanlage von \mathcal{P} **räumliche** Koordinaten.

Für die materiellen Koordinaten X_1 , X_2 , X_3 gilt:

$$X_i = \text{const. bzgl. } t \quad (8.10)$$

und für den Ortsvektor \mathbf{R} gilt:

$$\|\mathbf{R}\| = \text{const. bzgl. } t.$$

Deshalb erhält man für die Ableitung $\dot{\mathbf{R}}$ mit Hilfe der Euler-Poissonschen Differentiationsformel

$$\frac{d\mathbf{b}(\lambda)}{d\lambda} = \boldsymbol{\omega}(\lambda) \times \mathbf{b}(\lambda) \text{ für } \|\mathbf{b}\| = \text{const.}$$

nach Einsetzen von $\mathbf{b} = \mathbf{R}$ und $\lambda = t$ die Beziehung

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}. \quad (8.11)$$

Damit lässt sich der auf den körperfesten Punkt A bezogene Drall

$$\mathbf{D}^A = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_A) \times (\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{r}}_A) \, dm \stackrel{(8.9)}{=} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \, dm \stackrel{(8.11)}{=} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, dm$$

wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^A &= \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, dm = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{\boldsymbol{\omega}}_{=\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{E}} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \underbrace{\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \otimes \mathbf{R})} \, dm \\ &= \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, dm = \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, dm}_{=:\boldsymbol{\Theta}^A}. \end{aligned}$$

Hierbei wurden der durch $\mathbf{E}\mathbf{v} = \mathbf{v}$ definierte Einsteinstensor und das durch $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u}$ erklärte dyadische Produkt ($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sind beliebige Vektoren) verwendet. Wir erhalten dann

$$\mathbf{D}^A = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A, \quad (8.12)$$

also eine Produktdarstellung von \mathbf{D}^A mit dem durch

$$\boldsymbol{\Theta}^A := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, dm$$

definierten, symmetrischen Tensor 2. Stufe. Der Tensor $\boldsymbol{\Theta}^A$ verdeutlicht, dass \mathbf{D}^A **linear** vom Drehgeschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\omega}$ abhängt. Anders als beim Impuls, wo ja ebenfalls ein linearer Zusammenhang zur Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts besteht, wird der lineare Zusammenhang nicht durch einen Skalar, sondern durch einen Tensor 2. Stufe vermittelt. Während daher der Impuls und die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts stets die gleiche Richtung haben, ist dies beim Drall \mathbf{D}^A und der Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ nicht der Fall.

Definition 8.12 (Massenträgheitstensor)

Sei \mathcal{B} ein starrer Körper und A ein körperfester Punkt. Der Tensor 2. Stufe

$$\boldsymbol{\Theta}^A := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) - \mathbf{R} \otimes \mathbf{R}) \, dm \quad (8.13)$$

heißt **Massenträgheitstensor** von \mathcal{B} bezüglich A .

Setzen wir die Komponentendarstellungen

$$\mathbf{E} = \delta_{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = X_i \tilde{\mathbf{e}}_i = X_j \tilde{\mathbf{e}}_j$$

mit

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

ein, dann erhalten wir

$$\boldsymbol{\Theta}^A = \int_{\mathcal{B}} ((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij} \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j - X_i X_j \tilde{\mathbf{e}}_i \otimes \tilde{\mathbf{e}}_j) \, dm$$

also

$$\Theta^A = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij} - X_i X_j)}_{=\tilde{\theta}_{ij}^A} \, d m \, \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j,$$

d.h. die Komponentendarstellung

$$\Theta^A = \tilde{\theta}_{ij}^A \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$$

des Massenträgheitstensors Θ^A , bezogen auf den körperfesten Punkt A in der körperfesten Vektorbasis \tilde{e}_i mit den durch

$$\tilde{\theta}_{ij}^A = \int_{\mathcal{B}} ((X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)\delta_{ij} - X_i X_j) \, d m$$

definierten körperfesten Koordinaten $\tilde{\theta}_{ij}^A$.

Definition 8.13 (Massenträgheitsmomente)

Die Koordinaten $\tilde{\theta}_{ij}^A$ des Massenträgheitstensors Θ^A heißen **Massenträgheitsmomente**. Für $i = j$ heißen sie **axiale Massenträgheitsmomente**, für $i \neq j$ **Deviationsmomente**.

Wegen (8.10) gilt

$$\tilde{\theta}_{ij}^A = \text{const. bzgl. } t. \quad (8.14)$$

Die Koordinaten $\tilde{\theta}_{ij}^A$ lassen sich in der Matrixform

$$[\tilde{\theta}_{ij}^A] = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2) \, d m & - \int_{\mathcal{B}} X_1 X_2 \, d m & - \int_{\mathcal{B}} X_1 X_3 \, d m \\ - \int_{\mathcal{B}} X_2 X_1 \, d m & \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2) \, d m & - \int_{\mathcal{B}} X_2 X_3 \, d m \\ - \int_{\mathcal{B}} X_3 X_1 \, d m & - \int_{\mathcal{B}} X_3 X_2 \, d m & \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_2^2) \, d m \end{bmatrix}$$

übersichtlich darstellen. Diese Matrix ist symmetrisch, weil Θ^A symmetrisch ist. Deshalb hat Θ^A drei Hauptrichtungsvektoren \tilde{e}_{H_i} , für die die Komponentendarstellung

$$\Theta^A = \tilde{\theta}_{H_i}^A \tilde{e}_{H_i} \otimes \tilde{e}_{H_i}$$

von Θ^A gilt⁸. Die Größen $\tilde{\theta}_{H_i}^A$ heißen **Hauptträgheitsmomente**. Dies sind diejenigen axialen Massenträgheitsmomente, für die die Deviationsmomente verschwinden.

Analog zu (8.13) lässt sich der Massenträgheitstensor Θ^C bezüglich des Massenmittelpunkts C in der Form

$$\Theta^C := \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) \, d m \quad (8.15)$$

⁸Um die Notation übersichtlich zu halten, verwenden wir folgende Erweiterung der Einsteinschen Summationskonvention: Tritt in einem Produkt ein Index dreifach auf und wird ein Index in Klammern gesetzt (=nicht mitgezählt), ist ebenfalls zu summieren.

darstellen, wenn man in (8.13) \mathbf{R} durch \mathbf{c} rein formal ersetzt. Analog zu (8.12) gilt dann

$$D^C = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C.$$

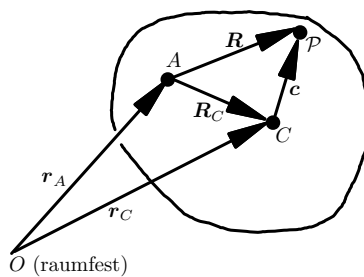


Abb. 8.11: Ortsvektoren zur Berechnung der Massenträgheitstensoren $\boldsymbol{\Theta}^A$ und $\boldsymbol{\Theta}^C$.

Beispiel 8.14

Wir wollen für einige Körper mit homogener Materieverteilung das Massenträgheitsmoment bei Drehung um eine Hauptachse berechnen. Für den Fall, dass $\tilde{\mathbf{e}}_{H_3}$ diese Hauptachse ist, müssen wir das Integral $\int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_2^2) dm = \int_{\mathcal{B}} R^2 dm$ bestimmen.

1. Vollzylinder mit Radius r , Dicke D , Masse m

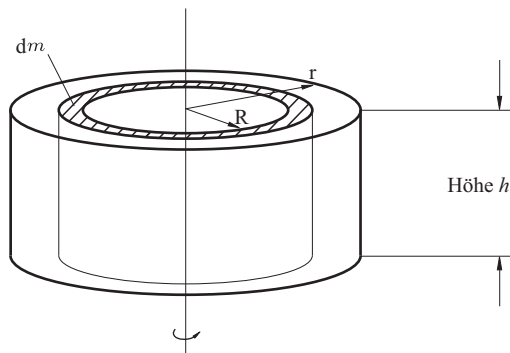


Abb. 8.12: Rotierender Vollzylinder.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_{H_3}^O &= \int_{\mathcal{B}} R^2 dm = \int_0^r R^2 2\pi R h \rho \cdot dR = 2\pi \rho h \int_0^r R^3 dR = \frac{\pi \rho h}{2} r^4 \\ &= \underbrace{\pi r^2 \rho h}_{=m} \frac{r^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \end{aligned}$$

2. Stab, der um ein Stabende rotiert, Länge ℓ , Masse m

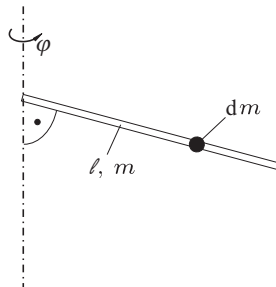


Abb. 8.13: Rotierender Stab.

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{H_3}^O &= \int_{\mathcal{B}} R^2 dm = \int_0^\ell R^2 \frac{m}{\ell} dR = \frac{m}{\ell} \int_0^\ell R^2 dR = \frac{m}{\ell} \frac{\ell^3}{3} \\ &= m \frac{\ell^2}{3}\end{aligned}$$

Verläuft die Drehachse durch die Stabmitte, so ist $\tilde{\theta}_{H_3}^O = m \frac{\ell^2}{12}$.

3. Rotierende Kugel mit Radius r und Masse m

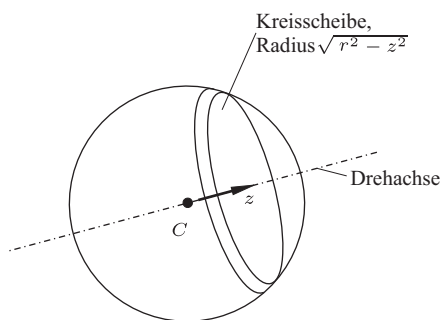


Abb. 8.14: Rotierende Kugel.

Wir zerlegen die Kugel in rotierende Vollzylinder mit Höhe dz und Radius $\sqrt{r^2 - z^2}$ und integrieren die Massenträgheitsmomente

$$dm \frac{r^2}{2} = \underbrace{\rho \pi (r^2 - z^2) dz}_{=dm} \frac{(r^2 - z^2)}{2}$$

dieser Vollzylinder:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{H_3}^C &= \int_{-r}^r \pi \rho (r^2 - z^2) \frac{(r^2 - z^2)}{2} dz = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-r}^r (r^4 - 2r^2 z^2 + z^4) dz \\ &= \frac{\pi \rho}{2} \left(r^4 z - \frac{2}{3} r^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-r}^r = \frac{8}{15} \pi \rho r^5 = \underbrace{\frac{4}{3} \pi \rho r^3}_{=m} \frac{2}{5} r^2 \\ &= \frac{2}{5} m r^2\end{aligned}$$

◇

8.4.2 Änderung des Bezugspunkts: Satz von Steiner

Bei zahlreichen dynamischen Problemen des starren Körpers, so z.B. in der Maschinendynamik beim Auswuchten starrer Rotoren, ist es zweckmäßig, die Beziehung zwischen dem Massenträgheitstensor Θ^A bezogen auf einen beliebigen körperfesten Punkt A und dem Massenträgheitstensor Θ^C bezogen auf den Massenmittelpunkt herzustellen.

Satz 8.15 (Satz von Steiner)

Zwischen dem Massenträgheitstensor Θ^A bezogen auf einen beliebigen körperfesten Punkt A und dem Massenträgheitstensor Θ^C bezogen auf den Massenmittelpunkt gilt

$$\Theta^A = \Theta^C + (\mathbf{E}(\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{R}_C) - \mathbf{R}_C \otimes \mathbf{R}_C) m,$$

wobei \mathbf{R}_C der Ortsvektor von A nach C ist.

Beweis. Wir entnehmen der obigen Abbildung die Beziehung

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_C + \mathbf{c}$$

und setzen sie in (8.13) ein. Es folgt

$$\Theta^A = \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{R}_C + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{R}_C + \mathbf{c}) - (\mathbf{R}_C + \mathbf{c}) \otimes (\mathbf{R}_C + \mathbf{c})) dm$$

und daraus nach Umformung unter Berücksichtigung von $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{c} dm = \mathbf{0}$ die Beziehung

$$\Theta^A = \int_{\mathcal{B}} \underbrace{(\mathbf{E}(\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{R}_C) - \mathbf{R}_C \otimes \mathbf{R}_C)}_{\text{konstant bzgl. Integration}} dm + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{E}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \otimes \mathbf{c}) dm}_{=: \Theta^C, (8.15)}$$

also tatsächlich

$$\Theta^A = (\mathbf{E}(\mathbf{R}_C \cdot \mathbf{R}_C) - \mathbf{R}_C \otimes \mathbf{R}_C) m + \Theta^C \quad \blacksquare$$

Beispiel 8.16

Für das axiale Massenträgheitsmoment $\tilde{\theta}_{33}^A$ lautet der Satz von Steiner

$$\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{33}^C + (R_{C1}^2 + R_{C2}^2 + R_{C3}^2 - R_{C3}^2) m = \tilde{\theta}_{33}^C + (R_{C1}^2 + R_{C2}^2) m.$$

Damit ergibt sich:

1. Für einen Stab der Länge ℓ , wenn A am Stabende liegt:

$$\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{33}^C + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 m = m \frac{\ell^2}{12} + \frac{\ell^2}{4} m = m \frac{\ell^2}{3},$$

also das in Beispiel 8.14 berechnete Ergebnis.

2. Für einen Vollzylinder, wenn als Bezugspunkt A ein Punkt auf der Zylindermantelfläche gewählt wird:

$$\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{33}^C + r^2 m = m \frac{r^2}{2} + r^2 m = \frac{3}{2} m r^2. \quad \diamond$$

8.4.3 Drehung der Basisvektoren

Im Haupttrichtungssystem verschwinden die Deviationsmomente des Massenträgheitstensors. Jedoch ist die Wahl des Haupttrichtungssystems zur Ermittlung der Bewegungsgleichungen nicht immer zweckmäßig, beispielsweise, wenn bei einem Rotor die Drehachse nicht mit einer Haupttrichtung zusammenfällt. Wir beschränken uns hier auf den Fall, dass das Bezugssystem um einen Basisvektor des Haupttrichtungssystems, vgl. Abbildung 8.15 gedreht wird und bestimmen die Änderungen der Massenträgheitsmomente gegenüber den Hauptträgheitsmomenten.

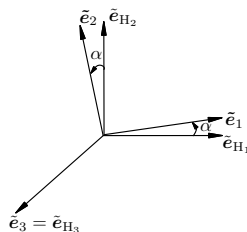


Abb. 8.15: Drehung des Haupttrichtungssystems mit Winkel α um die \tilde{e}_{H_3} -Richtung.

Satz 8.17 (Massenträgheitsmomente bei gedrehten Basisvektoren)

Es sei $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_{H_3}$ ein Bezugssystem, das gegenüber dem Haupttrichtungssystem um die \tilde{e}_{H_3} -Richtung mit Winkel α gedreht ist. Dann ist

$$\tilde{\theta}_{11}^A = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) - \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha),$$

$$\tilde{\theta}_{22}^A = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A) + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos(2\alpha),$$

$$\tilde{\theta}_{12}^A = \tilde{\theta}_{21}^A = \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \sin(2\alpha),$$

$$\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{H_3}^A,$$

$$\tilde{\theta}_{13}^A = \tilde{\theta}_{31}^A = \tilde{\theta}_{32}^A = \tilde{\theta}_{23}^A = 0$$

Beweis. Mit Hilfe der Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1 &= X_1 \cos \alpha + X_2 \sin \alpha, \\ \tilde{X}_2 &= -X_1 \sin \alpha + X_2 \cos \alpha, \\ \tilde{X}_3 &= X_3\end{aligned}$$

zwischen den Koordinaten $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3$ eines materiellen Punkts im gedrehten Bezugssystem und den Koordinaten X_1, X_2, X_3 im Hauptrichtungssystem ergibt sich für die weiteren Massenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_{11}^A &= \int_{\mathcal{B}} (\tilde{X}_2^2 + \tilde{X}_3^2) \, d m = \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 \cos^2 \alpha - 2X_1 X_2 \sin \alpha \cos \alpha + X_1^2 \sin^2 \alpha + X_3^2) \, d m \\ &= \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2) \, d m \cos^2 \alpha + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2) \, d m \sin^2 \alpha - 0 = \tilde{\theta}_{H_1}^A \cos^2 \alpha + \tilde{\theta}_{H_2}^A \sin^2 \alpha, \\ \tilde{\theta}_{22}^A &= \int_{\mathcal{B}} (\tilde{X}_1^2 + \tilde{X}_3^2) \, d m = \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 \cos^2 \alpha + 2X_1 X_2 \sin \alpha \cos \alpha + X_2^2 \sin^2 \alpha + X_3^2) \, d m \\ &= \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2) \, d m \cos^2 \alpha + \int_{\mathcal{B}} (X_2^2 + X_3^2) \, d m \sin^2 \alpha + 0 = \tilde{\theta}_{H_2}^A \cos^2 \alpha + \tilde{\theta}_{H_1}^A \sin^2 \alpha, \\ \tilde{\theta}_{12}^A &= \tilde{\theta}_{21}^A = - \int_{\mathcal{B}} \tilde{X}_1 \tilde{X}_2 \, d m = - \int_{\mathcal{B}} X_1 X_2 \, d m (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 - X_2^2) \, d m \cos \alpha \sin \alpha \\ &= 0 + \int_{\mathcal{B}} (X_1^2 + X_3^2 - X_2^2 - X_3^2) \, d m \cos \alpha \sin \alpha = (\tilde{\theta}_{H_2}^A - \tilde{\theta}_{H_1}^A) \cos \alpha \sin \alpha\end{aligned}$$

Nach Anwenden der trigonometrischen Beziehungen

$$\begin{aligned}\cos^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha), \\ \sin \alpha \cos \alpha &= \frac{1}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}$$

folgen dann die behaupteten Gleichungen.

Da das Bezugssystem um die \tilde{e}_{H_3} -Achse gedreht wird, ist $\tilde{\theta}_{33}^A = \tilde{\theta}_{H_3}^A$ und die Deviationsmomente $\tilde{\theta}_{13}^A$ und $\tilde{\theta}_{23}^A$ verschwinden auch im gedrehten Bezugssystem. ■

Wird der Drehwinkel α als variabel aufgefasst, so lassen sich die beiden axialen Massenträgheitsmomente $\tilde{\theta}_{11}^A$ und $\tilde{\theta}_{22}^A$ sowie das Deviationsmoment $\tilde{\theta}_{12}^A$ am Mohrschen Kreis mit Mittelpunkt $\frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{H_1}^A + \tilde{\theta}_{H_2}^A)$ und Radius $\frac{1}{2}|\tilde{\theta}_{H_1}^A - \tilde{\theta}_{H_2}^A|$ ablesen, vgl. Abbildung 8.16.

8.4.4 Eulersche Kreiselgleichungen

Aus dem Massenmittelpunktsatz für den Drall $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$ lassen sich unter Verwendung der Darstellung

$$\mathbf{D}^C = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C = \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} \quad (8.16)$$

des Dralls \mathbf{D}^C eines starren Körpers bezüglich des Massenmittelpunkts C dynamische Gleichungen gewinnen, die die Drehgeschwindigkeit des starren Körpers beschreiben und **Eulersche Kreiselgleichungen** heißen.

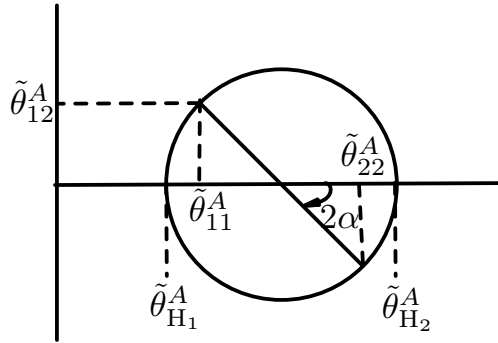


Abb. 8.16: Mohrscher Kreis zur Bestimmung der Massenträgheitsmomente im gedrehten Bezugssystem.

Satz 8.18 (Eulersche Kreiselgleichungen)

Es sei C der Massenmittelpunkt des starren Körpers und Θ^C der Massenträgheitstensor des Körpers in einem an C gebundenen aber sonst **beliebigen** Bezugssystem (C, \tilde{e}_i) . Zwischen der Drehgeschwindigkeit ω und dem resultierenden Moment M^C gilt die Differentialgleichung

$$\dot{\omega} \cdot \Theta^C - \omega \cdot \Theta^C \times \omega = M^C. \quad (8.17)$$

Beweis. Zur Herleitung der Gleichung müssen wir nur D^C nach der Zeit differenzieren und in den Massenmittelpunktsatz für den Drall $\dot{D}^C = M^C$ einsetzen. Die Differentiation von (8.18) nach der Zeit ergibt

$$\dot{D}^C = \dot{\omega} \cdot \Theta^C + \omega \cdot \dot{\Theta}^C. \quad (8.18)$$

Aus

$$\Theta^C = \tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j$$

erhalten wir mit Hilfe der Produktregel:

$$\dot{\Theta}^C = \dot{\tilde{\theta}}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \dot{\tilde{e}}_i \otimes \tilde{e}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes \dot{\tilde{e}}_j.$$

Aus (8.14) folgt, dass die Koordinaten $\tilde{\theta}_{ij}^C$ zeitunabhängig sind. Deshalb ist $\dot{\tilde{\theta}}_{ij}^C = 0$ und wir erhalten damit und mit $\dot{\tilde{e}}_i = \omega \times \tilde{e}_i$ aus (??):

$$\begin{aligned} \dot{\Theta}^C &= \tilde{\theta}_{ij}^C (\omega \times \tilde{e}_i) \otimes \tilde{e}_j + \tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes (\omega \times \tilde{e}_j) \\ &= \omega \times \underbrace{\tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j}_{=\Theta^C} - \underbrace{\tilde{\theta}_{ij}^C \tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j}_{=\Theta^C} \times \omega \\ &= \omega \times \Theta^C - \Theta^C \times \omega. \end{aligned}$$

Dies in (8.18) eingesetzt, liefert

$$\dot{D}^C = \dot{\omega} \cdot \Theta^C + \underbrace{\omega \cdot (\omega \times \Theta^C)}_{=(\omega \times \omega) \cdot \Theta^C} - \omega \cdot \Theta^C \times \omega$$

und damit erhalten wir aus $\dot{D}^C = M^C$ die Gleichung

$$\dot{\omega} \cdot \Theta^C - \omega \cdot \Theta^C \times \omega = M^C \quad \blacksquare$$

Für den Spezialfall, dass Θ^C in der Hauptrichtungsbasis \tilde{e}_{H_i} , also durch

$$\Theta^C = \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{e}_{H_i} \otimes \tilde{e}_{H_i}$$

dargestellt wird, erhalten wir aus

$$\omega = \tilde{\omega}_i \tilde{e}_{H_i}$$

die Ableitung

$$\dot{\omega} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{e}_{H_i} + \tilde{\omega}_i \dot{\tilde{e}}_{H_i} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{e}_{H_i} + \underbrace{\tilde{\omega}_i (\omega \times \tilde{e}_{H_i})}_{=\omega \times \tilde{\omega}_i \tilde{e}_{H_i} = \omega \times \omega = 0} \quad .$$

Deshalb gilt in (8.17):

$$\dot{\omega} \cdot \Theta^C = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{e}_{H_i} \cdot \tilde{\theta}_{H(j)}^C \tilde{e}_{H_j} \otimes \tilde{e}_{H_j} = \dot{\tilde{\omega}}_i \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{e}_{H_i}$$

und analog dazu

$$\omega \cdot \Theta^C = \tilde{\omega}_i \tilde{\theta}_{H(i)}^C \tilde{e}_{H_i}.$$

Nach Berechnung des Vektorprodukts $\omega \cdot \Theta^C \times \omega$ erhält man die **Kreiselgleichungen im Hauptrichtungssystem** in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\omega}}_1 \tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3 (\tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\theta}_{H_3}^C) &= \tilde{M}_1^C, \\ \dot{\tilde{\omega}}_2 \tilde{\theta}_{H_2}^C - \tilde{\omega}_3 \tilde{\omega}_1 (\tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\theta}_{H_1}^C) &= \tilde{M}_2^C, \\ \dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}_{H_3}^C - \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 (\tilde{\theta}_{H_1}^C - \tilde{\theta}_{H_2}^C) &= \tilde{M}_3^C. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Anmerkung. Werden die Eulerschen Kreiselgleichungen für einen körperfesten Bezugspunkt A aufgestellt, der nicht der Massenmittelpunkt ist, dann gilt für die Ableitung des Dralls analog zum obigen Satz:

$$\dot{D}^A = \dot{\omega} \cdot \Theta^A - \omega \cdot \Theta^A \times \omega.$$

Es muss jedoch der Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt, Satz 8.10, beachtet werden. Demzufolge lauten die Kreiselgleichungen für einen beliebigen körperfesten Bezugspunkt A :

$$\mathbf{R}_C \times \mathbf{a}_A m + \dot{\omega} \cdot \Theta^A - \omega \cdot \Theta^A \times \omega = M^A,$$

wobei \mathbf{R}_C der Ortsvektor von A nach C ist, vgl. Abb. 8.11. Der Zusatzterm $\mathbf{R}_C \times \mathbf{a}_A m$ verschwindet, falls $\mathbf{R}_C = \mathbf{0}$ (A ist der Massenmittelpunkt), $\mathbf{a}_A = \mathbf{0}$ (A bewegt sich unbeschleunigt, z.B. feste Drehachse durch A) oder $\mathbf{R}_C \parallel \mathbf{a}_A$, vgl. auch Korollar 8.11.

Die Eulerschen Kreiselgleichungen können prinzipiell auch bezüglich eines raumfesten Punkts formuliert werden. Da i. Allg. der Massenträgheitstensor bezüglich eines raumfesten Punkts zeitlich nicht konstant ist, ist diese Formulierung meist unvorteilhaft.

Im Spezialfall einer **ebenen Starrkörperbewegung** mit $\tilde{e}_3 = \text{const.}$ vereinfachen sich die Eulerschen Kreisgleichungen wegen $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = 0$, folglich $\dot{\tilde{\omega}}_1 = \dot{\tilde{\omega}}_2 = 0$ zum **Massenmittelpunktsatz für den Drall bei ebener Bewegung**:

$$\begin{aligned} 0 &= \tilde{M}_1^C, \\ 0 &= \tilde{M}_2^C, \\ \dot{\tilde{\omega}}_3 \tilde{\theta}_{H_3}^C &= \tilde{M}_3^C. \end{aligned}$$

Beispiel 8.19 (Starres Rad auf schiefer Ebene)

Für das starre Rad auf schiefer Ebene, Abb. 8.20, liefert der Freischnitt nach d'Alembert die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} G \sin \alpha - F_T - m\ddot{x}_C &= 0, \\ G \cos \alpha - N &= 0, \\ aF_T - \theta^C \ddot{\varphi} &= 0. \end{aligned} \tag{8.20}$$

Die ersten beiden Gleichungen folgen aus dem Massenmittelpunktsatz für den Impuls, die letzte Gleichung ergibt sich aus dem Massenmittelpunktsatz für den Drall im Fall einer ebenen Bewegung, wobei $\tilde{\omega}_3 = \dot{\varphi}$ ist und zur Vereinfachung der Notation hier und im Folgenden $\theta^C = \tilde{\theta}_{H_3}^C$ für das Massenträgheitsmoment um die Drehachse bezogen auf den Massenmittelpunkt geschrieben wird. Sofern, wie hier angenommen, keine weiteren zeitabhängigen Größen auftreten, liegt eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung vor. Wir wollen die Bewegung weiter untersuchen und unterscheiden dabei zwischen reinem und gleitendem Rollen.

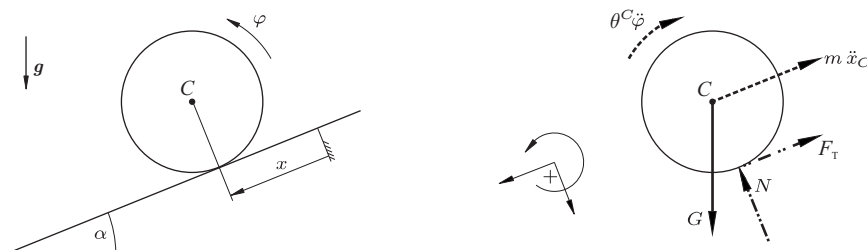


Abb. 8.17: Starres Rad auf schiefer Ebene. Freischnitt nach d'Alembert für reines Rollen.

1. Reines Rollen

In diesem Fall ist der Kontaktpunkt zwischen Rad und schiefer Ebene der Momentanpol. Im Kontaktpunkt ist die Relativgeschwindigkeit zwischen Rad und Ebene daher null; es tritt dort Haften auf. Das Rad hat einen Freiheitsgrad, denn es besteht eine kinematische Bindung zwischen Massenmittelpunkts- und Drehgeschwindigkeit:

$$\dot{x}_C = a\dot{\varphi}. \tag{8.21}$$

Wird diese Beziehung nach der Zeit abgeleitet und in die erste Gleichung von (8.20) eingesetzt, dann ergibt sich

$$G \sin \alpha - F_T - ma\ddot{\varphi} = 0.$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung in (8.20) kann hier die Tangentialkraft F_T durch

$$F_T = \frac{\theta^C \ddot{\varphi}}{a}$$

ersetzt werden:

$$G \sin \alpha - \left(\frac{\theta^C}{a} + ma \right) \ddot{\varphi} = 0.$$

Werden hier noch $G = mg$ und $\theta^C = \frac{m}{2}a^2$ (Kreisscheibe) eingesetzt, dann ergibt sich die konstante Winkelbeschleunigung zu

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g \sin \alpha}{3a}$$

und die konstante Beschleunigung des Massenmittelpunkts entlang der Ebene zu

$$\ddot{x}_C = a\ddot{\varphi} = \frac{2}{3}g \sin \alpha.$$

Diese Lösung ist aber nur dann korrekt, wenn der Kontaktpunkt zwischen Rad und schiefer Ebene der Momentanpol ist. Hierzu muss die Tangentialkraft kleiner als die Grenz-Haftkraft sein, d.h., es muss

$$F_T \leq \mu_0 N$$

gelten (vgl. Abschnitt 6.6), mit der Grenz-Haftzahl μ_0 . Aus der mittleren Gleichung von (8.20) ergibt sich $N = G \cos \alpha = mg \cos \alpha$ und somit

$$F_T = \frac{\theta^C \ddot{\varphi}}{a} = \frac{mg \sin \alpha}{3} \leq \mu_0 mg \cos \alpha$$

die Voraussetzung dafür, dass reines Rollen vorliegt. Dies begrenzt den Winkel der schiefen Ebene auf

$$\tan \alpha \leq 3\mu_0. \tag{8.22}$$

2. Gleitendes Rollen

Ist der Winkel der schiefen Ebene so groß, dass die Bedingung (8.22) nicht erfüllt ist, dann gleitet der Kontaktpunkt entlang der Ebene und ist daher nicht mehr der Momentanpol. Damit gilt auch die kinematische Bindung (8.21) nicht mehr. Das Rad besitzt zwei Freiheitsgrade. Mit Hilfe des Reibgesetzes

$$F_T = \mu N,$$

wobei $\mu \leq \mu_0$ der Reibbeiwert ist, lassen sich dann aus (8.20) die konstante Beschleunigung des Massenmittelpunkts und die konstante Drehbeschleunigung ermitteln. Die mittlere Gleichung führt weiterhin auf

$$N = mg \cos \alpha.$$

Daher ist

$$F_T = \mu mg \cos \alpha.$$

Aus der ersten und letzten Gleichung von (8.20) resultieren dann die Beschleunigungen

$$\begin{aligned} \ddot{x}_C &= g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu), \\ \ddot{\varphi} &= \frac{2\mu g \cos \alpha}{a}. \end{aligned}$$

Wegen $\tan \alpha > 3\mu_0 \geq 3\mu$ und $0 \leq \alpha < \pi$ ist die Beschleunigung \ddot{x}_C entlang der Ebene stets positiv, also abwärts gerichtet. \diamond

Anmerkung. Eine analoge Überlegung gilt für das durch ein Moment angetriebene starre Rad. Reines Rollen ist dann nur für ein hinreichend kleines Antriebsmoment möglich. Bei deformierbaren Rädern (z.B. Fahrrad- oder Autoreifen, aber auch Räder von Schienenfahrzeugen) existiert stets eine Kontaktfläche zwischen Rad und Untergrund, über die Kraftdichten in Normalrichtung (Kontaktdruck) und Tangentialrichtung der Bewegung übertragen werden. Die Haftbedingung gilt dann lokal und begrenzt den Betrag der Tangentialkraftdichte. Innerhalb der Kontaktfläche können daher Gebiete existieren, in denen Haften auftritt, während in anderen Gebieten bereits Gleitreibung vorliegt.

8.5 Räumliche Dynamik deformierbarer Kontinua

Für deformierbare Kontinua lassen sich lokale Formen des Impuls- und Drallgesetzes angeben.

Satz 8.20 (Lokale Form des Impulsgesetzes)

Es gilt:

$$\rho \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{f}_V + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}.$$

Beweis. Für einen beliebigen zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ der Momentanlage folgt aus dem Impulsgesetz

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{v} \rho \, dV &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{f}_V \, dV + \int_{\partial \mathcal{U}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{f}_V \, dV + \int_{\mathcal{U}} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV, \end{aligned}$$

wobei bei der Umformung des letzten Integrals der Satz von Gauß verwendet wurde. Auf der linken Seite ist

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{v} \rho \, dV = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_U} \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}_U} \dot{\mathbf{v}} \, dm = \int_{\mathcal{U}} \dot{\mathbf{v}} \rho \, dV,$$

wobei die materielle Zeitableitung des Geschwindigkeitsfeldes zu bilden ist. Das Impulsgesetz lautet daher

$$\int_{\mathcal{U}} (\dot{\mathbf{v}}\rho - \mathbf{f}_V - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}) \, dV = \mathbf{0}.$$

Da diese Gleichung für eine beliebige Teilmenge \mathcal{U} gilt, muss der Integrand verschwinden. Damit ist die behauptete Gleichung bewiesen. ■

Satz 8.21 (Lokale Form des Drallgesetzes)

Der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ ist symmetrisch.

Beweis. Wir betrachten wieder eine beliebige zusammenhängende Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ der Momentanlage. Aus dem Drallgesetz folgt dann

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho \, dV = \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{f}_V \, dV + \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS. \quad (8.23)$$

Der letzte Term wird wieder mit dem Satz von Gauß und einer Produktregel umgeformt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \int_{\mathcal{U}} \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) \, dV \\ &= \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial r_i}{\partial x_l} \sigma_{jk} \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l) \, dV + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j \, dV + \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \, dV. \end{aligned}$$

Auf der linken Seite werden wieder Zeitableitung und Integration vertauscht:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \rho \, dV &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm = \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}} (\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}) \, dm = \int_{\mathcal{B}_{\mathcal{U}}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \, dm \\ &= \int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}} \rho \, dV. \end{aligned}$$

Werden diese Ergebnisse in Gl. (8.23) eingesetzt, dann ergibt sich

$$\int_{\mathcal{U}} \mathbf{r} \times \underbrace{(\dot{\mathbf{v}}\rho - \mathbf{f}_V - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma})}_{=\mathbf{0}} \, dV = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j \, dV.$$

Da diese Gleichung für eine beliebige Teilmenge \mathcal{U} gilt, muss der Integrand verschwinden. Damit ist

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} \times \sigma_{jk} \mathbf{e}_j = \mathbf{0}.$$

Für die partielle Ableitung finden wir wegen $\mathbf{r} = x_i \mathbf{e}_i$: $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_k} = \mathbf{e}_k$. Somit ist

$$\sigma_{jk} \mathbf{e}_k \times \mathbf{e}_j = \mathbf{0}.$$

Wegen der Eigenschaften des Vektorprodukts folgen daraus die Gleichungen $\sigma_{jk} - \sigma_{kj} = 0$, also die Symmetrie des Spannungstensors. ■

8.6 Statik als Spezialfall der Dynamik

Die **Statik** ist ein Teilgebiet der Mechanik, in dem Körper und Körpersysteme behandelt werden, die sich im Zustand der Ruhe befinden.

Definition 8.22 (Zustand der Ruhe)

Ein Körper \mathcal{B} befindet sich zu einem Zeitpunkt $t = t_0$ im **Zustand der Ruhe**, wenn die Geschwindigkeiten aller materiellen Punkte des Körpers zu diesem Zeitpunkt gleich dem Nullvektor sind, d.h. wenn $\mathbf{v}(\mathcal{P}, t_0) = \mathbf{0}$ für alle $\mathcal{P} \in \mathcal{B}$ gilt.

Daraus folgt, dass die Grundgleichungen der Statik aus den Grundgleichungen der Dynamik, d.h. aus dem Impuls- und Drallgesetz durch Einsetzen von $\mathbf{v}(\mathcal{P}, t_0) = \mathbf{0}$ gewonnen werden können.

Im Folgenden untersuchen wir Bedingungen, unter denen Körper und Körpersysteme sich in Ruhe befinden. Für alle Körper gilt der

Satz 8.23 (Gleichgewichtsbedingungen im Zustand der Ruhe)

Befindet sich ein Körper in einem Zeitintervall im Zustand der Ruhe, so gelten im Inneren des Zeitintervalls die nachstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{M}^O &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

Gleichgewichtsbedingungen genannt. Hierin bezeichnen \mathbf{F} die resultierende Kraft auf den Körper und \mathbf{M}^O das resultierende Moment auf den Körper bezüglich eines beliebigen, raumfesten Punkts O in einem Inertialraum.

Beweis. Diese Gleichungen folgen direkt aus dem Impulsgesetz $\dot{\mathbf{I}} = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm\right)' = \mathbf{F}$ und dem Drallgesetz $\dot{\mathbf{D}}^O = \left(\int_{\mathcal{B}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dm\right)' = \mathbf{M}^O$ nach Einsetzen von $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{P}, t_0) = \mathbf{0}$. ■

Anmerkung. Die Gleichgewichtsbedingungen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^O = \mathbf{0}$ sind notwendig, aber **nicht hinreichend** für den Zustand der Ruhe; denn der o.a. Satz sagt lediglich aus: „Ein Körper befindet sich in Ruhe $\Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^O = \mathbf{0}$ “, aber nicht umgekehrt. Setzt man nämlich in den Bewegungsgesetzen die Bedingungen $\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\mathbf{M}^O = \mathbf{0}$ ein, so erhält man $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{D}}^O = \mathbf{0}$, folglich sind \mathbf{I} und \mathbf{D}^O konstante Vektoren, also i. Allg. $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

9 Analytische Methoden der Mechanik

9.1 Kinetische Energie, Leistung

Mit dem vorangegangenen Kapitel ist die Entwicklung der Dynamik abgeschlossen. Gestützt auf Axiome wurde zunächst die Kinematik entwickelt, anschließend wurden massenkinematische und dynamische Größen eingeführt und durch Axiome miteinander verknüpft, woraus dann die dynamischen Sätze der Mechanik abgeleitet wurden. Mit ihrer Hilfe ist es möglich, die Bewegungsgleichungen von Körpern und Körpersystemen herzuleiten. Dazu muss allerdings jeder einzelne Körper freigeschnitten werden, und für jeden einzelnen Körper müssen die Massenmittelpunktsätze ausgewertet werden. Liegen Bindungen vor, dann treten die entsprechenden Schnittreaktionen in den Massenmittelpunktsätzen auf, die noch eliminiert werden müssen.

Dieses Vorgehen nennt man die **synthetische Methode**. Sie bietet einen systemorientierten Zugang zur Lösung dynamischer Probleme, bei dem ein Körpersystem zunächst zerlegt und die Gleichungen dann synthetisiert werden. Die synthetische Methode ist besonders vorteilhaft, wenn neben den Bewegungsgleichungen auch die Reaktionskräfte und -momente zu bestimmen sind (bspw. zur Lagerdimensionierung). Ist allerdings nur die Bewegung gesucht, dann ist die Elimination der Schnittreaktionen umständlich und fehleranfällig.

Das Ziel der analytischen Methoden ist es, die Bewegung mit Hilfe von Funktionalen zu beschreiben, in denen die Schnittreaktionen infolge von Bindungen **nicht** auftreten. Funktionale sind skalare Funktionen, deren Argument wieder Funktionen sind, wie bspw. das bestimmte Integral. In der Mathematik sind sie Gegenstand der Funktionalanalysis.

Um geeignete Funktionale zu finden, werden die kinematischen und dynamischen Feldgrößen mit Hilfe des Skalarprodukts auf kinematische Größen projiziert, anschließend wird über die Momentanlage integriert. Dadurch verschwinden die Schnittreaktion, da sie senkrecht zur Bewegungsrichtung stehen. Wird auf das Geschwindigkeitsfeld projiziert, dann ergeben sich Leistungsbilanzen, wird hingegen auf die Bewegung selbst projiziert, dann ergeben sich Arbeitsbilanzen und als Spezialfall der Energiesatz.

Neben der Projektion auf die tatsächlichen kinematischen Größen kann auch auf **mögliche** kinematische Größen, die sogenannten virtuellen Geschwindigkeiten und Verschiebungen, projiziert werden. Dies eröffnet einerseits die Möglichkeit zur Entwicklung numerischer Verfahren. Die virtuellen Größen sind dann Testfunktionen, auf die die kinematischen und dynamischen Feldgrößen projiziert werden. Auf diese Weise kann getestet werden, wie gut eine numerische Lösung die Bewegungsgleichungen erfüllt. Andererseits können durch systematische Variation der virtuellen Größen Differentialgleichungen für die Funktionale hergeleitet werden, aus denen sich dann die Bewegung ergibt. Dies ist die Grundidee der Lagrange-Gleichungen 2. Art, die eine sehr effiziente Möglichkeit zur Herleitung von Bewegungsgleichungen darstellt.

In diesem Kapitel werden zunächst die Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen

betrachtet. Anschließend werden die virtuellen Leistungsbilanzen (die Methode der virtuellen Geschwindigkeiten) und die virtuellen Arbeitsbilanzen (die Methode der virtuellen Verschiebungen) entwickelt. Abschließend leiten wir durch Variation des Verschiebungsfeldes die Lagrange-Gleichungen 2. Art zur Beschreibung der Bewegung von diskreten Systemen mit holonomen Bindungen her.

9.1.1 Kinetische Energie

Unter Verwendung der Newton-Eulerschen Bewegungsgesetze lassen sich einige Beziehungen gewinnen, welche **Leistungsbilanzen** genannt werden. Zu ihrer Formulierung ist es jedoch notwendig, drei physikalische Skalare einzuführen. Sie heißen: kinetische Energie, äußere Leistung und innere Leistung. Sie werden nachstehend definiert. Wir führen zunächst die kinetische Energie ein und bestimmen dann ihren translatorischen und – für einen starren Körper – ihren rotatorischen Anteil.

Definition 9.1 (Kinetische Energie)

Die **kinetische Energie** eines Körpers \mathcal{B} ist der durch die Gleichung

$$E := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho \, dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}^2 \, dm \quad (9.1)$$

definierte physikalische Skalar, wobei $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ das Geschwindigkeitsfeld von \mathcal{B} und $\mathbf{v}^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|^2$ ist.

Für einen starren Körper kann die kinetische Energie weiter umgeformt werden:

Satz 9.2 (Kinetische Energie des starren Körpers)

Für einen starren Körper und einen beliebigen körperfesten Punkt A lautet die kinetische Energie:

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \Theta^A \cdot \boldsymbol{\omega},$$

wobei \mathbf{R}_C den Ortsvektor von A zum Massenmittelpunkt C bezeichnet.

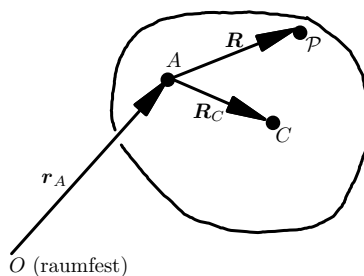


Abb. 9.1: Ortsvektoren für die Berechnung der kinetischen Energie des starren Körpers.

Beweis. Wegen $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R}$ gilt $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{R}}$, d.h. $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \dot{\mathbf{R}}$ mit $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$.
Damit lässt sich die kinetische Energie E zunächst wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, dm \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \, dm + \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \, dm + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} \, dm. \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_A ist bezüglich der Integration über \mathcal{B} konstant und kann deshalb vor das erste und zweite Integral gesetzt werden. Da $\boldsymbol{\omega}$ ebenfalls konstant ist, kann auch dieser Faktor im zweiten Term vor das Integral gezogen werden. Im letzten Term ist mit den Rechenregeln für das Spatprodukt $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}})$, so dass auch hier $\boldsymbol{\omega}$ vor das Integral geschrieben werden kann. Es ergibt sich dann:

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A \int_{\mathcal{B}} dm + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \, dm) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \, dm.$$

Mit $\int_{\mathcal{B}} dm = m$, $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \, dm = \mathbf{R}_C m$ und $\int_{\mathcal{B}} \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}} \, dm = \mathbf{D}^A$ ist dann

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}^A,$$

was nach Einführung des Massenträgheitstensors über $\mathbf{D}^A = \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$ schließlich die gesuchte Darstellung

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A + m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$$

liefert. ■

Definition 9.3 (Anteile der kinetischen Energie des starren Körpers)

Der Term $E_{\text{tr}} := \frac{1}{2} m \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A$ wird als **translatorischer Anteil** und der Term $E_{\text{rot}} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^A \cdot \boldsymbol{\omega}$ als **rotatorischer Anteil** der kinetischen Energie des starren Körpers bezeichnet, $m \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_C)$ heißt **Wechselenergie**.

Für den Spezialfall, dass A der Massenmittelpunkt C ist, gilt $\mathbf{R}_C = \mathbf{0}$ und die Mischenergie verschwindet. Es ist dann

$$E = E_{\text{tr}} + E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{D}^C. \quad (9.2)$$

Translatorischer und rotatorischer Anteil sind also bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ die Projektionen des Impulses auf die Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts bzw. die Projektion des Dralls im Massenmittelpunkt auf die Drehgeschwindigkeit.

Für den Spezialfall einer ebenen Bewegung mit einer Drehung um die $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Richtung folgt für den Drall \mathbf{D}^C wegen $\tilde{\omega}_1 = \tilde{\omega}_2 = 0$ die Beziehung

$$\mathbf{D}^C = \tilde{\omega}_3 (\tilde{\theta}_{31}^C \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{\theta}_{32}^C \tilde{\mathbf{e}}_2 + \tilde{\theta}_{33}^C \tilde{\mathbf{e}}_3).$$

Für den rotatorischen Anteil $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^C \cdot \boldsymbol{\omega}$ ergibt sich dann

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_3 \tilde{e}_3 \cdot \tilde{\omega}_3 (\tilde{\theta}_{31}^C \tilde{e}_1 + \tilde{\theta}_{32}^C \tilde{e}_2 + \tilde{\theta}_{33}^C \tilde{e}_3),$$

was sich mit Hilfe der Orthonormalitätsbedingungen $\tilde{e}_1 \cdot \tilde{e}_3 = \tilde{e}_2 \cdot \tilde{e}_3 = 0$ und $\tilde{e}_3 \cdot \tilde{e}_3 = 1$ der Basisvektoren zu

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_3^2 \tilde{\theta}_{33}^C$$

vereinfacht. Dies ist der rotatorische Anteil der kinetischen Energie eines starren Körpers im Fall einer **ebenen Bewegung**.

Ist A der Momentanpol M , dann verschwindet \mathbf{v}_M und die kinetische Energie ergibt sich allein aus dem rotatorischen Anteil:

$$E = E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Theta}^M \cdot \boldsymbol{\omega}.$$

Diese Gleichung ist insbesondere dann zweckmäßig, wenn der starre Körper um eine feste Drehachse rotiert.

9.1.2 Äußere Leistung

Wir führen nun die Leistung der äußeren Kraftdichteverteilungen ein.

Definition 9.4 (Äußere Leistung)

Die **Leistung** P_a der (äußeren) $\mathbf{f}_S, \mathbf{f}_V$ -Kraftdichteverteilung wird durch die Gleichung

$$P_a := \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, dV \quad (9.3)$$

definiert. P_a wird auch kurz **äußere Leistung** genannt.

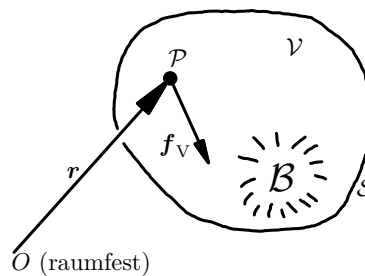


Abb. 9.2: Berechnung der äußeren Leistung.

Beispiel 9.5

1. Leistung P_{a_G} der Gewichtskraft \mathbf{G} eines Körpers \mathcal{B} :

Mit $\mathbf{f}_V = \rho \mathbf{g}$ folgt aus (9.3):

$$P_{a_G} = \int_V \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} \, dV \stackrel{\mathbf{g} \text{ konstant}}{=} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \, dm \cdot \mathbf{g} \stackrel{(5.7)}{=} \mathbf{v}_C m \cdot \mathbf{g} = \mathbf{v}_C \cdot m \mathbf{g} = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{G}. \quad (9.4)$$

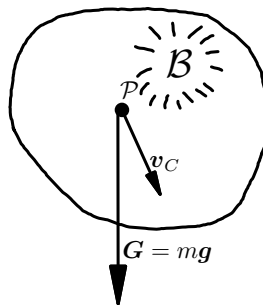


Abb. 9.3: Äußere Leistung der Gewichtskraft.

2. Leistung P_{a_E} einer diskreten Einzelkraft \mathbf{F}_E :

Einzelkräfte haben wir in Abschnitt als spezielle Dynamen kennengelernt. Die Einzelkraft ergab sich dabei stets aus der Integration von Kraftdichteverteilungen. Zur Berechnung der äußeren Leistung einer derartigen Einzelkraft muss daher prinzipiell Gl. (9.3) für die zugrunde liegende Kraftdichteverteilung ausgewertet werden. In vielen Fällen, z.B. bei masselosen Verbindungselementen wie Federn, Dämpfer etc., treten jedoch **diskrete Einzelkräfte** auf. Ihnen liegen ebenfalls Kraftdichteverteilungen zugrunde, deren Gebiet jedoch sehr klein ist. Zur Berechnung der äußeren Leistung können wir daher annehmen, dass im Fall einer diskreten Einzelkraft die Geschwindigkeit in diesem Gebiet konstant und gleich der Geschwindigkeit \mathbf{v} im Angriffspunkt der Einzelkraft ist. Für eine diskrete Einzelkraft \mathbf{F}_E , die an der Oberfläche des Körpers angreift, erhalten wir daher:

$$P_{a_E} := \int_{\Delta S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS = \mathbf{v} \cdot \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S \, dS = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_E.$$

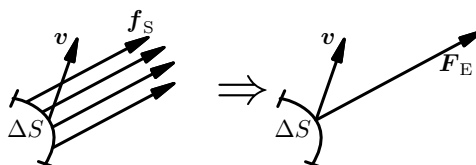


Abb. 9.4: Äußere Leistung einer diskreten Einzelkraft.

Anmerkung. In analoger Weise kann die äußere Leistung für ein freies Moment \mathbf{M} ermittelt werden, das durch ein Paar diskreter Einzelkräfte \mathbf{F}_E (z.B. durch eine Drehfeder) aufgebracht wird, vgl. Abbildung 9.5. Es gilt dann $\mathbf{M} = 2\mathbf{r} \times \mathbf{F}_E$ und für die Geschwindigkeit gilt $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (-\mathbf{r})$ sowie $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, wobei $\boldsymbol{\omega}$ die Drehgeschwindigkeit des durch den Ortsvektor \mathbf{r} repräsentierten starren Hebels bezeichnet. Damit ist dann

$$\begin{aligned} P_{aM} &= \int_{\Delta S_A} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\Delta S_B} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS \\ &= \mathbf{v}_A \cdot \int_{\Delta S_A} \mathbf{f}_S \, dS + \mathbf{v}_B \cdot \int_{\Delta S_B} \mathbf{f}_S \, dS \\ &= (\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times (-\mathbf{r})) \cdot (-\mathbf{F}_E) + (\mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_E = 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}_E \\ &= 2\boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}_E) = \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}. \end{aligned}$$

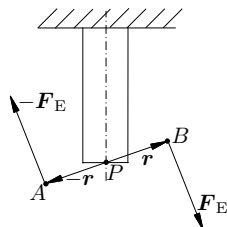


Abb. 9.5: Äußere Leistung eines freien Moments.

3. Leistung P_a einer Dyname $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ (A körperfest) am starren Körper:
Mit $\mathbf{v} = \mathbf{v}_A + \dot{\mathbf{R}}$ erhält man für die äußere Leistung, Gl. (9.3):

$$P_a = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F} + \int_S \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{f}_V \, dV. \quad (9.5)$$

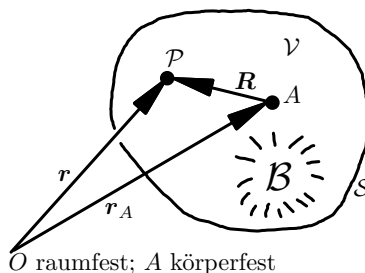


Abb. 9.6: Ortsvektoren zum körperfesten Punkt A und zum materiellen Punkt \mathcal{P} .

Für einen starren Körper gilt $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. Damit erhält man für den zweiten und dritten Summanden

$$\begin{aligned} \int_S \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{f}_V \, dV &= \int_S (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_V (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{f}_V \, dV \\ &= \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{f}_S) \, dS + \int_V \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{f}_V) \, dV \\ &= \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{\left(\int_S \mathbf{R} \times \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \mathbf{R} \times \mathbf{f}_V \, dV \right)}_{=: \mathbf{M}^A} \end{aligned}$$

und damit folgt aus Gl. (9.5) für die äußere Leistung der Dynamik $(\mathbf{F}, A, \mathbf{M}^A)$ am starren Körper:

$$P_a = \mathbf{v}_A \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^A. \quad \diamond \quad (9.6)$$

9.1.3 Innere Leistung

Aus dem Massenmittelpunktsatz für den Impuls $m\dot{\mathbf{v}}_C = \mathbf{F}$ folgt nach skalarer Multiplikation mit \mathbf{v}_C :

$$m\dot{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{v}_C = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F}. \quad (9.7)$$

Die linke Seite ist gleich \dot{E}_{tr} , weil die Differentiation von $E_{\text{tr}} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{v}_C$ nach der Zeit

$$\dot{E}_{\text{tr}} = \frac{1}{2}m(\dot{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{v}}_C) = m\dot{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{v}_C$$

ergibt. Damit und mit $\mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} =: P_{a_F}$ folgt aus (9.7) die Beziehung

$$\dot{E}_{\text{tr}} = P_{a_F}, \text{ also } \dot{E}_{\text{tr}} - P_{a_F} = 0.$$

Dies bedeutet, dass die Größen \dot{E} und P_{a_F} , folglich auch \dot{E} und P_a addierbar sind.

Durch Versuche stellt man fest, dass für einen deformierbaren Körper $P_a \neq \dot{E}$ ist. Weil aber P_a und \dot{E} addierbar sind, ist es zulässig und sinnvoll, die Differenz von P_a und \dot{E} zu bilden. Wir gelangen auf diesem Wege zu der folgenden

Definition 9.6 (Innere Leistung)

Die innere Leistung P_i ist der durch die Gleichung

$$P_i := P_a - \dot{E} \quad (9.8)$$

definierte physikalische Skalar.

Experimente haben gezeigt, dass stets $P_a \geq \dot{E}$, d.h. $P_i \geq 0$ gilt.

Für die in der Definitionsgleichung (9.8) auftretende zeitliche Ableitung \dot{E} der kinetischen Energie $E := \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm$ eines Körpers \mathcal{B} folgt nach Differentiation von E nach der Zeit die Beziehung

$$\dot{E} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dm \right) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) \cdot \dot{} \, dm = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}) \, dm, \\ dm = \text{const. bzgl. } t$$

also schließlich

$$\dot{E} = \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm, \quad (9.9)$$

wenn man berücksichtigt, dass im Fall eines Körpers die Differentiation nach der Zeit mit der Integration über den Körper vertauscht werden kann.

Die Differentiation von (9.2) ergibt unter Ausnutzung der Symmetrie des Massenträgheitstensors speziell für einen starren Körper

$$\dot{E} = \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C. \quad (9.10)$$

9.2 Mechanische Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen

9.2.1 Der allgemeine Leistungssatz

Wir formulieren diesen Satz zunächst für einen Körper.

Satz 9.7 (Innere Leistung eines Körpers)

Teilt man einen Körper \mathcal{B} in n Teilkörper \mathcal{B}_k ($k = 1, 2, \dots, n$) und bezeichnet P_{i_k} die innere Leistung des k ten Teilkörpers, so gilt für die gesamte innere Leistung P_i des Körpers \mathcal{B} :

$$P_i = \sum_{k=1}^n P_{i_k}. \quad (9.11)$$

Beweis. Wir beweisen diesen Satz zunächst für eine Zerlegung des Körpers \mathcal{B} in zwei Teilkörper \mathcal{B}_1 und \mathcal{B}_2 .

Die innere Leistung P_i des Körpers \mathcal{B} ist

$$P_i := P_a - \dot{E} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, dV - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm. \quad (9.12)$$

Die inneren Leistungen P_{i_1} von \mathcal{B}_1 und P_{i_2} von \mathcal{B}_2 sind

$$P_{i_1} := P_{a_1} - \dot{E}_1 = \int_{\mathcal{S}_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\hat{\mathcal{S}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^{(1)} \, dS + \int_{\mathcal{V}_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, dV - \int_{\mathcal{B}_1} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm, \\ P_{i_2} := P_{a_2} - \dot{E}_2 = \int_{\mathcal{S}_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_{\hat{\mathcal{S}}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^{(2)} \, dS + \int_{\mathcal{V}_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, dV - \int_{\mathcal{B}_2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm.$$

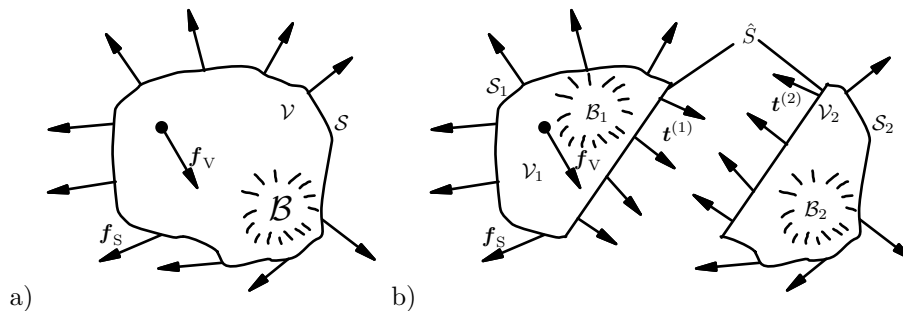


Abb. 9.7: Zerlegen eines Körpers in zwei Teilkörper.

Die seitenweise Addition der beiden Gleichungen ergibt unter Berücksichtigung des Gegenwirkungssatzes $\mathbf{t}^{(1)} = -\mathbf{t}^{(2)}$:

$$P_{i_1} + P_{i_2} = \int_{S_1 \cup S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_{V_1 \cup V_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_V \, dV - \int_{B_1 \cup B_2} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm$$

und der Vergleich mit (9.12) liefert wegen $S = S_1 \cup S_2$, $V = V_1 \cup V_2$ und $B = B_1 \cup B_2$ die Beziehung $P_i = P_{i_1} + P_{i_2}$. Damit ist Gleichung (9.11) für $n = 2$ bewiesen. Der Beweis von (9.11) für beliebige n verläuft entsprechend. ■

Der **allgemeine Leistungssatz** (für beliebige Systeme) lautet:

Satz 9.8 (Allgemeiner Leistungssatz)

Die gesamte innere Leistung P_i eines Systems ist gleich der Summe der inneren Leistungen $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_n}$ seiner n Teilsysteme, d.h. es gilt genauso wie im Fall eines Körpers: $P_i = \sum_{k=1}^n P_{i_k}$.

Der Beweis dieses Satzes verläuft genauso wie im Fall eines Körpers.

Aufgrund des allgemeinen Leistungssatzes dürfen die inneren Teilleistungen zu der gesamten inneren Leistung addiert werden.

9.2.2 Spezielle Leistungssätze

Mit Hilfe der kinetischen Energie (9.1), der äußeren Leistung P_a , Gl. (9.3), und der inneren Leistung $P_i := P_a - \dot{E}$, Gleichung (9.8), lassen sich – gegebenenfalls unter Verwendung der Newton-Eulerschen Gesetze und der aus ihnen hergeleiteten Sätze – verschiedene spezielle Leistungssätze, d.h. gesonderte Aussagen für die innere Leistung P_i für verschiedene Spezialfälle, so z.B. für ein masseloses deformierbares Element sowie für starre Körper und deformierbare Medien herleiten.

1. Der Leistungssatz für ein masseloses deformierbares Element lautet:

Satz 9.9 (Leistungssatz, masseloses deformierbares Element)

Für ein masseloses Element ist $\dot{E} = 0$, d.h. $P_i = P_a$.

Beweis. Aufgrund der Masselosigkeit gilt $\rho \equiv 0$, d.h. $E = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rho \, dV \equiv 0$, deshalb auch $\dot{E} = 0$. ■

2. Der Leistungssatz für einen starren Körper lautet:

Satz 9.10 (Leistungssatz, starrer Körper)

Für einen starren Körper ist $P_i = 0$, d.h. $\dot{E} = P_a$.

Beweis. Für die äußere Leistung der Dynamik $(\mathbf{F}, C, \mathbf{M}^C)$ im Massenmittelpunkt C folgt aus (9.6) für $A = C$:

$$P_a = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C.$$

Nach Einsetzen dieser Gleichung und von (9.10) in $P_i := P_a - \dot{E}$, Gl. (9.8), folgt

$$P_i = \mathbf{v}_C \cdot \underbrace{(\mathbf{F} - \dot{\mathbf{I}})}_{=0, (7.1)} + \boldsymbol{\omega} \cdot \underbrace{(\mathbf{M}^C - \dot{\mathbf{D}}^C)}_{=0, (8.7)},$$

und damit aus dem Impulsgesetz und dem Massenmittelpunktsatz für den Drall die zu beweisende Beziehung $P_i = 0$. ■

3. Der Leistungssatz für ein deformierbares Kontinuum lautet:

Satz 9.11 (Leistungssatz für ein deformierbares Kontinuum)

Für ein deformierbares Kontinuum ist $P_i = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV$ mit dem Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T).$$

Beweis. Wir multiplizieren das Impulsgesetz skalar mit dem Geschwindigkeitsfeld und integrieren über die Momentanlage des Körpers:

$$\int_{\mathcal{V}} \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} \rho \, dV = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\mathcal{V}} \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dV. \quad (9.13)$$

Auf der linken Seite erhalten wir die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie, vgl. Gl. (9.9). Auf der rechten Seite ist das zweite Integral noch weiter umzuformen, um ein Oberflächenintegral und damit die Leistung der Flächenkraftdichte zu erhalten, so dass sich auf der rechten Seite die gesamte äußere Leistung gemäß Gl. (9.3) ergibt. Die Umformung in ein Oberflächenintegral gelingt mit dem Satz von Gauß. Hierzu benötigen wir im Integranden die Divergenz einer Feldgröße, weshalb wir auf den Integranden noch die Produktregel

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{v}$$

anwenden müssen. Wegen der Symmetrie des Spannungstensors kann der zweite Faktor im letzten Summanden durch seinen symmetrischen Anteil ersetzt werden:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \text{grad } \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D}.$$

Es ergibt sich dann

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \, dV - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV.$$

Wir können nun den Satz von Gauß auf das erste Integral der rechten Seite anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, dV &= \int_{\mathcal{S}} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \, dS - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV \\ &= \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{v} \, dS - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV. \end{aligned}$$

Wird dies wieder in Gl. (9.13) eingesetzt und für die linke Seite die zeitliche Ableitung der kinetischen Energie verwendet, so ergibt sich

$$\dot{E} = \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_{\mathcal{V}} \cdot \mathbf{v} \, dV + \int_{\mathcal{S}} \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{v} \, dS}_{=: P_a} - \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV.$$

Damit ist

$$P_i = P_a - \dot{E} = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} \, dV. \quad \blacksquare$$

Die speziellen Leistungssätze verdeutlichen das Auftreten von dynamischen und kinematischen Größen als Faktoren in einem Skalarprodukt. Man bezeichnet die Faktoren im Skalarprodukt (Vektor und Covektor) als dual zueinander. Demzufolge sind allgemein Kraftdichte und Geschwindigkeitsfeld dual zueinander. Für einen deformierbaren Körper sind Spannungen und Verzerrungsgeschwindigkeit dual zueinander, für einen starren Körper Einzelkraft und Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts sowie Moment bezüglich des Massenmittelpunkts und Drehgeschwindigkeit. Dynamik und Kinematik sind daher dual.

9.2.3 Arbeit, Arbeitssätze und Energiesatz

Wir wollen die innere Leistung nach der Zeit integrieren. Aus Gleichung (9.8) erhalten wir dann eine Gleichung zwischen der kinetischen Energie der Anfangs- und Endlage und den Leistungsintegralen:

$$E(t_E) - E(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} P_a \, dt - \int_{t_A}^{t_E} P_i \, dt. \quad (9.14)$$

Den ersten Term auf der rechten Seite formen wir mit (9.3) wie folgt um:

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_E} P_a \, dt &= \int_{t_A}^{t_E} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \, dS \, dt + \int_{t_A}^{t_E} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{\mathcal{V}} \, dV \, dt \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \, dt \, dS + \int_{\mathcal{V}} \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{\mathcal{V}} \, dt \, dV \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{v} \, dt \, dS + \int_{\mathcal{V}} \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{f}_{\mathcal{V}} \cdot \mathbf{v} \, dt \, dV \\ &= \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_{\mathcal{S}} \cdot d\mathbf{r} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_{\mathcal{V}} \cdot d\mathbf{r} \, dV \end{aligned}$$

wobei das innere Integral ein Kurvenintegral entlang der Bahn $\mathbf{r} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{R}, t)$ der Bewegung des einzelnen materiellen Punkts zwischen t_A und t_E ist.

Definition 9.12 (Äußere Arbeit)

Die **Arbeit** W_a der (äußeren) $\mathbf{f}_S, \mathbf{f}_V$ -Kraftdichteverteilung wird durch das Integral

$$W_a := \int_S \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{r} dS + \int_V \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_V \cdot d\mathbf{r} dV \quad (9.15)$$

definiert. W_a wird auch kurz **äußere Arbeit** genannt.

Die äußere Arbeit ist i. Allg. vom Integrationsweg abhängig.

Beispiel 9.13 (Äußere Arbeit einer diskreten Einzelkraft)

Für eine diskrete Einzelkraft \mathbf{F}_E erhalten wir aus (9.15) unter Berücksichtigung der näherungsweise Konstanz von \mathbf{r} bezüglich ΔS :

$$W_{aE} = \int_{\Delta S} \int_{\mathbf{r}} \mathbf{f}_S \cdot d\mathbf{r} dS = \int_{\mathbf{r}} \int_{\Delta S} \mathbf{f}_S dS \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}} \mathbf{F}_E \cdot d\mathbf{r}.$$

◇

Der zweite Term auf der rechten Seite ist die innere Arbeit:

Definition 9.14 (Innere Arbeit)

Die **innere Arbeit** W_i ist der durch

$$W_i := \int_{t_A}^{t_E} P_i dt$$

definierte physikalische Skalar.

Mit Hilfe der Additivität des Integrals folgt aus dem allgemeinen Leistungssatz sofort die Additivität der inneren Arbeit für Körpersysteme.

Satz 9.15 (Allgemeiner Arbeitssatz)

Die gesamte innere Arbeit W_i eines Systems zwischen zwei Zeitpunkten t_A und t_E ist gleich der Summe der inneren Arbeiten $W_{i_1}, W_{i_2}, \dots, W_{i_n}$ seiner n Teilsysteme: $W_i = \sum_{k=1}^n W_{i_k}$.

Ähnlich wie beim Leistungssatz lassen sich wieder spezielle Arbeitssätze als gesonderte Aussagen für verschiedene Spezialfälle herleiten. Dabei kann nun aber auch auf die Überlegungen zu den speziellen Leistungssätzen zurückgegriffen werden.

1. Der Arbeitssatz für ein masseloses deformierbares Element lautet:

Satz 9.16 (Arbeitssatz, masseloses deformierbares Element)*Für ein masseloses deformierbares Element ist $W_i = W_a$.*

Beweis. Wegen $\dot{E} = 0$ verschwindet in (9.14) die linke Seite, woraus nach Verwendung der Definitionen für die äußere und innere Arbeit die Behauptung folgt. ■

2. Der Arbeitssatz für einen starren Körper lautet:

Satz 9.17 (Arbeitssatz, starrer Körper)*Für einen starren Körper ist $E(t_E) - E(t_A) = W_a$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus dem Verschwinden von P_i und damit auch W_i für einen starren Körper. ■

Wir wollen für den starren Körper noch die äußere Arbeit W_a berechnen. Dazu integrieren wir die äußere Leistung, Gl. (9.6), zwischen t_A und t_E :

$$W_a = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} dt + \int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C dt. \quad (9.16)$$

Das erste Integral kann als Kurvenintegral für die Bahn des Massenmittelpunkts zwischen t_A und t_E geschrieben werden:

$$\int_{t_A}^{t_E} \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} dt = \int_{r_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Beim zweiten Integral ist zu beachten, dass die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ i. Allg. nicht integrabel ist; das Integral

$$\int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} dt = \int_{\varphi} d\varphi \quad (9.17)$$

mit dem (i. Allg. **nicht** vollständigen) Rotationsdifferential $d\varphi = \boldsymbol{\omega} dt$ ist daher i. Allg. wegabhängig. Die Wegabhängigkeit des Integrals (9.17) lässt sich durch die Nichtkommutativität endlicher Drehungen veranschaulichen.

Ist die Drehgeschwindigkeit jedoch stets nur in einer Richtung von Null verschieden, wie etwa bei einer ebenen Bewegung oder der Drehung um eine feste Achse, dann ist das Rotationsdifferential vollständig mit der Winkelgeschwindigkeit als Drehgeschwindigkeit: $\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}$.

Unter Anwendung von (9.17) lautet dann das zweite Integral in (9.16):

$$\int_{t_A}^{t_E} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C dt = \int_{\varphi} \mathbf{M}^C \cdot d\varphi,$$

so dass sich insgesamt

$$W_a = \int_{r_C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\varphi} \mathbf{M}^C \cdot d\varphi$$

für den starren Körper ergibt.

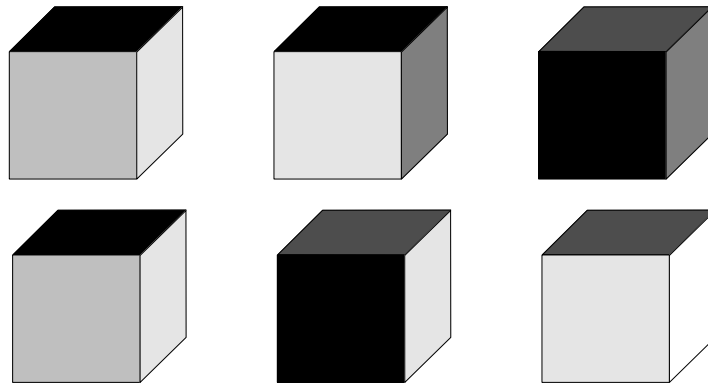


Abb. 9.8: Nichtkommutativität endlicher Drehungen am Beispiel eines Würfels. Obere Reihe: Drehung aus der Ausgangslage zunächst um die Hochachse, dann um die Querachse. Untere Reihe: Drehung aus der Ausgangslage zunächst um die Querachse, dann um die Hochachse. Die Endlagen unterscheiden sich.

3. Der Arbeitssatz für ein deformierbares Kontinuum lautet:

Satz 9.18 (Arbeitssatz für ein deformierbares Kontinuum)

Für ein deformierbares Kontinuum ist $W_i = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\epsilon} dV$ mit dem Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und dem linearisierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\epsilon}$.

Beweis. Wegen

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} &= \frac{1}{2}(\text{grad } \dot{\mathbf{u}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{u}})^T) = \frac{1}{2}(\text{grad}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}) + (\text{grad}(\dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{R}}))^T) \\ &= \frac{1}{2}(\text{grad } \dot{\mathbf{r}} + (\text{grad } \dot{\mathbf{r}})^T) = \frac{1}{2}(\text{grad } \mathbf{v} + (\text{grad } \mathbf{v})^T) =: \mathbf{D} \end{aligned}$$

ist der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor die zeitliche Ableitung des linearisierten Verzerrungstensors $\boldsymbol{\epsilon}$. Damit lässt sich die innere Leistung für ein deformierbares Kontinuum als

$$P_i = \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV$$

schreiben. Wird hier auf beiden Seiten wieder nach der Zeit integriert, dann erhalten wir die innere Arbeit

$$W_i = \int_{t_A}^{t_B} \int_{\mathcal{V}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dV dt = \int_{\mathcal{V}} \int_{t_A}^{t_B} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} dt dV = \int_{\mathcal{V}} \int_{\mathbf{r}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\epsilon} dV.$$

Das Differential $\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot d\boldsymbol{\epsilon}$ ist i. Allg. nicht vollständig und die innere Arbeit daher i. Allg. vom Weg abhängig. ■

Die Integration von Gl. (9.8) nach der Zeit ist dann besonders einfach, wenn sich sowohl die äußere Leistung P_a als auch die innere Leistung P_i als zeitliche Ableitungen reiner Ortsfunktionen V_i bzw. V_a darstellen lassen.

Definition 9.19 (Potential)

Es seien P_a die äußere Leistung und P_i die innere Leistung. Die Ortsfunktion V_i mit $\dot{V}_i = P_i$ heißt das **innere Potential**, und die Ortsfunktion V_a mit $\dot{V}_a = -P_a$ ⁹ wird das **äußere Potential** genannt. Die Funktion $V := V_i + V_a$ heißt das (gesamte) **Potential** oder die **potentielle Energie**.

Wir erhalten dann die Beziehungen

$$\dot{V}_i + \dot{V}_a + \dot{E} = 0 \text{ bzw. } \dot{V} + \dot{E} = 0$$

oder auch nach Integration

$$V + E = \text{const.}$$

Wir fassen dieses Ergebnis im folgenden Energiesatz zusammen:

Satz 9.20 (Energiesatz)

Besitzt die Leistung ein Potential V , dann gilt der **Energiesatz in differentieller Form**

$$\dot{V} + \dot{E} = 0$$

bzw. der **Energiesatz in integraler Form**

$$V + E = \text{const.}$$

Nicht immer besitzen Kräfte eine Potentialfunktion.

Definition 9.21 (Konservative Kräfte)

Kräfte, deren Leistungen Potentiale besitzen, heißen **Potentialkräfte** oder **konservativ**.

9.2.4 Potentielle Energie konservativer Dynamen

Satz 9.22 (Potential der Gewichtskraft)

Die Gewichtskraft $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$ ist konservativ. Sie besitzt das äußere Potential $V_{a_G} = mgz + C$, wobei C eine Konstante ist.

Beweis. Die äußere Leistung P_{a_G} von \mathbf{G} ist gemäß (9.4):

$$P_{a_G} = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{G}.$$

Mit

$$\mathbf{v}_C := \dot{\mathbf{r}}_C = (x \mathbf{e}_x + z \mathbf{e}_z)' = \dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{z} \mathbf{e}_z$$

⁹Das Vorzeichen wird aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählt.

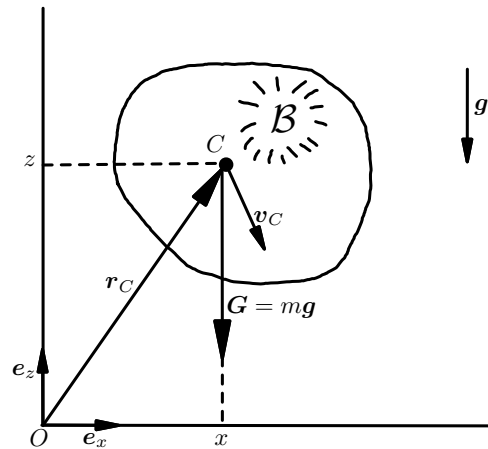


Abb. 9.9: Ermittlung des Potentials der Gewichtskraft.

und

$$\mathbf{G} = m\mathbf{g} = mg(-\mathbf{e}_z)$$

folgt dann

$$P_{\mathbf{a}_G} = (\dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{z}\mathbf{e}_z) \cdot (-\mathbf{e}_z)mg = -mg\dot{z}.$$

Es gilt daher wegen $mg = \text{const.}$:

$$P_{\mathbf{a}_G} = -(mgz + C);$$

also

$$P_{\mathbf{a}_G} = -\dot{V}_{\mathbf{a}_G} \quad \text{und} \quad V_{\mathbf{a}_G} = mgz + C. \quad \blacksquare$$

Für ein masseloses, deformierbares Verbindungselement, dessen Kraftgesetz nur von einer skalaren Auslenkung (z.B. der Verschiebung in Längsrichtung) abhängt, liefert die Stammfunktion des Kraftgesetzes ein inneres Potential:

Satz 9.23 (Potential eines masselosen Verbindungselementes)

Es sei $F(x)$ das Kraftgesetz eines masselosen, deformierbaren Verbindungselementes, wobei x eine skalare Auslenkung bezeichnet, so dass die äußere Leistung durch $P_a = F(x)\dot{x}$ gegeben sei. Existiert zu $F(x)$ die Stammfunktion $F_{\text{st}}(x)$, dann ist das innere Potential des Verbindungselementes durch die Stammfunktion gegeben, es gilt also

$$V_{i_F} = F_{\text{st}}(x).$$

Beweis. Gemäß dem Leistungssatz für ein masseloses deformierbares Verbindungselement gilt

$$P_i = P_a \quad \text{mit} \quad P_a = F(x)\dot{x}.$$

Das innere Potential V_{i_F} des masselosen Verbindungselements muss dann

$$\frac{d}{dt}V_{i_F} = P_i = F(x)\dot{x}$$

erfüllen. Unter Anwendung der Kettenregel ergibt sich auf der linken Seite der Gleichung

$$\frac{d}{dt}V_{i_F} = \frac{d}{dx}V_{i_F} \frac{dx}{dt}.$$

Da für die Stammfunktion $F_{st}(x)$ von $F(x)$ die Ableitung

$$\frac{dF_{st}(x)}{dx} = F(x)$$

ist, folgt mit $V_{i_F} = F_{st}(x)$ insgesamt

$$\frac{d}{dt}V_{i_F} = F(x)\frac{dx}{dt}$$

und somit $F(x)\dot{x} = P_a = P_i$. ■

Ein Beispiel für die Anwendung dieses Satzes ist die in einer **linear-elastischen** masselosen Feder gespeicherte Formänderungsleistung. Mit der Federkonstanten c lautet das Kraftgesetz $F = c\Delta\ell$, vgl. Abb. 9.10. Es besitzt die Stammfunktion $\frac{1}{2}c(\Delta\ell)^2 + C$, wobei die Konstante C zweckmäßigerweise für die entspannte Feder ($\Delta\ell = 0$) zu null gesetzt wird.

Korollar 9.24 (Potential der Federkraft)

Die linear-elastische Federkraft mit Betrag $F = c\Delta\ell$, c : Federkonstante, $\Delta\ell$: Längenänderung, ist konservativ. Sie besitzt das innere Potential

$$V_{i_F} = \frac{1}{2}c(\Delta\ell)^2.$$

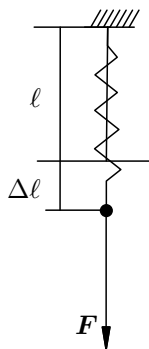


Abb. 9.10: Potential der Federkraft.

Analog erhält man für eine Drehfeder mit Federkonstante c_D das innere Potential $V_{iD} = \frac{1}{2}c_D(\Delta\varphi)^2$, wobei $\Delta\varphi$ die Winkeländerung beschreibt. Ist hingegen wie beim dissipativen Dämpfer das Kraftgesetz des Verbindungselementes nicht nur von der Auslenkung, sondern auch von der Geschwindigkeit abhängig, dann existiert in der Regel kein Potential.

Beispiel 9.25

Die folgenden Beispiele verdeutlichen Anwendungsmöglichkeiten der Leistungs-, Arbeits- und Energiesätze.

1. Klotz auf schiefer Ebene

Der Neigungswinkel α der Ebene, der Gleitreibbeiwert μ und die Anfangsgeschwindigkeit v_0 des Klotzes seien bekannt. Gesucht ist die Geschwindigkeit v_1 im Abstand s_1 von der Anfangslage des Klotzes. Fassen wir s_1 als variabel auf, so erhalten wir die Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Weg.

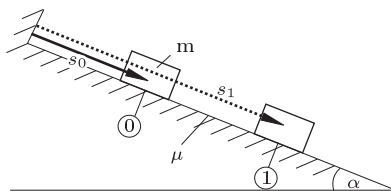


Abb. 9.11: Klotz auf schiefer Ebene.

Zunächst liefert das Kräftegleichgewicht vertikal zur Gleitebene die Beziehung $N = G \cos \alpha$ mit der Gewichtskraft $G = mg$, woraus sich für die Reibkraft $R = \mu G \cos \alpha$ ergibt. Entlang der Ebene wirkt auf den Klotz insgesamt die Kraft $F = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. Diese Kraft verrichtet am Klotz zwischen s_0 und s_1 die äußere Arbeit

$$W_a = \int_{s_0}^{s_1} G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) ds = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0).$$

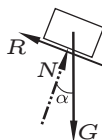


Abb. 9.12: Freigeschnittener Klotz.

Die kinetische Energie für den Klotz ist

$$\text{in der Anfangslage: } E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2,$$

$$\text{in der Endlage: } E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$$

Der Arbeitssatz für einen starren Körper liefert dann

$$\begin{aligned} E_1 - E_0 &= \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_0^2) \\ &= \int_{s_0}^{s_1} G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \, ds = G(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0). \end{aligned}$$

Nach der gesuchten Geschwindigkeit v_1 aufgelöst, ergibt sich

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)(s_1 - s_0)}.$$

Das Ergebnis ist unabhängig von der Masse des Klotzes. Das Beispiel illustriert die typische Vorgehensweise bei der Anwendung des Arbeits- oder Energiesatzes. Es werden zwei Zustände betrachtet (von denen einer variabel sein kann). In der Gleichung treten Geschwindigkeiten und Wege (bzw. Drehgeschwindigkeiten und Winkel) auf, aber keine Beschleunigungen und keine Zeit. Die Ermittlung der Bewegungsgleichung erfolgte ohne Elimination der Reaktionskräfte; lediglich aufgrund des Kraftgesetzes für die **eingeprägte** Kraft R war die Ermittlung der Normalkraft erforderlich.

2. Mathematisches Pendel

Wir untersuchen die Bewegung des skizzierten Pendels ohne Berücksichtigung von Luftwiderstand und Reibung. Das Ziel ist die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ in Abhängigkeit von der Lage φ .

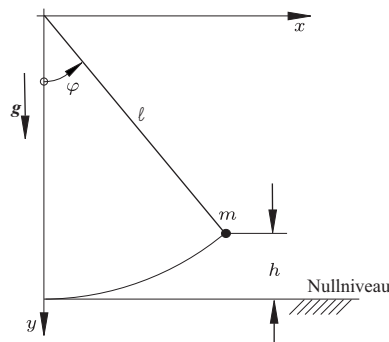


Abb. 9.13: Mathematisches Pendel.

Da die Gewichtskraft als einzige hier auftretende äußere Kraft ein Potential besitzt, können wir den Energiesatz anwenden. Für die Kreisbewegung der Pendelmasse ergibt sich die kinetische Energie zu

$$E = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2.$$

Wird das Nullniveau des Potentials der Gewichtskraft bei $\varphi = 0$ gewählt, dann ist die potentielle Energie

$$V = mgh = mg\ell(1 - \cos \varphi).$$

Der Energiesatz in integraler Form liefert dann $E + V = E_{\text{ges}} = \text{const.}$, wobei sich die Konstante aus der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie im Anfangszustand ergibt. Damit ist insgesamt

$$\frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = E_{\text{ges}}$$

bzw.

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2}{m} (E_{\text{ges}} - mgl(1 - \cos \varphi))}.$$

Aufgrund der Energieerhaltung kann die Konstante E_{ges} auch aus dem maximalen Pendelwinkel φ_1 (Umkehrpunkt der Bewegung, nur potentielle Energie) zu

$$E_{\text{ges}} = 0 + mgl(1 - \cos \varphi_1)$$

bzw. aus der Maximalgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_0$ ($\varphi_0 = 0$, nur kinetische Energie)

$$E_{\text{ges}} = \frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}_0^2 + 0$$

bestimmt werden. Gleichsetzen der beiden Ausdrücke liefert die Beziehung zwischen dem maximalen Pendelwinkel und der Maximalgeschwindigkeit:

$$\frac{m}{2} \ell^2 \dot{\varphi}_0^2 = mgl(1 - \cos \varphi_1) \text{ oder } \dot{\varphi}_0 = \sqrt{\frac{2g}{\ell} (1 - \cos \varphi_1)}.$$

Es findet ein permanenter Wechsel zwischen kinetischer und potentieller Energie statt.

3. Bewegung einer Stange zwischen zwei Walzen

Gesucht ist die Bewegungsgleichung der Stange bei gegebenen Massen m_1, m_2, m_3 , der drei Körper, gegebenen Federsteifigkeiten c_1 und c_2 sowie gegebener konstanter Kraft F . Das System hat einen Freiheitsgrad. Zweckmäßig ist die Wahl der Stangenverschiebung x als Freiheitsgrad. Die kinematischen Beziehungen lauten dann:

Für die obere Walze:

$$\omega_1 = \frac{\dot{x}}{2r_1},$$

$$\dot{x}_1 = \omega_1 r_1 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_1 = \frac{x}{2}.$$

Für die untere Walze:

$$\omega_2 = -\frac{\dot{x}}{2r_2},$$

$$\dot{x}_2 = -\omega_2 r_2 = \frac{\dot{x}}{2}, \quad x_2 = \frac{x}{2}.$$

Die gesamte kinetische Energie und die gesamte potentielle Energie des Systems lauten:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \theta_1^{C_1} \omega_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} \theta_2^{C_2} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 \dot{x}^2,$$

$$V = \frac{1}{2} c_1 x_1^2 + \frac{1}{2} c_2 x_2^2 - Fx.$$

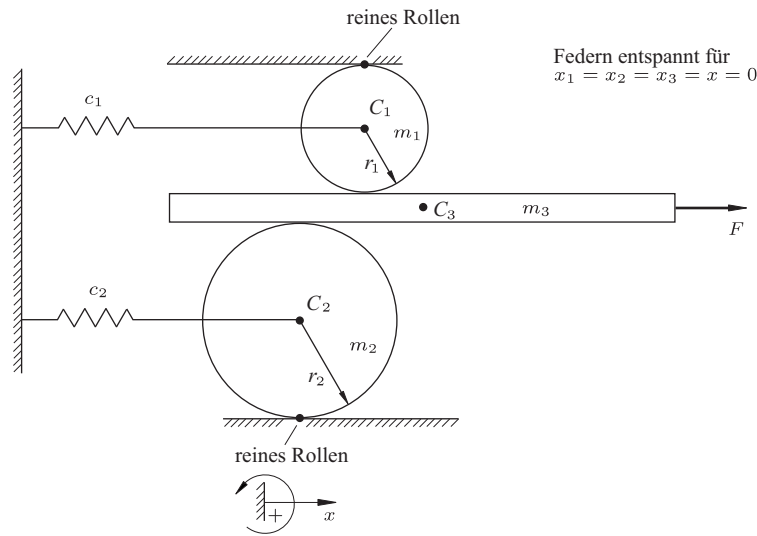


Abb. 9.14: Stange zwischen zwei Walzen.

Mit den Massenträgheitsmomenten $\theta_1^{C_1} = \frac{1}{2}m_1r_1^2$ und $\theta_2^{C_2} = \frac{1}{2}m_2r_2^2$ der Walzen und unter Verwendung der kinematischen Beziehungen ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}m_1 \frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2}m_1 \frac{r_1^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{4r_1^2} + \frac{1}{2}m_2 \frac{\dot{x}^2}{4} + \frac{1}{2} \frac{m_2 r_2^2}{2} \frac{\dot{x}^2}{4r_2^2} + \frac{1}{2}m_3 \dot{x}^2 \\
 &= \left(\frac{3}{16}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{1}{2}m_3 \right) \dot{x}^2,
 \end{aligned}$$

$$V = \frac{c_1}{2} \frac{x^2}{4} + \frac{c_2}{2} \frac{x^2}{4} - Fx = \frac{1}{8}(c_1 + c_2)x^2 - Fx.$$

Der Energiesatz in integraler Form, $E + V = \text{const.}$, liefert dann

$$\left(\frac{3}{16}m_1 + \frac{3}{16}m_2 + \frac{m_3}{2} \right) \dot{x}^2 + \frac{1}{8}(c_1 + c_2)x^2 - Fx = \text{const.},$$

woraus nach Ableitung der Energiesatz in differentieller Form zu

$$\left(\frac{3}{8}m_1 + \frac{3}{8}m_2 + m_3 \right) \ddot{x} + \frac{1}{4}(c_1 + c_2)x - F = 0$$

folgt. Dies ist die gesuchte Bewegungsgleichung der Stange. Sie ist unabhängig von den Radien der Walzen.

◇

9.3 Virtuelle Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen

Mit den Leistungs-, Arbeits- und Energiebilanzen ist es bereits möglich, Bewegungsgleichungen ohne die Ermittlung von Schnittreaktionen bei Vorliegen von

Bindungen herzuleiten. Allerdings liefern diese Bilanzen nur eine skalare Gleichung. Dies ist für Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad nicht ausreichend. Wir wollen daher diese Methoden noch weiter verallgemeinern, indem nicht auf die wirklichen kinematischen Feldgrößen, sondern auf mögliche Feldgrößen, die virtuellen Geschwindigkeiten oder die virtuellen Verschiebungen, projiziert wird.

9.3.1 Die Methode der virtuellen Geschwindigkeiten

Die Herleitung der Methode der virtuellen Geschwindigkeiten verläuft analog zur Gewinnung der Leistungssätze in Abschnitt 9.2.1. Als eine Vorbereitung zur Formulierung der Methode wird zunächst für einen beliebigen Körper in seiner Momentanlage ein virtuelles Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathcal{P}, t)$ eingeführt, von dem lediglich verlangt wird, dass es einmal stückweise differenzierbar bezüglich der Ortskoordinaten ist. Sonst kann das Geschwindigkeitsfeld beliebig gewählt werden. Es gilt also

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v},$$

wobei $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathcal{P}, t)$ das wirkliche Geschwindigkeitsfeld des Körpers ist und deshalb die Eigenschaft $\mathbf{v} := \dot{\mathbf{r}}$ besitzt.

Beispiel 9.26

1. Starrer Klotz auf starrer schiefer Ebene.
Für den Massenmittelpunkt C des Körpers gilt

$$\mathbf{r} = x \mathbf{e}_x,$$

deshalb ist die wirkliche Geschwindigkeit \mathbf{v} von C :

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x} \mathbf{e}_x.$$

Sie verläuft also parallel zur schiefen Ebene. Wählt man dagegen die in der Abbildung skizzierte virtuelle Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$, so erlaubt man dem starren Klotz, virtuell in die starre Ebene einzudringen.

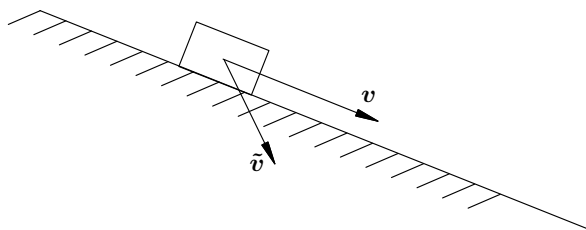


Abb. 9.15: Wirkliche und virtuelle Geschwindigkeit an einem Klotz auf der schiefen Ebene.

2. Kreisbewegung eines materiellen Punkts \mathcal{P} eines starren Körpers.
Für die wirkliche Bewegung \mathcal{P} gilt

$$\mathbf{r} = R_0 \mathbf{e}_R(t) \text{ mit } R_0 = \text{const.}$$

Deshalb ist die wirkliche Geschwindigkeit

$$\mathbf{v} := \frac{d\mathbf{r}}{dt} = R_0 \frac{d\mathbf{e}_R}{dt} = R_0 \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi(t).$$

Wählt man dagegen die in der Abbildung skizzierte virtuelle Geschwindigkeit $\tilde{\mathbf{v}}$ von \mathcal{P} , so erlaubt man dem starren Körper, sich in Radialrichtung virtuell auszudehnen.

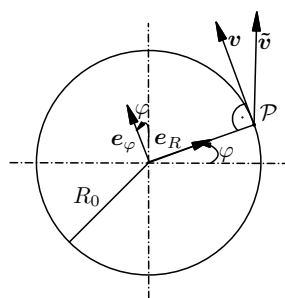


Abb. 9.16: Wirkliche und virtuelle Geschwindigkeit für die Kreisbewegung des materiellen \mathcal{P} Punkts eines starren Körpers.

◇

Mit Hilfe von $\tilde{\mathbf{v}}$ definiert man virtuelle Leistungen.

Definition 9.27 (Virtuelle Leistungen)

Es sei $\tilde{\mathbf{v}}$ ein virtuelles Geschwindigkeitsfeld. Dann ist

1. die **virtuelle Leistung der Massenbeschleunigungen** definiert als

$$\tilde{P}_{\text{Mb}} := \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm \quad (\text{analog zu } \dot{E} := \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm),$$

2. die **virtuelle äußere Leistung** definiert als

$$\tilde{P}_{\text{a}} := \int_S \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_S \, dS + \int_V \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{f}_V \, dV \quad (\text{analog zu } P_{\text{a}}),$$

3. die **virtuelle innere Leistung** definiert als

$$\tilde{P}_{\text{i}} := \tilde{P}_{\text{a}} - \tilde{P}_{\text{Mb}} \quad (\text{analog zu } P_{\text{i}} := P_{\text{a}} - \dot{E}). \quad (9.18)$$

Analog zum allgemeinen Leistungssatz beweist man den

Satz 9.28 (Addierbarkeit der virtuellen inneren Leistungen)

Die virtuelle innere Leistung eines Systems aus n Körpern ist gleich der Summe der virtuellen inneren Leistungen der einzelnen Körper.

Die Methode der virtuellen Geschwindigkeiten beruht darauf, dass man für verschiedene Strukturen (so z.B. für starre Körper, masselose Verbindungselemente und deformierbare Körper) die jeweilige virtuelle innere Leistung \tilde{P}_i bestimmt. Sind wieder nur die Bewegungsgleichungen, nicht aber die Reaktionskräfte an den Bindungen von Interesse, dann werden die virtuellen Geschwindigkeiten so gewählt, dass sie dort den wirklichen Geschwindigkeiten oder wenigstens ihrer Richtung entsprechen, wo bspw. durch Bindungen der Geschwindigkeitszustand bereits bekannt ist. Man sagt dazu, die virtuellen Geschwindigkeiten sind mit den Bindungen verträglich.

Wir gehen von der allgemeinen Definition (9.18)

$$\tilde{P}_i := \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb} \quad (9.19)$$

der virtuellen inneren Leistungen \tilde{P}_i aus und bestimmen \tilde{P}_i für die zwei wesentlichen Teilsysteme eines diskreten Systems, d.h. für einen starren Körper und ein masseloses Verbindungselement. Dabei nehmen wir nicht notwendigerweise, jedoch zweckmäßigerweise an, dass bei einem starren Körper das virtuelle Geschwindigkeitsfeld die Bedingung

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}_C + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{c} \quad (\text{analog zu } \mathbf{v} = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c})$$

erfüllt. Demnach wird der starre Körper auch virtuell als starr angenommen und die virtuellen Geschwindigkeitsfelder sind mit den inneren Bindungen des Körpers verträglich. Substituiert man damit in den Ausdrücken für P_a , P_i und \dot{E} in den Abschnitten 9.1.2 und 9.1.3 die dort auftretenden wirklichen Größen \mathbf{v} , \mathbf{v}_C , $\boldsymbol{\omega}$, P_a , \dot{E} und P_i durch die entsprechenden virtuellen Größen $\tilde{\mathbf{v}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_C$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, \tilde{P}_a , \tilde{P}_{Mb} und \tilde{P}_i , so gewinnt man die folgenden Beziehungen:

1. Für den auch virtuell starren Körper gilt

$$\tilde{P}_{Mb} = \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \dot{\mathbf{I}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C \quad (\text{analog zu } \dot{E} = \mathbf{v}_C \cdot \dot{\mathbf{I}} + \boldsymbol{\omega} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C) \quad (9.20)$$

und

$$\tilde{P}_a = \tilde{\mathbf{v}}_C \cdot \mathbf{F} + \tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{M}^C \quad (\text{analog zu } P_a = \mathbf{v}_C \cdot \mathbf{F} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{M}^C). \quad (9.21)$$

Folglich gilt unter Berücksichtigung von $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$ in diesem Fall

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a - \tilde{P}_{Mb} = 0, \quad \text{d.h. } \tilde{P}_a = \tilde{P}_{Mb}.$$

2. Für ein masseloses Verbindungselement gilt

$$\tilde{P}_{Mb} = 0 \quad (\text{analog zu } \dot{E} = 0)$$

somit auch

$$\tilde{P}_i = \tilde{P}_a \quad (\text{analog zu } P_i = P_a)$$

Wird die Wirkung des masselosen Verbindungselements durch eine Einzelkraft \mathbf{F}_E repräsentiert, dann ist

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P}_a = \Delta\tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F}_E,$$

wobei $\Delta\tilde{\mathbf{v}}$ die virtuelle Relativgeschwindigkeit, also die Differenz der virtuellen Geschwindigkeiten am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes ist, während für ein freies Moment \mathbf{M}

$$\tilde{P}_1 = \tilde{P}_a = \Delta\tilde{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{M}$$

gilt, wobei $\Delta\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ die virtuelle relative Drehgeschwindigkeit, also die Differenz der virtuellen Drehgeschwindigkeiten am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes ist.

3. Mit (9.20) und (9.21) gewinnt man für die Beschreibung der ebenen Bewegung eines diskreten Systems von n starren Körpern unter Einwirkung von M diskreten Einzelkräften und jeweils höchstens einem freien Moment pro starrem Körper¹⁰ die Beziehungen

$$\tilde{P}_{Mb} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \dot{D}_k^{C_k} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k$$

und

$$\tilde{P}_a = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \mathbf{M}_k$$

wobei $\tilde{\mathbf{v}}_m$ die virtuelle Geschwindigkeit des Angriffspunkts der diskreten Einzelkraft \mathbf{F}_m ist, die mit Hilfe der Geschwindigkeitsbeziehung für den starren Körper aus dessen virtueller Geschwindigkeit des Massenmittelpunkts und der virtuellen Drehgeschwindigkeit berechnet wird. Damit folgt aus (9.19)

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{v}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{v}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right) + \tilde{P}_1, \quad (9.22)$$

wobei \tilde{P}_1 die virtuelle innere Leistung der masselosen Verbindungselemente umfasst. Diese Gleichung bildet die Grundlage der Methode der virtuellen Geschwindigkeiten für die ebene Bewegung eines diskreten Systems.

9.3.2 Methode der virtuellen Verschiebungen

Analog zu einem virtuellen Geschwindigkeitsfeld $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}(\mathcal{P}, t)$ führt man in der Momentanlage eines Körpers ein virtuelles Verschiebungsfeld

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}(\mathcal{P}, t)$$

ein. Mit Hilfe von $\tilde{\mathbf{r}}$ definiert man:

¹⁰Liegen mehrere freie Momente vor, so können sie durch Addition zu einem freien Moment zusammengefasst werden; greift an einem starren Körper kein freies Moment an, so ist das freie Moment durch den Nullvektor zu ersetzen.

1. die virtuelle Arbeit der Massenbeschleunigungen

$$\tilde{W}_{\text{Mb}} := \int_{\mathcal{B}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm \quad (\text{analog zu } dE := \int_{\mathcal{B}} d\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, dm)$$

2. die virtuelle äußere Arbeit

$$\tilde{W}_{\text{a}} := \int_{\mathcal{S}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_{\text{S}} \, dS + \int_{\mathcal{V}} \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{f}_{\text{V}} \, dV \quad (\text{analog zu } dW_{\text{a}})$$

3. die virtuelle innere Arbeit

$$\tilde{W}_{\text{i}} := \tilde{W}_{\text{a}} - \tilde{W}_{\text{Mb}} \quad (\text{analog zu } dW_{\text{i}} := dW_{\text{a}} - dE)$$

Direkt aus Satz 9.28 folgt der

Satz 9.29 (Addierbarkeit der virtuellen inneren Arbeiten)

Die virtuelle innere Arbeit eines Systems aus n Körpern ist gleich der Summe der virtuellen inneren Arbeiten der einzelnen Körper.

Die Methode der virtuellen Verschiebungen beruht darauf, dass man für verschiedene Strukturen – analog zu \tilde{P}_i – die jeweilige virtuelle innere Arbeit \tilde{W}_i bestimmt. Sie wird auch als Prinzip der virtuellen Arbeit und vor allem in der Dynamik, wenn die Trägheitsterme gemäß d'Alembert wie Kräfte und Momente behandelt werden, auch als Prinzip von d'Alembert in der Fassung von Lagrange bezeichnet.¹¹ In diesem Fall wird mit $\tilde{W}_{\text{Tr}} = -\tilde{W}_{\text{Mb}}$ die virtuelle Arbeit der d'Alembertschen Trägheitsreaktionen eingeführt, so dass dann $\tilde{W}_i = \tilde{W}_{\text{a}} + \tilde{W}_{\text{Tr}}$ gilt.

Wegen der Analogie zwischen den virtuellen Geschwindigkeiten und den Verschiebungen stellt die Methode der virtuellen Verschiebungen lediglich eine andere, jedoch äquivalente Formulierung der Methode der virtuellen Geschwindigkeiten dar. Auch hier gilt: Ist man nur an den Bewegungsgleichungen interessiert, dann werden die virtuellen Verschiebungen so gewählt, dass sie dort den wirklichen Verschiebungen oder wenigstens ihrer Richtung entsprechen, wo bspw. durch Bindungen der Verschiebungszustand bereits bekannt ist. Man sagt dazu, die virtuellen Verschiebungen sind mit den Bindungen verträglich.

Analog zum vorherigen Abschnitt gehen wir von der allgemeinen Definition

$$\tilde{W}_i := \tilde{W}_{\text{a}} - \tilde{W}_{\text{Mb}} \tag{9.23}$$

der virtuellen inneren Arbeit \tilde{W}_i aus und bestimmen \tilde{W}_i für einen starren Körper unter Beachtung der zur Geschwindigkeitsformel für den starren Körper analogen Gleichung

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{\mathbf{r}}_C + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathbf{c} \tag{9.24}$$

¹¹Der Begriff „Prinzip“ deutet darauf hin, dass die Methode axiomatischen Charakter hat und auch anstelle der Newton-Eulerschen Gesetze zum axiomatischen Aufbau verwendet werden kann. Hierfür müssen aus der Integralformulierung wieder die Differentialgleichungen für Impuls und Drall der Newton-Eulerschen Gesetze hergeleitet werden. Dies gelingt mit dem Fundamentallema der Variationsrechnung.

sowie für ein masseloses Verbindungselement. Nach formalem Ersetzen der virtuellen Geschwindigkeiten $\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{v}}_C, \tilde{\boldsymbol{\omega}}$ durch die entsprechenden virtuellen Verschiebungen $\tilde{\mathbf{r}}, \tilde{\mathbf{r}}_C$ und die virtuelle Drehung $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ sowie der virtuellen Leistungen $\tilde{P}_{\text{Mb}}, \tilde{P}_a, \tilde{P}_i$ durch die entsprechenden virtuellen Arbeiten $\tilde{W}_{\text{Mb}}, \tilde{W}_a, \tilde{W}_i$ in (9.20) bis (9.22) gewinnen wir die nachstehenden Beziehungen:

1. Für den starren Körper unter Beachtung von Gl. (9.24) gilt

$$\tilde{W}_{\text{Mb}} = \tilde{\mathbf{r}}_C \cdot \dot{\mathbf{I}} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \dot{\mathbf{D}}^C \quad (9.25)$$

und

$$\tilde{W}_a = \tilde{\mathbf{r}}_C \cdot \mathbf{F} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M}^C. \quad (9.26)$$

Folglich gilt (unter Berücksichtigung von $\dot{\mathbf{I}} = \mathbf{F}$ und $\dot{\mathbf{D}}^C = \mathbf{M}^C$) in diesem Fall

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a - \tilde{W}_{\text{Mb}} = 0, \text{ d.h. } \tilde{W}_a = \tilde{W}_{\text{Mb}}.$$

2. Für ein masseloses Verbindungselement gilt

$$\tilde{W}_{\text{Mb}} = 0, \text{ d.h. } \tilde{W}_i = \tilde{W}_a$$

Wird die Wirkung des masselosen Verbindungselements durch eine Einzelkraft \mathbf{F}_E repräsentiert, dann ist

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_a = \Delta \tilde{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}_E,$$

wobei $\Delta \tilde{\mathbf{r}}$ die virtuelle Relativverschiebung, also die Differenz der virtuellen Verschiebungen am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes ist, während für ein freies Moment \mathbf{M}

$$\tilde{W}_i = \tilde{W}_W = \Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \cdot \mathbf{M}$$

gilt, wobei $\Delta \tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ die virtuelle relative Drehung, also die Differenz der virtuellen Drehungen am End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes ist.

3. Mit (9.25) und (9.26) gewinnt man für die ebene Bewegung eines diskreten Systems von n starren Körpern unter Einwirkung von M diskreten Einzelkräften und höchstens einem freien Moment pro starrem Körper die Beziehungen

$$\tilde{W}_{\text{Mb}} = \sum_{k=1}^n \tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k$$

und

$$\tilde{W}_a = \sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \mathbf{M}_k,$$

wobei $\tilde{\mathbf{r}}_m$ die virtuelle Verschiebung des Angriffspunkts der diskreten Einzelkraft \mathbf{F}_m ist. Sie wird aus einer zur Geschwindigkeitsermittlung analogen Formel ermittelt. Greift die Kraft am k . Körper an und ist \mathbf{r}_{km} der

Ortsvektor vom Bezugspunkt des körperfesten Koordinatensystems zum Angriffspunkt der Kraft, dann ist

$$\tilde{\mathbf{r}}_m = \tilde{\mathbf{r}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \times \mathbf{r}_{km}.$$

Damit folgt aus (9.23)

$$\sum_{m=1}^M \tilde{\mathbf{r}}_m \cdot \mathbf{F}_m + \sum_{k=1}^n \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \mathbf{M}_k = \sum_{k=1}^n \left(\tilde{\mathbf{r}}_{C_k} \cdot m_k \dot{\mathbf{v}}_{C_k} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_k \cdot \boldsymbol{\Theta}_k^{C_k} \dot{\boldsymbol{\omega}}_k \right) + \tilde{W}_i,$$

wobei \tilde{W}_i die virtuelle innere Arbeit der masselosen Verbindungselemente umfasst. Diese Gleichung lässt sich auch direkt aus (9.22) herleiten nach formalem Ersetzen von $\tilde{\mathbf{v}}$ durch $\tilde{\mathbf{r}}$, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ durch $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}$ und \tilde{P}_i durch \tilde{W}_i . Sie bildet die Grundlage der Methode der virtuellen Verschiebungen für die ebene Bewegung eines diskreten Systems.

Beispiel 9.30 (Schiefe Ebene mit Umlenkrolle)

Die Methode der virtuellen Verschiebungen ist besonders geeignet für diskrete Systeme mit einem Freiheitsgrad. Zur Illustration untersuchen wir die Bewegung eines Klotzes auf einer schiefen Ebene mit Umlenkrolle und Gegengewicht. Das System hat einen Freiheitsgrad.

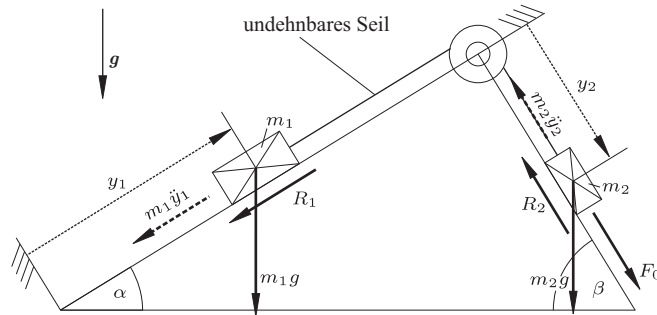


Abb. 9.17: Klotz auf schiefer Ebene mit Umlenkrolle und Gegengewicht.

Wir wählen $y = y_1 = y_2$ als Freiheitsgrad. Es ist dann $\tilde{y}_1 = \tilde{y}_2 = \tilde{y}$. Die virtuelle Arbeit am Klotz mit Masse m_1 ist

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} = -R_1 \tilde{y}_1 - m_1 g \sin \alpha \tilde{y}_1 - m_1 \ddot{y}_1 \tilde{y}_1$$

mit $R_1 = \mu m_1 g \cos \alpha$. Für den Klotz mit Masse m_2 ergibt sich

$$\tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = -R_2 \tilde{y}_2 + m_2 g \sin \beta \tilde{y}_2 + F_0 \tilde{y}_2 - m_2 \ddot{y}_2 \tilde{y}_2$$

mit $R_2 = \mu m_2 g \cos \beta$. Die Methode der virtuellen Verschiebungen erfordert

$$\tilde{W}_{a_1} + \tilde{W}_{Tr_1} + \tilde{W}_{a_2} + \tilde{W}_{Tr_2} = 0$$

und somit

$$0 = (-\mu m_1 g \cos \alpha - m_1 g \sin \alpha - m_1 \ddot{y} - \mu m_2 g \cos \beta + m_2 g \sin \beta + F_0 - m_2 \ddot{y}) \tilde{y}.$$

Da \tilde{y} eine beliebige virtuelle Verschiebung ist, muss der Vorfaktor verschwinden. Wir erhalten dann die Bewegungsgleichung

$$(m_1 + m_2)\ddot{y} + \mu g(m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta) + g(m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta) - F_0 = 0$$

Mit der Methode der virtuellen Verschiebungen lässt sich die Bewegungsgleichung mit relativ wenig Aufwand herleiten. Ist jedoch die Seilkraft gesucht, dann muss mit Freischnitt und Massenmittelpunktsatz gearbeitet werden. \diamond

9.4 Lagrange-Gleichungen 2. Art

Die zuvor vorgestellten Methoden eignen sich bereits als Grundlage für numerische Berechnungsverfahren. Die Festlegung der einzelnen virtuellen Verschiebungen oder Geschwindigkeiten und die Zurückführung auf geeignete Koordinaten für die Freiheitsgrade sowie die Ordnung der Terme zur Herleitung von Bewegungsgleichungen ist jedoch insbesondere bei Mehrfreiheitsgradsystemen aufwändig und fehleranfällig. Wir wollen daher diese Schritte bereits vorab ausführen und hierzu die virtuellen Verschiebungen durch eine Variation des Verschiebungsfeldes nach den generalisierten Koordinaten ersetzen. Dazu beschränken wir uns auf diskrete Systeme mit holonomen Bindungen.

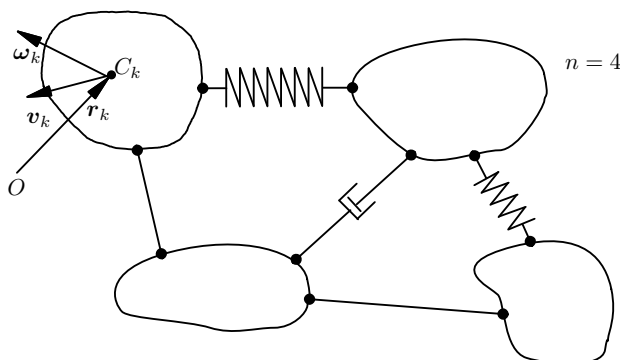


Abb. 9.18: Diskretes System mit holonomen Bindungen.

Die Bewegung $\mathbf{r} = \boldsymbol{\kappa}(\mathcal{P}, t)$ des Systems lässt sich als Funktion der generalisierten Koordinaten q_i auffassen:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathcal{P}, t, q_i) \text{ mit } q_i = q_i(t).$$

Um hier die Änderung der Bewegung in Abhängigkeit der generalisierten Koordinaten ausdrücken zu können, benötigen wir eine Ableitung. Dabei ist jedoch zu beachten, dass das Argument $q_i(t)$ keine Variable, sondern selbst eine Funktion ist. Die Ableitung einer Funktion nach einer anderen Funktion können wir aber nicht ohne Weiteres mit Hilfe der klassischen Definition

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

der Ableitung bilden, denn wie wäre dann $h \rightarrow 0$ für Funktionen $x(t)$ als Argument zu verallgemeinern? Ein ähnliches Problem tritt bereits bei der Ableitung von Funktionen mit Vektoren als Argument auf. Auch hier kann ja nicht einfach

$$\frac{f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x})}{\mathbf{h}}$$

gebildet werden, da die Division durch einen Vektor nicht erklärt ist. Einen Ausweg lieferte hier die Richtungsableitung

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{v}) - f(\mathbf{x})}{h} = \frac{\partial}{\partial h} f(\mathbf{x} + h\mathbf{v})|_{h=0}.$$

Damit konnte für jede Richtung \mathbf{v} die Änderung der Funktion in diese Richtung bestimmt werden. Genauso lässt sich nun auch für Funktionen von Funktionen vorgehen.

Definition 9.31 (Gâteaux-Differential, erste Variation)

Es sei $f(x(t))$ eine Funktion der Funktion $x(t)$ und $v(t)$ eine weitere Funktion. Die Ableitung

$$\delta_{v(t)}f(x(t)) = \frac{\partial}{\partial h} f(x(t) + hv(t))|_{h=0}$$

heißt das **Gâteaux-Differential** oder die **erste Variation** von $f(x(t))$ an der Stelle $x(t)$ in Richtung der Funktion $v(t)$.

Beispiel 9.32

Wird die Variation des Identitätsfunktional $I_{t_0}(x(t)) = x(t_0)$ in Richtung einer Funktion $v(t)$ gebildet, wobei t_0 fest aber beliebig gewählt ist, dann erhalten wir

$$\delta_{v(t)}I_{t_0}(x(t)) = \frac{\partial}{\partial h} I_{t_0}(x(t) + hv(t))|_{h=0} = \frac{\partial}{\partial h} (x(t_0) + hv(t_0))|_{h=0} = v(t_0).$$

Da dieses Ergebnis für beliebige Werte t_0 gilt, wird in der Literatur dafür auch kurz $\delta x = v$ geschrieben; statt der Funktion $v(t)$ verwendet man also das Symbol δx , um die Variationsrichtung zu kennzeichnen. \diamond

Die Richtungsableitung $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x})$ lässt sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Funktion $f(\mathbf{x})$, also der Richtungsableitung in Richtung der Koordinaten ausdrücken. Es gilt

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}) = \text{grad } f \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i.$$

Genauso ist dies auch durch Anwendung der Kettenregel für die erste Variation möglich:

$$\delta_{v(t)}f(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial h} f(\mathbf{x}(t) + hv(t))|_{h=0} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{\mathbf{x}(t)} v_i(t).$$

Dabei bedeutet die Schreibweise

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}(t)},$$

dass nach den Argumenten x_i der Funktion wie nach Variablen abzuleiten ist und anschließend die Variable \mathbf{x} durch die Funktion $\mathbf{x}(t)$ zu ersetzen ist. Mit der symbolischen Notation aus dem Beispiel erhalten wir damit

$$\delta f(\mathbf{x}(t)) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}(t)} \delta x_i(t).$$

Sind hier die Funktionen $x_i(t)$ unabhängig voneinander, so erhält man eine Entwicklung der Variation von $f(\mathbf{x}(t))$ nach den voneinander unabhängigen $\delta x_i(t)$ mit den Entwicklungskoeffizienten

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{\mathbf{x}(t)}.$$

Hat man mehrere Terme in einer Gleichung nach $\delta x_i(t)$ entwickelt, dann lässt sich bspw. ein Koeffizientenvergleich durchführen.

Wir wollen diese Überlegungen für holonome Systeme auf den Ortsvektor $\mathbf{r}(\mathcal{P}, t, q_i)$, $i = 1, \dots, f$, f : Anzahl Freiheitsgrade, anwenden, dessen einzelne Koordinaten Funktionale der generalisierten Koordinaten $q_i(t)$ sind, die die Bewegung beschreiben. Wir wollen den Ortsvektor nach den generalisierten Koordinaten q_i , die ja im Fall holonomer Bindungen unabhängige Funktionen darstellen, variieren und diesen Ausdruck dann für die virtuelle Verschiebungen einsetzen. Die Variation $\delta \mathbf{r}$ der Verschiebung ist:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \delta q_i. \quad (9.27)$$

Beispiel 9.33 (Mathematisches Pendel mit Fußpunktverschiebung)

Ist der Fußpunkt des Pendels elastisch mit der Umgebung befestigt, dann hat das System zwei Freiheitsgrade. Wir wählen die Verschiebung y des Pendelfußpunkts und den Pendelwinkel φ als generalisierte Koordinaten: $q_1 = y$, $q_2 = \varphi$.

Für den Ortsvektor \mathbf{r}_{el} der Pendelmasse erhalten wir

$$\mathbf{r}_{\text{el}} = \begin{bmatrix} \ell \sin \varphi \\ y + \ell \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \sin q_2 \\ q_1 + \ell \cos q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\text{el}}(q_1, q_2).$$

Wird hingegen der Fußpunkt geführt, z.B. durch eine harmonische Bewegung $y = y_0 \sin(\omega t)$, dann hat das System nur noch einen Freiheitsgrad und somit eine generalisierte Koordinate $q_2 = \varphi$. Der Ortsvektor \mathbf{r}_{gef} der Pendelmasse dieses Systems ist dann

$$\mathbf{r}_{\text{gef}} = \begin{bmatrix} \ell \sin \varphi \\ y_0 \sin(\omega t) + \ell \cos \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell \sin q_2 \\ y_0 \sin(\omega t) + \ell \cos q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{r}_{\text{gef}}(q_2, t).$$

Der Ortsvektor ist aufgrund der Fußpunktbewegung in diesem Fall explizit von der Zeit abhängig.

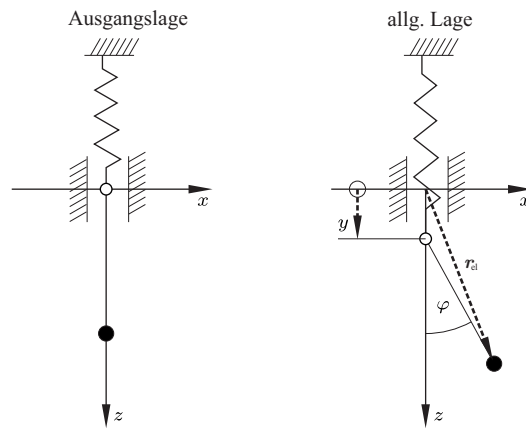


Abb. 9.19: Mathematisches Pendel mit Fußpunktverschiebung.

Wir wollen nun für beide Fälle die virtuelle Verschiebung berechnen. Im ersten Fall erhalten wir

$$\delta \mathbf{r}_{\text{el}}(q_1, q_2) = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{el}}}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{el}}}{\partial q_2} \delta q_2$$

und somit

$$\delta \mathbf{r}_{\text{el}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta q_1 + \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} \delta q_2 = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \delta q_2 \\ \delta q_1 - \ell \sin q_2 \delta q_2 \end{bmatrix}.$$

Wird der Fußpunkt geführt, dann ist

$$\delta \mathbf{r}_{\text{gef}}(q_2, t) = \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{gef}}}{\partial q_2} \delta q_2$$

da die Zeit t als Variable nicht mitvariiert wird und daher die partielle Ableitung nach der Zeit nicht berücksichtigt wird ($\delta t = 0!$). Es ergibt sich dann

$$\delta \mathbf{r}_{\text{gef}} = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} \delta q_2 = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \delta q_2 \\ -\ell \sin q_2 \delta q_2 \end{bmatrix}.$$

An diesem Beispiel wird deutlich, dass die Variation des Ortsvektors nicht mit seinem Differential identisch ist. Für das Differential der Funktion $\mathbf{r}_{\text{gef}}(q_2, t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d \mathbf{r}_{\text{gef}}(q_2, t) &= \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{gef}}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}_{\text{gef}}}{\partial t} dt = \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \\ -\ell \sin q_2 \end{bmatrix} dq_2 + \begin{bmatrix} 0 \\ y_0 \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 dq_2 \\ -\ell \sin q_2 dq_2 + y_0 \omega \cos(\omega t) dt \end{bmatrix} \end{aligned}$$

also einen völlig anderen Ausdruck, bei dem zudem q_2 als eine Variable und **nicht** als eine Funktion angesehen wird. \diamond

9.4.1 Generalisierte Kräfte

Ersetzen wir nun das virtuelle Verschiebungsfeld durch die Variation (9.27) der Verschiebung, dann erhalten wir aus der Methode der virtuellen Verschiebungen die Beziehung

$$\delta W_i = \delta W_a - \delta W_{Mb} \text{ bzw. } \delta W_{Mb} = \delta W_a - \delta W_i \quad (9.28)$$

wobei die virtuellen Arbeiten ebenfalls durch Variationen der Arbeiten ersetzt wurde. Die Variation der Arbeit der Massenbeschleunigungen lautet

$$\delta W_{Mb} := \left(\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m \right) \delta q_i, \quad (9.29)$$

wobei \mathcal{B} im Fall von Körpersystemen die materiellen Punkte aller Körper umfasst. Dieser Ausdruck wird im nächsten Abschnitt weiter untersucht. Die Variation der äußeren Arbeit lautet

$$\delta W_a := \left(\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{f}_S \, d S + \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{f}_V \, d V \right) \delta q_i,$$

wobei \mathcal{S} im Fall von Körpersystemen die materiellen Punkte aller Oberflächen umfasst. Speziell für eine Einzelkraft \mathbf{F}_E ist

$$\delta W_a = \mathbf{F}_E \cdot \delta \mathbf{r}_F,$$

wobei sich die Variation $\delta \mathbf{r}_F$ gemäß Gl. (9.27) zu $\delta \mathbf{r}_F = \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q_i} \delta q_i$ ergibt, so dass die Variation der äußeren Arbeit die Gestalt

$$\delta W_a = \mathbf{F}_E \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_F}{\partial q_i} \delta q_i$$

annimmt. Analog ergibt sich für ein freies Moment \mathbf{M}

$$\delta W_a = \mathbf{M} \cdot \delta \varphi = \mathbf{M} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Zur Ermittlung der partiellen Ableitungen muss dabei die Verschiebung \mathbf{r}_F bzw. die Verdrehung φ mit Hilfe der generalisierten Koordinaten ausgedrückt werden.

Im Fall von Starrkörpersystemen mit masselosen, deformierbaren Verbindungselementen umfasst δW_i nur die Variation der inneren Arbeit der Verbindungselemente. Wird die Wirkung eines Verbindungselements durch eine Einzelkraft \mathbf{F}_E repräsentiert, dann ist

$$\delta W_i = \frac{\partial \Delta \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{F}_E \delta q_i,$$

während bei Darstellung durch ein freies Moment \mathbf{M}

$$\delta W_i = \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial q_i} \cdot \mathbf{M} \delta q_i$$

gilt. Man beachte, dass $\Delta \mathbf{r}$ bzw. $\Delta \varphi$ die tatsächlichen Relativverschiebungen bzw. relativen Drehungen zwischen End- und Anfangspunkt des Verbindungselementes sind, die mit Hilfe kinematischer Beziehungen als Funktion der generalisierten Koordinaten ausgedrückt werden müssen.

Insgesamt lässt sich damit die Differenz aus $\delta W_a - \delta W_i$ als eine Linearkombination der Variation der generalisierten Koordinaten ausdrücken:

$$\delta W_a - \delta W_i = Q_i \delta q_i. \quad (9.30)$$

Die f Koeffizienten Q_i werden **generalisierte Kräfte** genannt.

Beispiel 9.34 (Elastisch aufgehängtes Pendel mit äußerer Kraft)

Wir betrachten wieder das Pendel mit elastischer Fußpunktverschiebung. Für die an der Pendelmassen angreifende äußere Kraft

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \varphi \\ -F_0 \sin \varphi \end{bmatrix}$$

wollen wir die generalisierten Kräfte ermitteln.

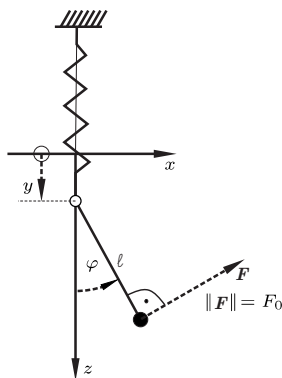


Abb. 9.20: Elastisch aufgehängtes Pendel mit äußerer Kraft \mathbf{F} .

Die Berechnung der generalisierten Kräfte erfolgt in folgenden Schritten:

Zunächst bilden wir unter Verwendung der vorab ermittelten Variation der Verschiebung der Pendelmassen die Variation der äußere Arbeit der Kraft

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cos \varphi \\ -F_0 \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos q_2 \\ -F_0 \sin q_2 \end{bmatrix}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \delta W_a &= \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{r}_{el} = \begin{bmatrix} F_0 \cos q_2 \\ -F_0 \sin q_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ell \cos q_2 \delta q_2 \\ \delta q_1 - \ell \sin q_2 \delta q_2 \end{bmatrix} \\ &= -F_0 \sin q_2 \delta q_1 + F_0 \ell \delta q_2. \end{aligned}$$

Anschließend schreiben wir die Variation der Arbeit mit den generalisierten Kräften und den Variationen der generalisierten Koordinaten aus:

$$\delta W_a = Q_i \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2.$$

Der Koeffizientenvergleich liefert dann:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -F_0 \sin q_2, \\ Q_2 &= F_0 \ell. \end{aligned}$$

◇

9.4.2 Herleitung der Lagrange-Gleichungen 2. Art

Nach Einsetzen der Variationsformulierungen (9.29) und (9.30) f auf der linken und rechten Seite von Gleichung (9.28) folgt

$$\left(\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m \right) \delta q_i = Q_i \delta q_i.$$

Diese Gleichung gilt für beliebige δq_i . Im Fall holonomer Bindungen, auf die wir uns ja beschränken wollen, sind nicht nur die generalisierten Koordinaten voneinander unabhängig, sondern auch die Variationen δq_i . Deshalb müssen auch die f Gleichungen

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, f) \quad (9.31)$$

gelten. Den auf der linken Seite stehenden Integranden formen wir wie folgt um:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (9.32)$$

Wegen

$$\mathbf{v} := \frac{d \mathbf{r}}{d t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \dot{q}_i$$

gilt

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}$$

und dies, mit

$$\frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right) \stackrel{\uparrow}{=} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{d \mathbf{r}}{d t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i}$$

(Vertauschungssatz von Schwarz)

in (9.32) eingesetzt, ergibt

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathbf{v} \right) - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial q_i} \cdot \mathbf{v}.$$

Damit wird auf der linken Seite von (9.31):

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m = \frac{d}{d t} \left(\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) d m \right) - \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) d m.$$

Die Differentiationen $\frac{\partial}{\partial q_i}$ und $\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}$ sind von der Integration über \mathcal{B} unabhängig. Deshalb gilt

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \dot{\mathbf{v}} \, d m = \frac{d}{d t} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) d m \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right) d m}_{=: E}$$

und damit gewinnen wir schließlich aus (9.31) f Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, 2, \dots, f. \quad (9.33)$$

Sie werden Lagrangesche Gleichungen 2. Art genannt.

Sämtliche in (9.33) auftretenden generalisierten Kräfte Q_i sind äußere, an den einzelnen starren Körpern angreifende Kraft- bzw. Momentenkomponenten. Wir zerlegen Q_i gemäß

$$Q_i = Q_i^p + Q_i^d \quad (9.34)$$

in die konservativen generalisierten Kräfte Q_i^p und die dissipativen generalisierten Kräfte Q_i^d . Für die konservativen generalisierten Kräfte Q_i^p existiert eine Potentialfunktion

$$V = V(q_1, q_2, \dots, q_f)$$

mit der Eigenschaft

$$Q_i^p = -\frac{\partial V}{\partial q_i},$$

wobei das Minuszeichen aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählt wurde. Dies, mit (9.34) in (9.33) eingesetzt, liefert die Lagrangeschen Gleichungen in der Gestalt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, f.$$

Diese Gleichungen können wegen

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

auch in der Form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^d, \quad i = 1, 2, \dots, f.$$

mit der durch

$$L := E - V$$

definierten **Lagrange-Funktional** L notiert werden.

Beispiel 9.35

1. Physikalisches Pendel

Das physikalische Pendel hat einen Freiheitsgrad. Wir wählen den Pendelwinkel φ als generalisierte Koordinate.

Für die kinetische Energie erhalten wir

$$E = \frac{1}{2}m(a\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\theta^C \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}\theta^O \dot{\varphi}^2.$$

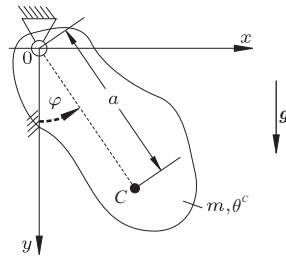


Abb. 9.21: Physikalisches Pendel.

Wird das Nullniveau der potentiellen Energie zweckmäßigerweise in Höhe des Auflagepunkts gelegt, dann ist die potentielle Energie

$$V = -mga \cos \varphi.$$

Weitere potentiallose Kräfte existieren nicht, d.h. $Q_\varphi \equiv 0$. Damit lautet die Lagrange-Funktion

$$L = E - V = \frac{1}{2} \theta^O \dot{\varphi}^2 + mga \cos \varphi.$$

und die Lagrange-Gleichung 2. Art

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0.$$

Die benötigten Ableitungen lauten:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \theta^O \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \theta^O \ddot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mga \sin \varphi.$$

Werden die Ableitungen in die Lagrange-Gleichung 2. Art eingesetzt, dann ergibt sich

$$\theta^O \ddot{\varphi} + mga \sin \varphi = 0.$$

2. Pendel mit Gleitbuchse

Für das skizzierte Pendel mit einer Gleitbuchse soll die Bewegungsgleichung ermittelt werden. Der Einfluss der Gewichtskraft soll dabei vernachlässigt werden. Das System hat wieder einen Freiheitsgrad, die generalisierte Koordinate ist auch hier der Pendelwinkel φ .

Die kinetische Energie ist

$$E = \frac{1}{2} \theta^O \dot{\varphi}^2.$$

Die potentielle Energie setzt sich aus der potentiellen Energie der beiden Federn zusammen:

$$V = \frac{1}{2} \frac{c}{2} (\Delta \ell)^2 + \frac{1}{2} \frac{c}{2} (\Delta \ell)^2,$$

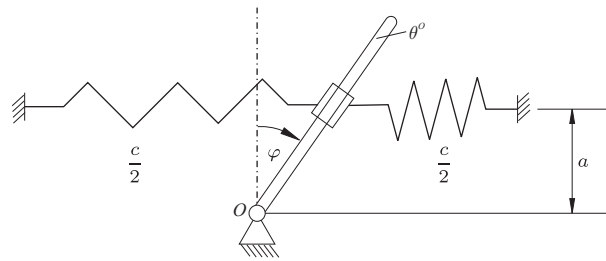


Abb. 9.22: Pendel mit Gleitbuchse.

mit $\Delta\ell = a \tan \varphi$. Somit lautet die Lagrange-Funktion

$$L = E - V = \frac{1}{2} \theta^O \dot{\varphi}^2 - \frac{c}{2} a^2 \tan^2 \varphi$$

und die Lagrange-Gleichung 2. Art ist wieder

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0,$$

da keine potentiallosen Kräfte zu berücksichtigen sind. Die benötigten Ableitungen lauten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \theta^O \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \theta^O \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -ca^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi}, \end{aligned}$$

so dass sich die Bewegungsgleichung zu

$$\theta^O \ddot{\varphi} + ca^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = 0$$

ergibt. Wir wollen das Ergebnis mit dem Drallgesetz überprüfen. Dazu werten wir den dargestellten Freischnitt gemäß d'Alembert aus.

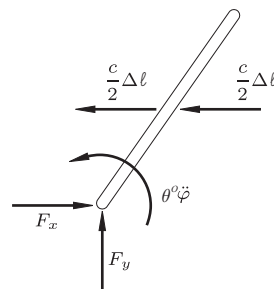


Abb. 9.23: Freischnitt gemäß d'Alembert für den Pendelstab.

Es ergibt sich dann die Bewegungsgleichung

$$\theta^O \ddot{\varphi} + \left(\frac{c}{2} \Delta\ell + \frac{c}{2} \Delta\ell \right) a = 0$$

mit $\Delta\ell = a \tan \varphi$, also insgesamt

$$\theta^O \ddot{\varphi} + ca^2 \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = 0.$$

Wie erklären sich die Unterschiede in den erhaltenen Bewegungsgleichungen?

Um den Punkt in $y = a$ zu halten, wird eine Führung benötigt bzw. eine Kraft, die so einzustellen ist, dass die Lage stets eingehalten wird. Dadurch wirkt eine Kraft auf die Buchse, die eine Komponente in Stabrichtung besitzt.

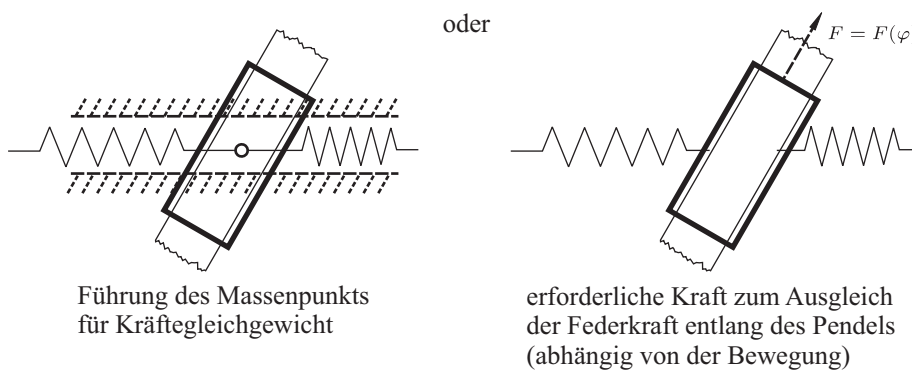


Abb. 9.24: Führung der Gleitbuchse.

Berücksichtigen wir die Gleitbuchse, dann muss der Freischnitt in 9.23 angepasst werden. Buchse und Pendelstab müssen separat freigeschnitten werden, die Federn greifen wie skizziert an der Buchse an, zwischen Buchse und Pendelstab sowie zwischen Buchse und Führung wirken Reaktionskräfte. Diesen Freischnitt zeigt Abbildung 9.25.

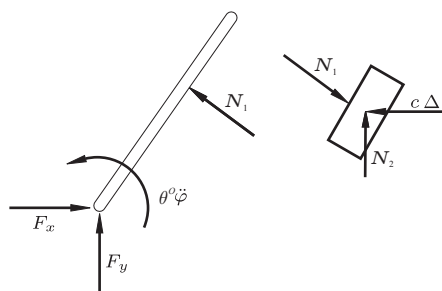


Abb. 9.25: Freischnitt gemäß d'Alembert für Pendelstab und Gleitbuchse.

Das horizontale Kräftegleichgewicht für die Buchse liefert dann

$$N_1 \cos \varphi - c \Delta\ell = 0$$

bzw.

$$N_1 = c \frac{\Delta \ell}{\cos \varphi} = c \frac{a \tan \varphi}{\cos \varphi}.$$

Für den Pendelstab erhalten wir dann aus dem Drallgesetz für den Drehpunkt:

$$\theta^O \ddot{\varphi} + N_1 \frac{a}{\cos \varphi} = 0$$

und somit ebenfalls die Bewegungsgleichung

$$\theta^O \ddot{\varphi} + ca^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} = 0.$$

Da die Normalkraft N_1 eine Reaktionskraft ist und daher senkrecht zur Bewegungsrichtung der Buchse steht, hat sie keine Auswirkung bei der Ermittlung der Lagrange-Gleichung 2. Art.

3. Relativbewegung: Massenpunkt in rotierendem Rohr

Für die Bewegung eines Massenpunkts mit Masse m , der in einem rotierenden Rohr geführt wird und mit dem Drehpunkt des Rohrs über eine Feder (Federkonstante c) und einen Dämpfer (Dämpferkonstante k) verbunden ist, wollen wir die Bewegungsgleichung herleiten. Da die Bewegung des Rohrs vorgegeben ist, hat das System einen Freiheitsgrad. Zweckmäßig ist die Wahl der Koordinate \tilde{x} im mitgedrehten Bezugssystem als generalisierte Koordinate.

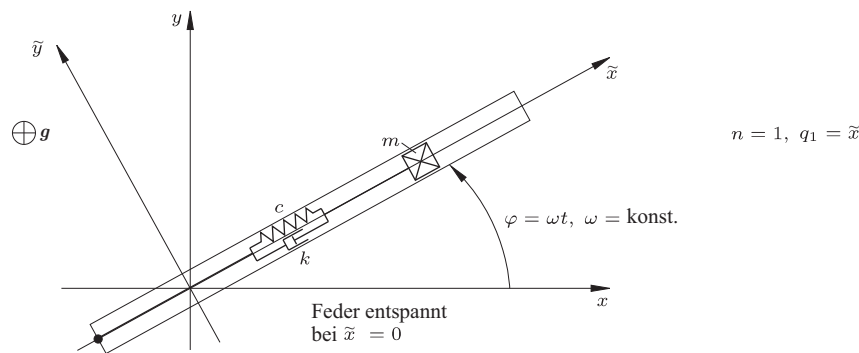


Abb. 9.26: Bewegung eines Massenpunkts in einem rotierenden Rohr.

Die kinetische Energie ist

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}.$$

Den Geschwindigkeitsvektor berechnen wir durch Ableitung des im raumfesten Bezugssystem aufgestellten Ortsvektors

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \cos(\omega t) \\ \tilde{x} \sin(\omega t) \end{bmatrix}$$

des Massenpunkts. Damit ergibt sich

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \cos(\omega t) - \tilde{x}\omega \sin(\omega t) \\ \dot{\tilde{x}} \sin(\omega t) + \tilde{x}\omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

und daraus

$$E = \frac{1}{2} m \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} m (\dot{\tilde{x}}^2 + (\tilde{x}\omega)^2)$$

Die potentielle Energie der Feder ist $V = \frac{1}{2} c \tilde{x}^2$. Die Dämpferkraft besitzt hingegen kein Potential und muss daher durch eine generalisierte Kraft berücksichtigt werden. Aus der Variation der inneren Arbeit des Dämpfers ergibt sich

$$-\delta W_i = -k \dot{\tilde{x}} \delta \tilde{x} = Q_{\dot{\tilde{x}}} \delta \tilde{x}, \text{ also } Q_{\dot{\tilde{x}}} = -k \dot{\tilde{x}}.$$

Die Lagrange-Funktion ist

$$L = E - V = \frac{1}{2} m (\dot{\tilde{x}}^2 + (\tilde{x}\omega)^2) - \frac{1}{2} c \tilde{x}^2$$

und die Lagrange-Gleichung 2. Art lautet

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} = Q_{\dot{\tilde{x}}},$$

wobei auf der rechten Seite der Gleichung mit $Q_{\dot{\tilde{x}}}$ die potentiallose Dämpferkraft berücksichtigt wurde. Die benötigten Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}} &= m \dot{\tilde{x}}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\tilde{x}}} \right) = m \ddot{\tilde{x}}, \\ \frac{\partial L}{\partial \tilde{x}} &= m \omega^2 \tilde{x} - c \tilde{x}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m \ddot{\tilde{x}} + k \dot{\tilde{x}} + (c - m \omega^2) \tilde{x} = 0.$$

4. System mit zwei Freiheitsgraden

Für das in Abb. 9.27 skizzierte System sollen die Bewegungsgleichungen mit der Methode der virtuellen Verschiebungen und den Lagrange-Gleichungen 2. Art hergeleitet werden. Als generalisierte Koordinaten werden die Auslenkung x und der Verdrehwinkel φ gewählt.

Ausgangspunkt für die Methode der virtuellen Verschiebungen ist das Gesamtsystem, wobei für eine Vorgehensweise gemäß d'Alembert zusätzlich die Trägheitsreaktionen eingezeichnet wurden. Zweckmäßigerweise führen wir die virtuellen Verschiebungen wieder auf Variationen nach den generalisierten Koordinaten zurück und ersetzen daher auch die virtuellen Arbeiten durch Variationen der Arbeit nach den generalisierten Koordinaten.

Die Methode der virtuellen Verschiebungen lautet für das Gesamtsystem

$$\delta W_i = \delta W_a + \delta W_{Tr}$$

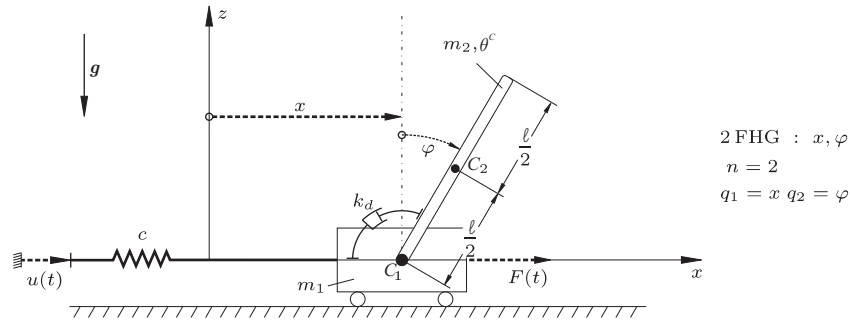


Abb. 9.27: System mit zwei Freiheitsgraden.

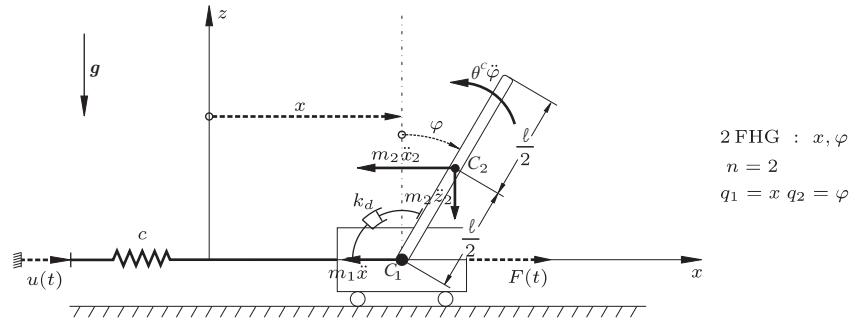


Abb. 9.28: System mit zwei Freiheitsgraden und eingezeichneten Trägheitsreaktionen.

mit

$$\begin{aligned}
 \delta W_i &= c(x - u)\delta x + k_d \dot{\varphi} \delta \varphi, \\
 \delta W_a &= F(t)\delta x - m_2 g \delta z_2, \\
 \delta W_{Tr} &= -m_1 \ddot{x} \delta x - m_2 \ddot{x}_2 \delta x_2 - m_2 \ddot{z}_2 \delta z_2 - \theta^C \dot{\varphi} \delta \varphi,
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

wobei noch die virtuellen Verschiebungen δx_2 und δz_2 auf δx und $\delta \varphi$ zurückzuführen sind und auch die Beschleunigungen \ddot{x}_2 und \ddot{z}_2 durch Ausdrücke mit den beiden Freiheitsgraden x und φ und ihren Ableitungen zu ersetzen sind. Wir bilden hierfür den Ortsvektor des Massenmittelpunkts des Stabs:

$$\mathbf{r}_{C_2} = \begin{bmatrix} x + \frac{\ell}{2} \sin \varphi \\ \frac{\ell}{2} \cos \varphi \end{bmatrix}.$$

Für die virtuellen Verschiebungen erhalten wir daraus:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{r}_{C_2} &= \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{r}_{C_2}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathbf{r}_{C_2}}{\partial \varphi} \delta \varphi \\
 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta x + \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \end{bmatrix} \delta \varphi = \begin{bmatrix} \delta x + \frac{\ell}{2} \cos \varphi \delta \varphi \\ -\frac{\ell}{2} \sin \varphi \delta \varphi \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Nun müssen wir den Ortsvektor \mathbf{r}_{C_2} noch zweimal nach der Zeit ableiten, um die beiden Beschleunigungen \ddot{x}_2 und \ddot{z}_2 zu bestimmen.

$$\mathbf{v}_{C_2} = \dot{\mathbf{r}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_{C_2} = \dot{\mathbf{v}}_{C_2} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \\ -\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \end{bmatrix}.$$

Werden diese Ergebnisse in Gl. (9.35) eingesetzt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta W_1 &= c(x-u)\delta x + k_d\dot{\varphi}\delta\varphi, \\ \delta W_a &= F(t)\delta x - m_2g\delta z_2 = F(t)\delta x + m_2g\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi, \\ \delta W_{Tr} &= -m_1\ddot{x}\delta x - m_2\ddot{x}_2\delta x_2 - m_2\ddot{z}_2\delta z_2 - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi \\ &= -m_1\ddot{x}\delta x - m_2\left(\ddot{x} + \frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)\right)(\delta x + \frac{\ell}{2}\cos\varphi\delta\varphi) \\ &\quad - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)\frac{\ell}{2}\sin\varphi\delta\varphi - \theta^C\ddot{\varphi}\delta\varphi. \end{aligned}$$

Die Methode der virtuellen Verschiebungen liefert dann nach Sortieren der Terme

$$\begin{aligned} 0 &= [-c(x-u) + F(t) - m_1\ddot{x} - m_2\ddot{x} - m_2\frac{\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)]\delta x \\ &\quad + \left[-k_d\dot{\varphi} + m_2g\frac{\ell}{2}\sin\varphi - m_2\ddot{x}\frac{\ell}{2}\cos\varphi - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi)\cos\varphi \right. \\ &\quad \left. - m_2\frac{\ell^2}{4}(\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi)\sin\varphi - \theta^C\ddot{\varphi} \right]\delta\varphi. \end{aligned}$$

Da die beiden virtuellen Verschiebungen δx und $\delta\varphi$ unabhängig voneinander sind, müssen die beiden Koeffizienten verschwinden. Damit folgen die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x} + \frac{m_2\ell}{2}(\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + cx &= cu + F(t), \\ (\theta^C + \frac{m_2\ell^2}{4})\ddot{\varphi} + m_2\frac{\ell}{2}\cos\varphi\ddot{x} + k_d\dot{\varphi} - m_2g\frac{\ell}{2}\sin\varphi &= 0. \end{aligned}$$

Zur Herleitung der Bewegungsgleichungen mit Hilfe der Lagrange-Gleichungen 2. Art berechnen wir zunächst die kinetische Energie:

$$E = \frac{m_1}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}(\mathbf{v}_{C_2} \cdot \mathbf{v}_{C_2}) + \frac{\theta^C}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Für $\mathbf{v}_{C_2} \cdot \mathbf{v}_{C_2}$ finden wir

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{C_2} \cdot \mathbf{v}_{C_2} &= \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{x} + \frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \cos \varphi \\ -\frac{\ell}{2}\dot{\varphi} \sin \varphi \end{bmatrix} \\ &= \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + \dot{x}\ell\dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \\ &= \dot{x}^2 + \frac{\ell^2}{4}\dot{\varphi}^2 + \dot{x}\ell\dot{\varphi} \cos \varphi, \end{aligned}$$

so dass die kinetische Energie letztlich

$$E = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \ell \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m_2}{2} \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2$$

lautet. In der potentiellen Energie berücksichtigen wir die Gewichtskraft des Stabes mit Nullniveau für $z_2 = 0$ sowie die Federkraft:

$$V = m_2 g z_2 + \frac{c}{2} (x - u)^2 = m_2 g \frac{\ell}{2} \cos \varphi + \frac{c}{2} (x - u)^2.$$

Die Lagrange-Funktion ist demnach

$$L = E - V = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}^2 + \frac{m_2}{2} \ell \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{m_2}{2} \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{\theta^C}{2} \dot{\varphi}^2 - m_2 g \frac{\ell}{2} \cos \varphi - \frac{c}{2} (x - u)^2.$$

Die Kraft $F(t)$ und die Dämpferkraft bilden wir in den potentiallosen Kräften ab. Hierzu formen wie die virtuelle Arbeit dieser beiden Kräfte:

$$\delta W = \delta W_a - \delta W_i = F(t) \delta x - k_d \dot{\varphi} \delta \varphi = Q_x \delta x + Q_\varphi \delta \varphi$$

und erhalten somit

$$Q_x = F(t) \text{ und } Q_\varphi = -k_d \dot{\varphi}.$$

Die Lagrange-Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= Q_x, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= Q_\varphi. \end{aligned}$$

Die benötigten Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= (m_1 + m_2) \dot{x} + \frac{m_2}{2} \ell \dot{\varphi} \cos \varphi, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= (m_1 + m_2) \ddot{x} + \frac{m_2}{2} \ell (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi), \\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -c(x - u), \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{m_2}{2} \ell \dot{x} \cos \varphi + m_2 \frac{\ell^2}{4} \dot{\varphi} + \theta^C \dot{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) &= \frac{m_2 \ell}{2} (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \left(m_2 \frac{\ell^2}{4} + \theta^C \right) \ddot{\varphi}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= -\frac{m_2}{2} \ell \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi + m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich auch hier die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \ddot{x} + \frac{m_2 \ell}{2} (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) + cx &= cu + F(t), \\ (m_2 \frac{\ell^2}{4} + \theta^C) \ddot{\varphi} + \frac{m_2 \ell}{2} (\ddot{x} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi) + \frac{m_2}{2} \ell \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi - m_2 g \frac{\ell}{2} \sin \varphi &= -k_d \dot{\varphi}. \end{aligned}$$

◇

10 Stoßvorgänge

Stoßvorgänge finden in einem sehr kleinen Zeitintervall statt. Aus der Voraussetzung einer kurzen Stoßdauer leiten sich die folgenden Annahmen über das dynamische Verhalten der Körper während eines Stoßvorganges ab:

1. Während des Stoßes ist die Lageänderung der Körper vernachlässigbar. Deformationen treten nur in der Berührzone auf, sonst bleiben die Körper starr.
2. Die Stoßkräfte sind so groß, dass alle anderen eingepprägten Kräfte während des Stoßvorgangs vernachlässigt werden können.
3. Es treten keine Masseverluste während des Stoßvorgangs auf.

Zur Behandlung von Stoßvorgängen werden die Sätze für den Massenmittelpunkt über die Zeit integriert, also in integraler Form betrachtet. Wir erhalten dann:

Satz 10.1 (Massenmittelpunktsätze in integraler Form)

Für einen Körper gilt zwischen zwei Zeitpunkten t_A und t_E der **Massenmittelpunktsatz für den Impuls in integraler Form**

$$m\mathbf{v}_C(t_E) - m\mathbf{v}_C(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt,$$

wobei \mathbf{v}_C die Geschwindigkeit im Massenmittelpunkt C und \mathbf{F} die resultierende Kraft ist. Ferner gilt der **Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form**

$$\mathbf{D}^C(t_E) - \mathbf{D}^C(t_A) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^C dt$$

mit dem auf den Massenmittelpunkt bezogenen resultierenden Moment \mathbf{M}^C .

Ebenso wie der Massenmittelpunktsatz für den Drall kann für einen raumfesten Punkt das Drallgesetz in integraler Form formuliert werden.

Für die an einem Stoßvorgang beteiligten Körper gilt daher

$$m(\mathbf{v}_C(t_E) - \mathbf{v}_C(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} dt,$$

$$\mathbf{e}^C \cdot (\boldsymbol{\omega}(t_E) - \boldsymbol{\omega}(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} \mathbf{M}^C dt,$$

da sich die Körper während des Stoßvorgangs laut Annahme weitestgehend starr verhalten; die Vektoren \mathbf{F} bzw. \mathbf{M}^C umfassen dabei nur die Stoßkräfte bzw. die daraus resultierenden Momente.

In der Regel möchte man die kinematischen Größen \mathbf{v}_C und $\boldsymbol{\omega}$ entweder vor (z.B. Verkehrsunfall) oder nach dem Stoß ermitteln. Dies ist jedoch ohne weitere Hypothesen nicht möglich, da die rechte Seite unbekannt ist. Wir treffen daher die folgenden Zusatzannahmen:

	plastisch	Stahl/Stahl	Glas/Glas	elastisch
Stoßzahl	0	0.56	0.94	1

Tab. 10.1: Typische Stoßzahlen für verschiedene Materialpaarungen.

1. Glatter Stoß: Die **Stoßkraft** F wirkt in Richtung des Normalenvektors der Tangentialebene (der **Stoßnormalen**) im Berührungspunkt¹² der Körper, Tangentialanteile infolge von Reibungskräften werden vernachlässigt.
2. Die Stoßdauer kann in eine Kompressions- und eine Restitutionsphase unterteilt werden. Es gilt dann für den **Stoßimpuls**:

$$\int_{t_A}^{t_E} \mathbf{F} \, dt = \hat{\mathbf{F}}_K + \hat{\mathbf{F}}_R.$$

3. Der Stoßimpuls während der Restitutionsphase ist $\hat{\mathbf{F}}_R = \varepsilon \hat{\mathbf{F}}_K$ mit $0 \leq \varepsilon \leq 1$.
4. Beim Übergang von der Kompressions- in die Restitutionsphase besitzen die beiden Körper im Berührungspunkt die gleiche Geschwindigkeit in Stoßnormalenrichtung, die Relativgeschwindigkeit im Berührungspunkt in Richtung der Stoßnormalen verschwindet.

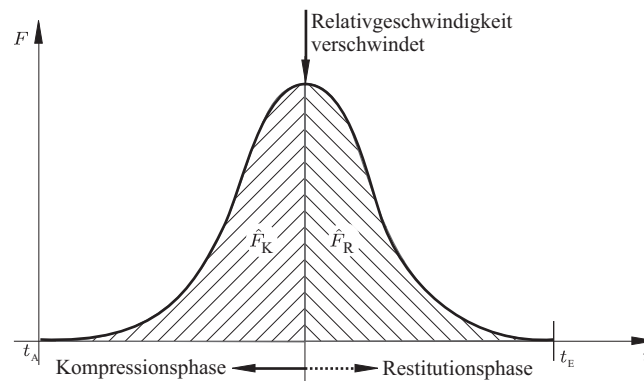


Abb. 10.1: Kompressions- und Restitutionsphase beim Stoß.

Für $\varepsilon = 1$ heißt der Stoß **vollelastisch**, während er für $\varepsilon = 0$ als **vollplastisch** bezeichnet wird. Die **Stoßzahl** ε ist von der Materialpaarung, der Oberflächenbeschaffenheit und weiteren Umgebungsbedingungen abhängig (s. Tabelle 10.1) und muss experimentell bestimmt werden.

Stoßvorgänge können wie folgt klassifiziert werden:

¹²Im Folgenden wird von einem punktförmigen Anfangskontakt zwischen den Körpern ausgegangen.

1. Verläuft die Stoßnormale durch die Massenmittelpunkte der beiden Körper, liegt ein **zentrischer** Stoß vor. Andernfalls heißt der Stoß **exzentrisch**.
2. Haben die Geschwindigkeiten der beiden Körper im Berührpunkt unmittelbar vor dem Stoß die Richtung der Stoßnormalen, dann liegt ein **gerader** Stoß vor. Andernfalls heißt der Stoß **schief**.

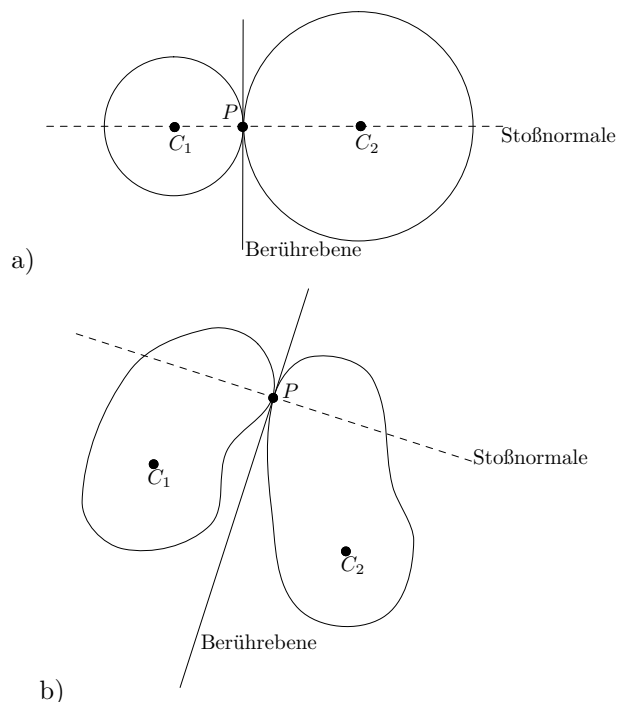


Abb. 10.2: Zentrischer (a) und exzentrischer (b) Stoß zweier Körper.

Im Fall eines zentrischen Stoßes reicht die Betrachtung des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls in integraler Form aus. Für den exzentrischen Stoß muss ferner noch der Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form herangezogen werden. Bei einem geraden Stoß muss nur die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der gemeinsamen Geraden ermittelt werden, während im Fall eines schiefen Stoßes alle Komponenten zu ermitteln sind. Wir beginnen daher zunächst mit der Untersuchung der zentrischen Stöße und hier mit dem geraden Stoß.

10.1 Gerader zentrischer Stoß

Für den geraden zentrischen Stoß zweier Körper formulieren wir den Massenmittelpunktsatz für den Impuls in integraler Form in Richtung der gemeinsamen Geraden, diesmal aber getrennt für die Kompressions- und die Restitutionspha-

se.

$$\begin{aligned}
m_1 v_0 - m_1 v_{C_1}(t_A) &= \hat{F}_K, \\
m_1 v_{C_1}(t_E) - m_1 v_0 &= \varepsilon \hat{F}_K, \\
m_2 v_0 - m_2 v_{C_2}(t_A) &= -\hat{F}_K, \\
m_2 v_{C_2}(t_E) - m_2 v_0 &= -\varepsilon \hat{F}_K.
\end{aligned} \tag{10.1}$$

Hierin bezeichnet v_0 die gemeinsame Geschwindigkeit der beiden Körper am Ende der Kompressionsphase. Die Terme auf der rechten Seite der Gleichungen sind für den zweiten Körper jeweils gleich groß aber mit unterschiedlichem Vorzeichen, da die Stoßkraft die einzige Kraft auf der rechten Seite dieser Gleichungen ist und der Gegenwirkungssatz gilt. Insgesamt liegen vier Gleichungen für die vier Unbekannten $v_{C_1}(t_E)$, $v_{C_2}(t_E)$, v_0 und \hat{F}_K vor.

Auflösen dieser Gleichungen nach den Geschwindigkeiten $v_{C_1}(t_E)$ und $v_{C_2}(t_E)$ unmittelbar nach dem Stoßvorgang führt auf

$$\begin{aligned}
v_{C_1}(t_E) &= \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) - \varepsilon m_2 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2}, \\
v_{C_2}(t_E) &= \frac{m_1 v_{C_1}(t_A) + m_2 v_{C_2}(t_A) + \varepsilon m_1 (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))}{m_1 + m_2}.
\end{aligned}$$

Sind umgekehrt die Geschwindigkeiten gegeben, so kann aus diesen Gleichungen die Stoßzahl ermittelt werden:

$$\varepsilon = -\frac{v_{C_1}(t_E) - v_{C_2}(t_E)}{v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A)}. \tag{10.2}$$

Demzufolge ist die Stoßzahl ε das negative Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoß.

Während des Stoßvorganges kann kinetische Energie in andere Energieformen umgewandelt werden (plastische Verformung, Erwärmung). Sie steht daher nicht mehr für die Bewegung zur Verfügung. Der Verlust an kinetischer Energie beträgt:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= \frac{1}{2}(m_1 v_{C_1}^2(t_A) + m_2 v_{C_2}^2(t_A)) - \frac{1}{2}(m_1 v_{C_1}^2(t_E) + m_2 v_{C_2}^2(t_E)) \\
&= \frac{1 - \varepsilon^2}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{C_1}(t_A) - v_{C_2}(t_A))^2.
\end{aligned}$$

Hingegen bleibt der Impuls des Gesamtsystems während des Stoßvorgangs erhalten, wie sich direkt aus Gl. (10.1) ablesen lässt. Sind nur die beiden Geschwindigkeiten nach dem Stoß gesucht, so lassen sich diese daher einfacher aus der Gesamtimpulserhaltung und der Gleichung (10.2) für die Stoßzahl ermitteln.

Im Spezialfall eines **elastische Stoßes** ($\varepsilon = 1$) tritt kein Verlust an kinetischer Energie auf, die Relativgeschwindigkeiten vor und nach dem Stoß sind bis auf das Vorzeichen identisch. Sind zudem die beiden Massen gleich groß, tritt ein Geschwindigkeitsaustausch auf ($v_{C_1}(t_E) = v_{C_2}(t_A)$, $v_{C_2}(t_E) = v_{C_1}(t_A)$).

Im Spezialfall eines **vollplastischen Stoßes** ($\varepsilon = 0$) wird der Verlust an kinetischer Energie maximal. Die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß verschwindet; die Körper bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit v_0 fort.

Beispiel 10.2 (Ballistisches Pendel)

Bei einem ballistischen Pendel kommt es beim Aufprall des Projektils zu einem vollplastischen Stoß. Aufgrund der Anfangsgeschwindigkeit setzt sich das Pendel in Bewegung. Mit Hilfe des maximalen Pendelausschlags lässt sich dann die Aufprallgeschwindigkeit des Projektils ermitteln. Projektil und Pendelmasse werden als Massenpunkt modelliert.

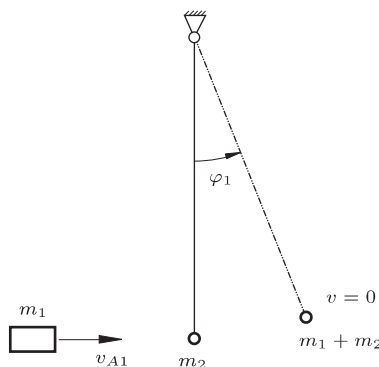


Abb. 10.3: Ballistisches Pendel.

Die Geschwindigkeit nach dem plastischen Stoß ist

$$v_1(t_E) = v_2(t_E) = v_E = \frac{m_1 v_1(t_A)}{m_1 + m_2}.$$

Unmittelbar nach dem Stoß ist die kinetische Energie

$$E_0 = \frac{m_1 + m_2}{2} v_E^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2(t_A)}{m_1 + m_2}.$$

Die potentielle Energie V_0 ist null, wenn das Nullniveau in diesen Zustand gelegt wird. Bei Bewegungsumkehr wird dann die kinetische Energie E_1 null, während die potentielle Energie maximal wird und

$$V_1 = (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos \varphi_1)$$

beträgt. Der Energiesatz in integraler Form liefert dann $E_0 + V_0 = E_1 + V_1$ und damit

$$\frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2(t_A)}{m_1 + m_2} = (m_1 + m_2) g \ell (1 - \cos \varphi_1).$$

Wird diese Gleichung nach $v_1(t_A)$ aufgelöst, dann ergibt sich

$$v_1(t_A) = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{(2g\ell)(1 - \cos \varphi_1)}.$$

◇

10.2 Schiefer zentrischer Stoß

Bei einem schiefen Stoß ist es zweckmäßig, mit einem Koordinatensystem zu arbeiten, dessen eine Achse mit der Normale der Berührebene ausgerichtet ist. In Richtung der Stoßnormalen gelten dann die Gleichungen des vorherigen Abschnitts unverändert weiter, während die Geschwindigkeiten in der Berührebene vor und nach dem Stoß unverändert sind, da die Tangentialanteile der Stoßkraft näherungsweise verschwinden und daher für diese Komponenten die rechte Seite des Massenmittelpunktsatzes für den Impuls in integraler Form verschwindet.

10.3 Exzentrischer Stoß in der Ebene

Im Fall eines exzentrischen Stoßes muss noch der Massenmittelpunktsatz für den Drall (bzw. das Drallgesetz) in integraler Form berücksichtigt werden. Wir beschränken uns hier auf ebene Probleme und erhalten dann

$$\theta^C(\omega(t_E) - \omega(t_A)) = \int_{t_A}^{t_E} M^C dt = h\hat{F},$$

wobei \hat{F} der Stoßimpuls in Stoßnormalenrichtung und h der vorzeichenbehaftete Abstand zwischen dem Massenmittelpunkt und der Geraden durch den Berührungspunkt in Richtung der Stoßnormalen ist.

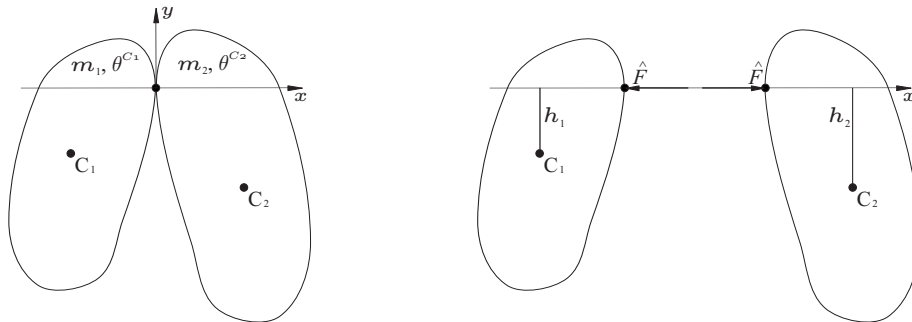


Abb. 10.4: Exzentrischer Stoß.

Wird der Massenmittelpunktsatz für den Impuls in Stoßnormalenrichtung (Index n) und in Tangentialrichtung (Index t) sowie der Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form für jeden der beiden Körper betrachtet, so ergeben sich insgesamt sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} m_1(v_{C_1,n}(t_E) - v_{C_1,n}(t_A)) &= -\hat{F}, \\ m_1(v_{C_1,t}(t_E) - v_{C_1,t}(t_A)) &= 0, \\ \theta_1^C(\omega_1(t_E) - \omega_1(t_A)) &= h_1\hat{F}, \\ m_2(v_{C_2,n}(t_E) - v_{C_2,n}(t_A)) &= \hat{F}, \\ m_2(v_{C_2,t}(t_E) - v_{C_2,t}(t_A)) &= 0, \\ \theta_2^C(\omega_2(t_E) - \omega_2(t_A)) &= -h_2\hat{F}. \end{aligned} \tag{10.3}$$

Ist wieder der Geschwindigkeitszustand der beiden Körper nach dem Stoß gesucht, dann hat diese Gleichung insgesamt sieben Unbekannte, da auch der Stoßimpuls unbekannt ist. Es muss daher wieder auf die Stoßzahl ϵ zurückgegriffen werden. Dabei ist die Stoßzahl gemäß Gleichung (10.2) zu modifizieren, da bei einem exzentrischen Stoß die Relativgeschwindigkeit im Berührungspunkt nicht identisch mit der Relativgeschwindigkeit im Massenmittelpunkt ist:

$$\epsilon = - \frac{v_{P_1,n}(t_E) - v_{P_2,n}(t_E)}{v_{P_1,n}(t_A) - v_{P_2,n}(t_A)},$$

dabei bezeichnen P_1 bzw. P_2 denjenigen Punkt des ersten bzw. zweiten Körpers, der sich in Berührung befindet. Die Geschwindigkeiten in P_1 und P_2 können mit Hilfe der Beziehung für Starrkörpergeschwindigkeiten ermittelt werden.

Wird der Stoßvorgang für einen gelagerten Körper untersucht, so sind die Lagerreaktionen in den Massenmittelpunktsätzen zu berücksichtigen, da die Reaktionskräfte von gleicher Größenordnung wie die Stoßkräfte sein müssen und daher nicht vernachlässigt werden können. Die rechten Seiten der Gleichungen (10.3) müssen dann entsprechend modifiziert werden. Die Anzahl der Unbekannten ändert sich dadurch nicht: zwar sind die Reaktionskräfte i. Allg. unbekannt, die durch die Lagerung eingeführten kinematischen Bindungen erlauben jedoch eine entsprechende Reduktion der unbekannt kinematischen Größen.

Beispiel 10.3

1. Stoß auf einen drehbar gelagerten starren Körper

Der Körper sei im Punkt A drehbar gelagert. Er befinde sich unmittelbar vor dem Stoß in Ruhe. Gesucht ist die Lage des Punkts A so, dass während des Stoßvorgangs keine Reaktionskräfte im Lager auftreten.

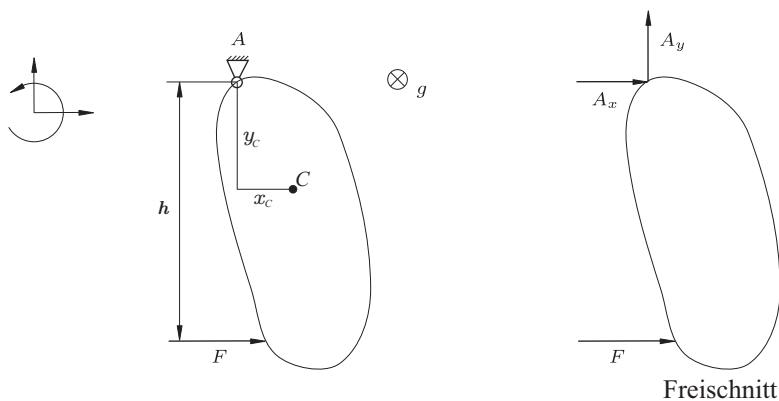


Abb. 10.5: Stoß auf einen drehbar gelagerten starren Körper.

Die Gleichungen (10.3) reduzieren sich auf die ersten drei Gleichungen, da der zweite Körper nur durch den Stoßimpuls \hat{F} berücksichtigt wird. Da der Körper zunächst in Ruhe ist, werden die Geschwindigkeiten unmittelbar vor dem Stoß zu null gesetzt. Ferner sind die Zeitintegrale

$$\hat{A}_x := \int_{t_A}^{t_E} A_x dt \quad \text{und} \quad \hat{A}_y := \int_{t_A}^{t_E} A_y dt$$

der Lagerreaktionen in x - bzw. y -Richtung auf der rechten Seite der Gleichungen zu berücksichtigen. Wird nicht der Massenmittelpunktsatz für den Drall in integraler Form, sondern zweckmäßigerweise (Entfall der Lagerreaktionen) das Drallgesetz in integraler Form für den Lagerpunkt angesetzt, dann ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} m(v_{Cx}(t_E) - 0) &= \hat{F} + \hat{A}_x, \\ m(v_{Cy}(t_E) - 0) &= \hat{A}_y, \\ \theta^A(\omega(t_E) - 0) &= \hat{F}h. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der kinematischen Bedingungen $v_{Cx} = y_C\omega$ und $v_{Cy} = x_C\omega$ liegen damit drei Gleichungen für die drei Unbekannten \hat{A}_x , \hat{A}_y und $\omega(t_E)$ vor. Die Stoßzahl wird hier nicht benötigt, da der Stoßimpuls als gegebene Größe behandelt wird. Wird nach den Lagerkräften aufgelöst, erhalten wir

$$\hat{A}_x = \hat{F} \left(\frac{my_C h}{\theta^A} - 1 \right) \quad \text{und} \quad \hat{A}_y = \hat{F} \frac{mx_C h}{\theta^A}.$$

Die Lagerkräfte verschwinden also für einen Auflagerpunkt, von dem aus der Massenmittelpunkt die Koordinaten $x_C = 0$ und

$$y_C = \frac{\theta^A}{mh}$$

besitzt. Dieser Ort für den Auflagerpunkt wird Stoßmittelpunkt genannt. Er liegt auf einer Geraden durch den Massenmittelpunkt, die senkrecht auf der Richtung der Stoßkraft steht. Anwendung findet das Ergebnis u.a. bei der Gestaltung von Hämmern und Tennisschlägern.

2. Stoß auf eine Billardkugel

In welcher Höhe h führt ein parallel zur Rollebene der Kugel ausgeführter Stoß dazu, dass die Kugel rollt, ohne zu gleiten? Das Massenträgheitsmoment der Kugel bezüglich ihres Massenmittelpunkts sei mit $\theta^C = \frac{2}{5}mr^2$ gegeben.

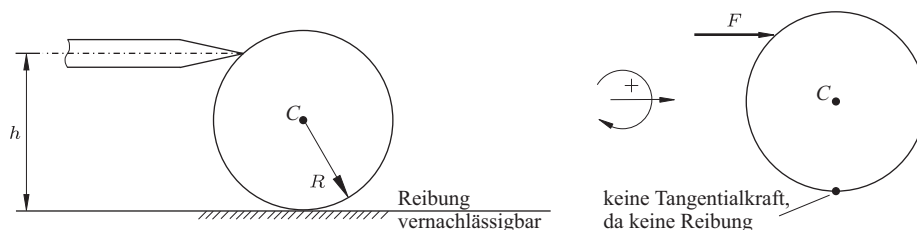


Abb. 10.6: Stoß auf eine Billardkugel.

Damit der Auflagepunkt der Momentanpol unmittelbar nach dem Stoß ist, dürfen keine Reaktionskräfte im Auflagepunkt angreifen. Daher ist der Auflagepunkt der Stoßmittelpunkt. Für den Stoßmittelpunkt gilt

$$R = \frac{\theta^A}{mh}.$$

Wird hier das Massenträgheitsmoment $\theta^A = \theta^C + R^2 m = \frac{7}{5} m R^2$ eingesetzt und nach der Höhe h aufgelöst, dann ergibt sich

$$h = \frac{7}{5} R.$$

◇

11 Schwingungen

Der Begriff Schwingung ist schwierig zu fassen. DIN 1311 definiert Schwingungen wie folgt.

Definition 11.1 (Schwingung)

Eine **Schwingung** ist eine zeitliche Änderung einer Zustandsgröße eines Systems, bei der im Allgemeinen diese Zustandsgröße abwechselnd zu- und abnimmt.

Eine Schwingung kann eine feste Periodendauer besitzen – muss es aber nicht. Bei der Zustandsgröße kann es sich beispielsweise um eine kinematische Größe (wie Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung) handeln, aber auch z.B. um eine dynamische Größe wie die Kraft oder um statistisch gemittelte Größen. Teilweise werden auch nichtperiodische Vorgänge (z.B. Kriechvorgänge) zu den Schwingungen gerechnet bzw. zumindest im Rahmen der Schwingungslehre behandelt.

In diesem Kapitel werden Schwingungen von Systemen mit einem und zwei Freiheitsgraden und von Kontinua betrachtet.

11.1 Erscheinungsformen, Beispiele

Systeme mit Trägheit (kinetische Energie) und Rückstellung (potentielle Energie infolge Gewichtskraft, Federkraft, etc.) sind schwingungsfähig. Oft sind aber die Schwingfrequenzen so hoch und die Amplituden so klein, dass sie visuell nicht wahrgenommen werden. Im Folgenden betrachten wir einige Beispiele für schwingungsfähige Systeme.

Beispiel 11.2 (Schwingungsfähige Systeme)

1. Mathematisches Pendel

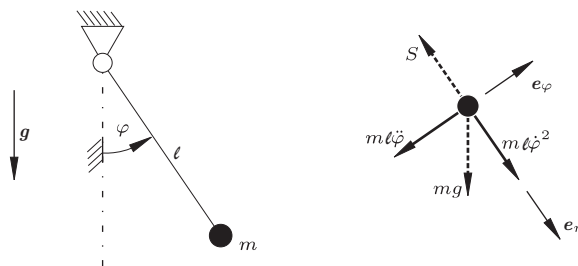


Abb. 11.1: Mathematisches Pendel, Freischnitt.

Auswertung des Impulsgesetzes in Umfangsrichtung (e_φ -Komponente) liefert:

$$\begin{aligned}
 -ml\ddot{\varphi} - mg \sin \varphi &= 0, \\
 \ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \sin \varphi &= 0.
 \end{aligned}$$

Die erhaltene Bewegungsgleichung ist eine nichtlineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung. Sie kann für kleine Auslenkungen $\varphi \ll 1$ durch $\sin \varphi \approx \varphi$ linearisiert werden:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell} \varphi = 0.$$

Dies ist dann eine lineare, homogene gewöhnliche Differentialgleichung. Sowohl die lineare als auch die nichtlineare Bewegungsgleichung besitzt die Lösung $\varphi \equiv 0$, die auch als triviale Lösung bezeichnet wird. Sie ist jedoch nur dann mit den Anfangsbedingungen vereinbar, wenn das System in Ruhe ist, also weder eine Anfangsauslenkung noch eine Anfangsgeschwindigkeit auftritt. Es bleibt dann auch in Ruhe, da keine weitere äußere Kraft einwirkt.

2. Flüssigkeit in einem Rohr

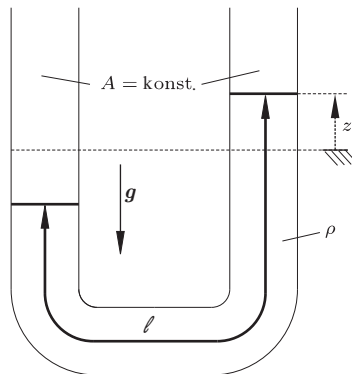


Abb. 11.2: Schwingende Flüssigkeit in einem Rohr.

Die Masse der schwingenden Flüssigkeit im Rohr ist $m = \rho A \ell$. Die Rückstellkraft ist hier die Gewichtskraft. Sie beträgt $2zA\rho g$. Das Impulsgesetz liefert in diesem Fall:

$$-m\ddot{z} - 2zA\rho g = 0$$

$$\rho A \ell \ddot{z} + \rho A 2gz = 0$$

$$\ddot{z} + \frac{2g}{\ell} z = 0$$

Die Bewegungsgleichung ist in diesem Fall auch bei großen Auslenkungen eine lineare homogene gewöhnliche Differentialgleichung.

3. Schwingungsfundament

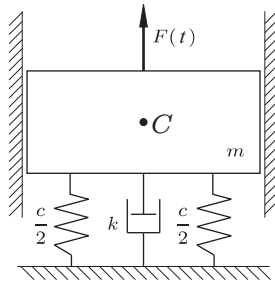
Bei der Auslegung eines Schwingungsfundaments unterscheidet man Aktiv- und Passiventstörung.

Für die Aktiventstörung lautet die aus dem Freischnitt gewonnene Bewegungsgleichung:

$$F(t) - mg - cy - ky - m\ddot{y} = 0,$$

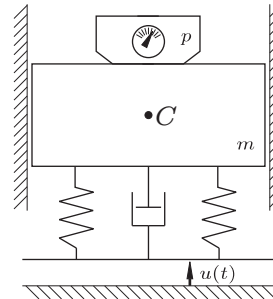
$$m\ddot{y} + k\dot{y} + cy + mg = F(t).$$

a) Aktiventstörung



Schutz der Umgebung
vor Erregerkraft $F(t)$ einer
Maschine

b) Passiventstörung



Schutz eines Gerätes
vor Erschütterungen der
Umgebung

Abb. 11.3: Aktiv- und Passiventstörung eines Fundaments.

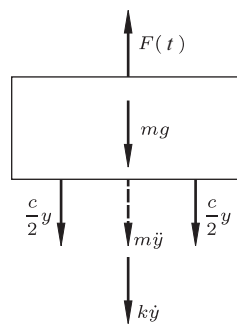


Abb. 11.4: Freischnitt des Fundaments, Aktiventstörung.

Sie besitzt für $F(t) = 0$ die statische Ruhelage $y \equiv y_0$, wobei sich y_0 aus $mg + cy_0 = 0$ bestimmt. Für die Bewegung Δy um die statische Ruhelage ergibt sich mit

$$y = y_0 + \Delta y, \quad \dot{y} = \Delta \dot{y}, \quad \ddot{y} = \Delta \ddot{y}$$

durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$m\Delta \ddot{y} + k\Delta \dot{y} + c(y_0 + \Delta y) + mg = F(t),$$

woraus sich unter Ausnutzen der Bedingung für die statische Ruhelage die Differentialgleichung

$$m\Delta \ddot{y} + k\Delta \dot{y} + c\Delta y = F(t)$$

ergibt. Für $F(t) \neq 0$ muss die Lösung die statische Ruhelage verlassen, $\Delta y(t) \equiv 0$ ist dann keine Lösung der Differentialgleichung für Δy .

◇

Schwingende Körper werden häufig nicht sich selbst überlassen, sondern sind Einwirkungen unterworfen, welche **Erregung** genannt werden. Im Folgenden werden wichtige Erregerarten klassifiziert. Dabei erfolgt eine Beschränkung auf harmonische Erregungen. Eine Erweiterung auf periodische Erregung kann für lineare Differentialgleichungen durch Fourierreihenentwicklung des Erregerterms, separates Lösen der Differentialgleichungen für jeden einzelnen harmonischen Erregerterm und anschließende Anwendung des Superpositionsprinzips erfolgen.

1. Krafterregung oder Federkrafterregung

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad \text{bzw.} \quad F(t) = \hat{F} \cos \Omega t$$

Harmonisch veränderliche Kraft mit Erregerkreisfrequenz Ω ($\Omega = 2\pi f$, f in [Hz]) mit konstanter Amplitude $\hat{F} = F_0$, die direkt (Abb. 11.5) oder als Federkraft (sog. **Fußpunkterregung**) am Körper angreift. Im Fall der Fußpunkterregung einer Feder, wie in Abb. 11.6 dargestellt, lautet die Federkraft $F(t) = c(u_0 \sin \Omega t - x(t))$.

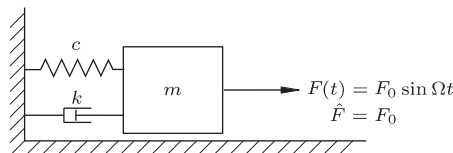


Abb. 11.5: Krafterregung.

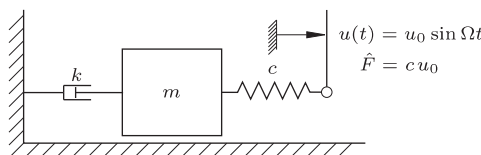


Abb. 11.6: Federfußpunkterregung.

2. Dämpfungskrafterregung

Wird der Fußpunkt des Dämpfers harmonisch verschoben, vgl. Abb. 11.7, dann ergibt sich eine am Körper angreifende Kraft, deren Amplitude proportional zur Erregerkreisfrequenz ist:

$$F(t) = k(u_0 \Omega \cos \Omega t - \dot{x}(t)) = \hat{F} \cos \Omega t - k\dot{x}(t) \quad \text{mit} \quad \hat{F} = k u_0 \Omega \sim \Omega.$$

3. Massenkrafterregung

Bei rotierenden Unwuchten ist die Erregerkraftamplitude proportional zum Quadrat der Erregerkreisfrequenz, denn es gilt

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad \text{bzw.} \quad F(t) = \hat{F} \cos \Omega t \quad \text{mit} \quad \hat{F} = m_0 r_0 \Omega^2 \sim \Omega^2.$$

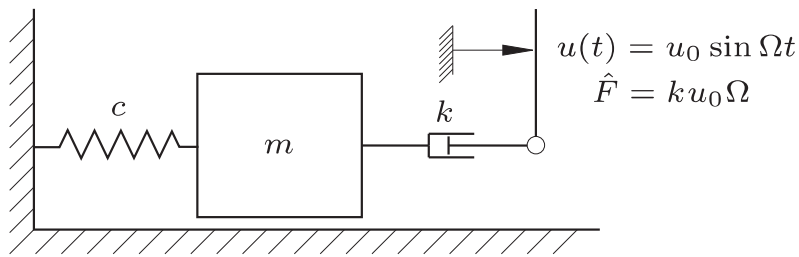


Abb. 11.7: Dämpfungskrafterregung.

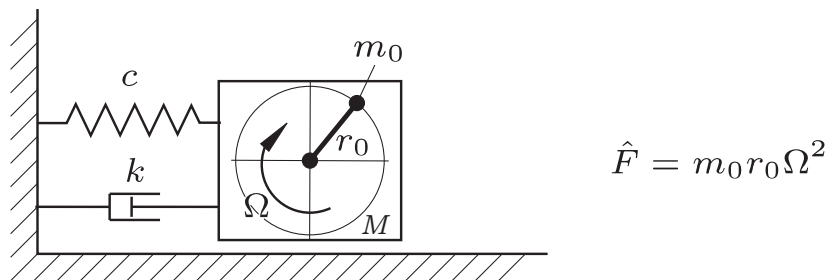


Abb. 11.8: Massenkrafterregung durch rotierende Unwucht.

Setzt man im Fall der Massenkrafterregung $m = M + m_0$, dann lautet die Bewegungsgleichung für das System mit einem Freiheitsgrad in allen drei Fällen

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t) = \hat{F}(\Omega) \sin \Omega t \text{ bzw. } \hat{F}(\Omega) \cos \Omega t.$$

In der Bewegungsgleichung bezeichnen:
 $x(t)$: Verschiebung oder Winkelkoordinate
 m : Masse oder Massenträgheitsmoment
 k : Dämpfer- oder Drehdämpferkonstante
 c : Feder- oder Drehfederkonstante
 $F(t)$: Erregerkraft oder Erregermoment

Es liegt damit insgesamt eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Ähnliche Gleichungen treten auch in der Elektrotechnik und der Physik auf.

11.2 Freie Schwingungen

Ist keine Erregung vorhanden, so spricht man von **freien Schwingungen**. In diesem Fall vereinfacht sich die Bewegungsgleichung für das Einfreiheitsgradsystem zu

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0.$$

Sie besitzt, wie oben erwähnt, die triviale Lösung $x \equiv 0$, die jedoch häufig nicht mit den Anfangsbedingungen vereinbar ist. Interessant sind daher nichttriviale Lösungen $x(t) \neq 0$. Sie werden in den folgenden Abschnitten hergeleitet und diskutiert.

11.2.1 Ungedämpfte Schwingungen

Gilt neben $F(t) = 0$ auch $k = 0$, dann liegt ein konservatives System vor und die Bewegungsgleichung vereinfacht sich zu

$$m\ddot{x} + cx = 0$$

Mit der Abkürzung $\frac{c}{m} = \omega_0^2$ wird daraus

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Es liegt somit eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vor. Die allgemeine Lösung dieser lässt sich mit dem Exponentialansatz

$$x(t) = \tilde{C} e^{\lambda t}$$

ermitteln. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert dann

$$(\lambda^2 + \omega_0^2)\tilde{C} e^{\lambda t} = 0,$$

woraus sich für nichttriviale Lösungen ($\tilde{C} \neq 0!$) die Bedingung

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

ergibt. Sie führt auf $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Da aufgrund der Linearität der Differentialgleichung die beiden Lösungen superponiert werden können, lautet die Gesamtlösung

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{i\omega_0 t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega_0 t},$$

wobei die beiden Konstanten \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 komplexe Zahlen sind, da die linke Seite reellwertig ist. Mit Hilfe der Euler-Formel $e^{\pm i\alpha} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$ können die beiden Exponentialfunktionen durch harmonische Funktionen ersetzt werden:

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{C}_1 (\cos \omega_0 t + i \sin \omega_0 t) + \tilde{C}_2 (\cos \omega_0 t - i \sin \omega_0 t) \\ &= (\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2) \cos \omega_0 t + i(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2) \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

Demnach müssen $C_1 := \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2$ und $C_2 := i(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)$ reelle Konstanten sein. Insbesondere sind \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 konjugiert komplex. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet daher

$$x(t) = C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t$$

mit den Integrationskonstanten C_1, C_2 . Sie beschreibt eine harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω_0 , welche sich allein aus den Systemparametern ergibt. Die Größe

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}, \text{ (Einheit: [s}^{-1}\text{])}$$

heißt daher **Eigenkreisfrequenz**. Die zugehörige Eigenfrequenz (Einheit: [Hz]) ist

$$f = \frac{\omega_0}{2\pi}.$$

Eine gleichwertige Darstellung der allgemeinen Lösung ist

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \alpha) \quad (11.1)$$

mit der **Amplitude** A und der **Phasenverschiebung** α ; letztere wird auch als **Phasenwinkel** bezeichnet. Die Phasenverschiebung wird im Bogenmaß angegeben. Zwischen beiden Darstellungen existiert folgender Zusammenhang:

$$x(t) = A \sin \omega_0 t \cos \alpha + A \cos \omega_0 t \sin \alpha \stackrel{!}{=} C_1 \sin \omega_0 t + C_2 \cos \omega_0 t.$$

Daraus ergibt sich die Umrechnung der Konstanten zu

$$C_1 = A \cos \alpha, \quad C_2 = A \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}.$$

Die allgemeine Lösung enthält noch zwei Integrationskonstanten, die aus den Anfangsbedingungen

$$x(t=0) = x_0, \quad \dot{x}(t=0) = v_0$$

mit den Konstanten x_0, v_0 bestimmt werden müssen. Die Differentialgleichung und die Anfangsbedingungen werden daher auch gemeinsam als **Anfangswertproblem** bezeichnet.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Schwingungen grafisch darzustellen. Die gebräuchlichsten sind:

1. das Ausschlag-Zeit-Diagramm,
2. das Vektordiagramm, bei dem die Lösung (11.1) der Differentialgleichung als Projektion eines mit der Frequenz ω_0 rotierenden Vektors dargestellt wird. Da die Amplitude A konstant ist, durchläuft der Vektor einen Kreis mit Radius A , woraus sich der Name „Kreisfrequenz“ für ω_0 herleitet.
3. das Phasenportrait, bei dem die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zustandsgröße aufgetragen wird. Im Phasenportrait können die Lösungen für unterschiedliche Anfangsbedingungen veranschaulicht werden. Für die freie ungedämpfte Schwingung ergibt sich aus (11.1) nach zeitlicher Ableitung die Gleichung

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega_0} \right)^2 = A^2.$$

Das Phasenportrait der freien ungedämpften Schwingung besteht daher aus Ellipsen mit Zentrum im Ursprung. Ausgehend von den Anfangsbedingungen beschreibt eine Kurve die Entwicklung der Zustandsgröße und ihrer Geschwindigkeit. Da im Phasenportrait die Zeit nicht auftritt, müssen Pfeile zur Darstellung der zeitlichen Entwicklung von x und \dot{x} eingezeichnet werden.

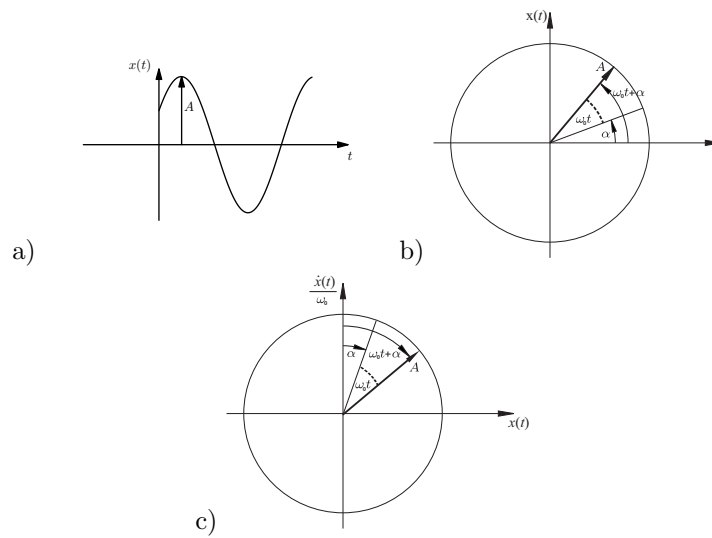


Abb. 11.9: Darstellungsformen für Schwingungen. a) Ausschlag-Zeit-Diagramm, b) Vektordiagramm, c) Phasenportrait.

11.2.2 Gedämpfte Schwingungen

Tritt zusätzlich noch eine Dämpfungskraft auf, so liegt aufgrund der Energie-dissipation kein konservatives System mehr vor. Wir betrachten hier nur eine geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskraft: $F_D = -k\dot{x}$. Die Bewegungsgleichung des Einfreiheitsgradsystems für freie, gedämpfte Schwingungen lautet dann

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0.$$

Mit den Abkürzungen $2\delta = \frac{k}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{c}{m}$ wird daraus nach Division durch m

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten lässt sich wieder mit dem Exponentialansatz

$$x(t) = \tilde{C} e^{\lambda t}$$

bestimmen, der zwei Konstanten \tilde{C} und λ enthält. Einsetzen liefert

$$(\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2) \underbrace{\tilde{C} e^{\lambda t}}_{\neq 0} = 0,$$

woraus die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

folgt, die quadratisch in λ ist und die Wurzeln

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

besitzt. Die allgemeine Lösung ergibt sich dann durch Superposition der möglichen Lösungen für λ zu

$$x(t) = \tilde{C}_1 e^{\lambda_1 t} + \tilde{C}_2 e^{\lambda_2 t}$$

mit den Konstanten \tilde{C}_1 und \tilde{C}_2 zur Anpassung der Lösung an die Anfangsbedingungen.

Nach Art der Wurzeln λ_1 und λ_2 werden drei Bewegungsformen unterschieden, die durch das **Lehrsche Dämpfungsmaß** $D := \frac{\delta}{\omega_0}$ charakterisiert werden:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \omega_0 \sqrt{D^2 - 1}$$

1. starke Dämpfung, $D > 1$ ($\delta > \omega_0$)
Da $\lambda_{1,2}$ negative reelle Zahlen sind, ist $x(t)$ eine abklingende Exponentialfunktion mit $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Es liegt dann eine aperiodische Bewegung vor, eine sog. **Kriechbewegung**.

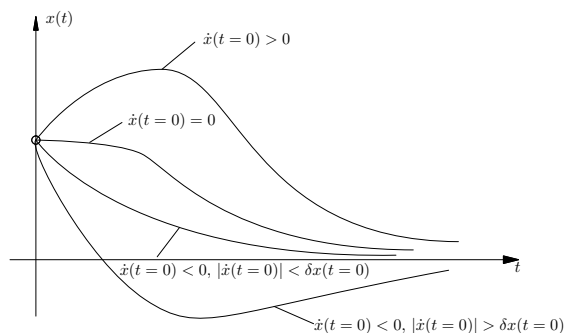


Abb. 11.10: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung für eine Kriechbewegung.

2. aperiodischer Grenzfall, $D = 1$ ($\delta = \omega_0$)
Auch hier tritt mit $\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$ eine aperiodische Bewegung auf, die wegen der in der Praxis nicht exakt realisierbaren Bedingung $D = 1$ nur von theoretischer Bedeutung ist. Der Bewegungsverlauf ist qualitativ immer noch derselbe wie unter a), also eine Kriechbewegung mit $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$.
3. schwache Dämpfung, $D < 1$ ($\delta < \omega_0$)
Dieser Fall ist in der Praxis häufig anzutreffen, oft mit $D \ll 1$. Die Eigenwerte sind dann konjugiert komplex:

$$\lambda_{1,2} = \omega_0(-D \pm i\sqrt{1 - D^2}).$$

Die Lösung setzt sich dann zusammen aus

$$x(t) = e^{-D\omega_0 t} \left(\tilde{C}_1 e^{i\omega_0 \sqrt{1-D^2} t} + \tilde{C}_2 e^{-i\omega_0 \sqrt{1-D^2} t} \right).$$

Mit Hilfe der Euler-Formel folgt daraus

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-D\omega_0 t} \left(\tilde{C}_1 \left(\cos \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + i \sin \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t \right) \right. \\ &\quad \left. + \tilde{C}_2 \left(\cos \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t - i \sin \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t \right) \right) \\ &= e^{-D\omega_0 t} \left(\underbrace{(\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2)}_{=:C_1} \cos \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + i \underbrace{(\tilde{C}_1 - \tilde{C}_2)}_{=:C_2} \sin \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t \right) \end{aligned}$$

und somit die Bewegung zu

$$x(t) = e^{-D\omega_0 t} \left(C_1 \cos \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + C_2 \sin \omega_0 \sqrt{1 - D^2} t \right).$$

Die Lösung beschreibt in diesem Fall freie, gedämpfte Schwingungen mit zwei reellwertigen Konstanten C_1 und C_2 zur Anpassung an die Anfangsbedingungen. Auch hier kann wieder eine alternative Darstellung in der Form

$$x(t) = A e^{-D\omega_0 t} \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - D^2} t + \alpha \right)$$

gefunden werden mit der Amplitude $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ und der Phasenverschiebung $\alpha: \tan \alpha = \frac{C_2}{C_1}$.

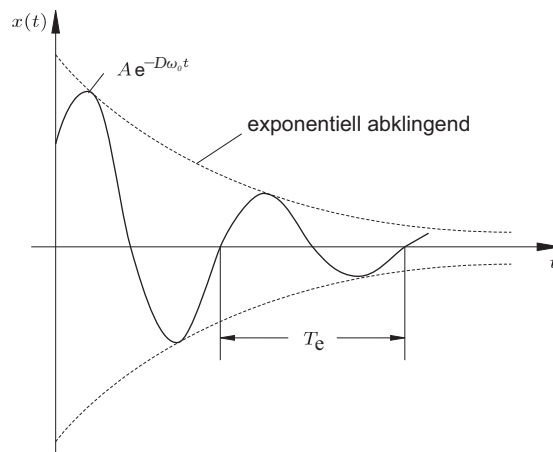


Abb. 11.11: Zeitlicher Verlauf der Auslenkung bei schwacher Dämpfung.

Aufgrund des Faktors $e^{-D\omega_0 t}$ ist auch diese Lösung exponentiell abklingend, d.h. $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Es treten jedoch Nulldurchgänge auf, die Bewegung ist daher eine Schwingung. Die Kreisfrequenz dieser Schwingung ist

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} < \omega_0,$$

die Periodendauer: $T_e = \frac{2\pi}{\omega_d} > T$. Die Schwingung ist allerdings nicht mehr periodisch, d.h.

$$x(t + T_e) \neq x(t), \quad \text{denn} \quad \frac{x(t)}{x(t + T_e)} = e^{D\omega_0 T_e} \neq 1.$$

Der Logarithmus dieses Verhältnisses,

$$\ln \frac{x(t)}{x(t + T_e)} = D\omega_0 T_e = D\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_d} = 2\pi \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}},$$

wird logarithmisches Dekrement genannt und kann leicht im Ausschwingversuch gemessen werden, z.B. durch Messung zweier Maxima, so dass daraus auch D bestimmt werden kann.

Anmerkung. Freie Schwingungen sind in der Praxis fast immer bedeutungslos, da sie rasch (exponentiell!) mit der Zeit abklingen. Die Bestimmung der Eigenkreisfrequenz ω_0 bzw. ω_d ist jedoch auch für erzwungene Schwingungen wichtig, insbesondere zur Vermeidung von Resonanz.

11.3 Erzwungene Schwingungen

Freie Schwingungen klingen wegen der stets vorhandenen Dämpfung in der Praxis rasch ab. Durch den Einfluss einer Erregung können auch Dauerschwingungen entstehen. Diese sind von großer Bedeutung in der Technik. Wir betrachten daher die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = F(t).$$

Auch hier ist $x(t) \equiv 0$ keine Lösung mehr, auch nicht für $t \rightarrow \infty$. Wir beschränken uns auf eine harmonische Erregung der Form

$$F(t) = \hat{F} \sin \Omega t \quad \text{oder} \quad F(t) = \hat{F} \cos \Omega t.$$

Im Falle einer allgemeinen periodischen Erregung kann diese in eine Summe harmonischer Funktionen zerlegt werden. Da für ein lineares System das Superpositionsprinzip gilt, können die Antworten des Systems auf die einzelnen Erregungen additiv überlagert werden. Die Betrachtung einer harmonischen Erregung stellt deshalb keine besondere Einschränkung dar.

Die Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t).$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung wurde in 11.2 angegeben. Sie beschreibt freie Schwingungen und enthält zwei Konstanten zur Anpassung an die Anfangsbedingungen.

Die partikuläre Lösung lässt sich z.B. durch Variation der Konstanten ermitteln. Schneller ist jedoch ein „Ansatz vom Typ der rechten Seite“. Wir betrachten

hierfür zunächst die Differentialgleichung in Standardform, die wir nach Division durch m erhalten:

$$\ddot{x} + 2D\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2Ex_0 \cos(\Omega t),$$

mit den Parametern

$$2\delta = \frac{k}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad D = \frac{\delta}{\omega_0}, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

sowie auf der rechten Seite

$$x_0 = \begin{cases} \frac{F_0}{c} \text{ bzw. } u_0, & \text{Krafterregung} \\ u_0, & \text{Dämpfungskrafterregung} \\ \frac{m_0}{m}r, & \text{Massenkrafterregung} \end{cases} \quad E = \begin{cases} 1, & \text{Kraft} \\ 2D\eta, & \text{Dämpfer} \\ \eta^2, & \text{Unwucht} \end{cases}$$

Als Lösungsansatz vom Typ der rechten Seite wählen wir nun

$$x_p(t) = Vx_0 \cos(\Omega t - \varepsilon).$$

\uparrow \uparrow \uparrow
 unbekannte Amplitude gleichfrequent mit Erregung unbekannte Phasenverschiebung, hier nacheilend angesetzt

Darin sind V und ε Parameter, die so bestimmt werden sollen, dass der Lösungsansatz die Differentialgleichung erfüllt. Gelingt dies nicht, muss ein anderer Ansatz gewählt werden.

Eine gleichwertige Form des Lösungsansatzes ist

$$\begin{aligned} x_p(t) &= V_1 \cos \Omega t + V_2 \sin \Omega t \\ \dot{x}_p(t) &= \Omega(-V_1 \sin \Omega t + V_2 \cos \Omega t) \\ \ddot{x}_p(t) &= -\Omega^2(V_1 \cos \Omega t + V_2 \sin \Omega t) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung führt auf

$$(-V_1\Omega^2 + 2D\omega_0\Omega V_2 + \omega_0^2 V_1 - \omega_0^2 E x_0) \cos \Omega t + (-V_2\Omega^2 - 2D\omega_0\Omega V_1 + \omega_0^2 V_2) \sin \Omega t = 0$$

und der Koeffizientenvergleich liefert die beiden algebraischen Gleichungen

$$\begin{aligned} (\omega_0^2 - \Omega^2)V_1 + 2D\omega_0\Omega V_2 &= \omega_0^2 E x_0, \\ -2D\omega_0\Omega V_1 + (\omega_0^2 - \Omega^2)V_2 &= 0 \end{aligned}$$

für V_1 und V_2 mit der Lösung

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)\omega_0^2 E x_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}, \\ V_2 &= \frac{2D\omega_0\Omega\omega_0^2 E x_0}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}. \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Amplitude

$$A = \sqrt{V_1^2 + V_2^2} = \frac{\omega_0^2 E x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2D\omega_0\Omega)^2}}$$

und den Phasenwinkel ε :

$$\tan \varepsilon = \frac{V_2}{V_1} = \frac{2D\omega_0\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}.$$

Mit dem Frequenzverhältnis $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ und der **Vergrößerungsfunktion** $V = \frac{A}{x_0}$ ergibt sich dann:

$$V = \frac{E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}},$$

$$\tan \varepsilon = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}.$$

Damit ergibt sich die partikuläre Lösung zu

$$x_p(t) = V x_0 \cos(\Omega t - \varepsilon).$$

Sie besitzt die gleiche Frequenz wie die harmonische Erregung; die Amplituden können jedoch kleiner ($V < 1$) oder größer ($V > 1$) als die statische Auslenkung x_0 sein. Die Phasenverschiebung ist unabhängig von der Art der Erregung, also von E .

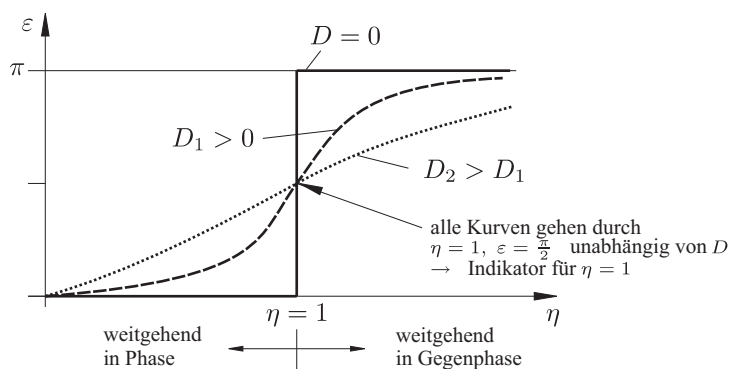


Abb. 11.12: Phasenverschiebung in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis.

Die Vergrößerungsfunktion $V(\eta)$ ist jedoch erregungsabhängig. Die folgenden Fälle lassen sich wieder unterscheiden:

1. Krafterregung $E = 1$

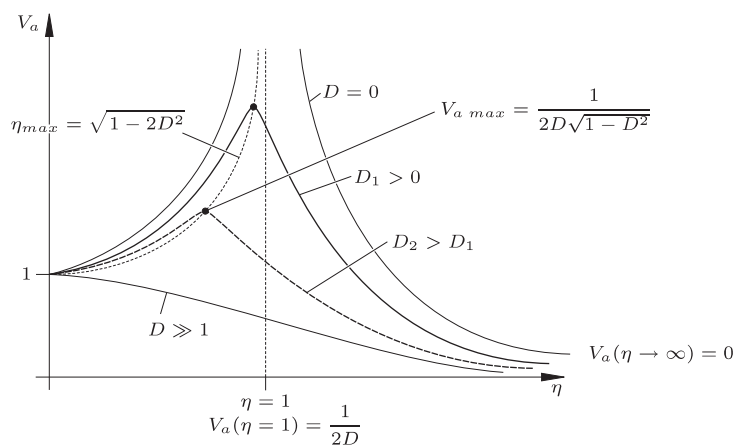


Abb. 11.13: Vergrößerungsfunktion bei Krafterregung.

2. Dämpfungskrafterregung $E = 2D\eta$

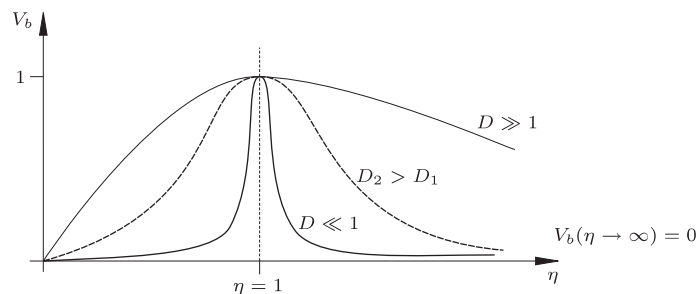


Abb. 11.14: Vergrößerungsfunktion bei Dämpfungskrafterregung.

3. Massenkrafterregung $E = \eta^2$

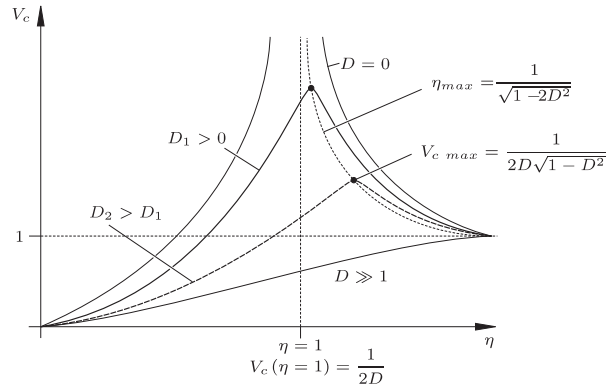


Abb. 11.15: Vergrößerungsfunktion bei Massenkrafterregung.

In allen drei Fällen führt der Betrieb mit $\eta = 1$ auf Resonanz. Bei kleinen Dämpfungen sind dann die Amplituden sehr groß, daher gefährlich und nach Möglichkeit zu vermeiden.

11.4 Frequenzgangrechnung

Bei Betrachtung der komplexen Zahlenebene liefert die Projektion eines mit $\omega = \text{const.}$ umlaufenden Zeigers auf die Achsen des Koordinatensystems harmonische Zeitfunktionen. Das Verwenden komplexer Zahlen führt daher zu einer effizienteren Berechnung der partikulären Lösung für erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung, analog zur komplexen Darstellung in der Elektrotechnik bei Wechselstrom und in der Regelungstechnik. Es ist jedoch in der Regel nur für lineare Systeme und damit lineare Differentialgleichungen sinnvoll.

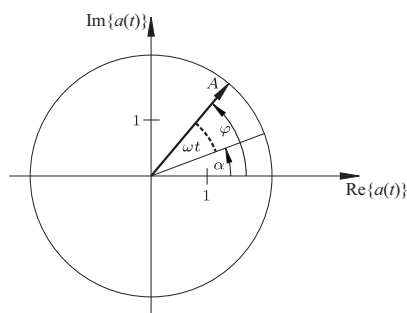


Abb. 11.16: Komplexer Zeiger einer komplexwertigen Funktion $a(t)$.

Wir betrachten den komplexen Zeiger

$$a(t) = Ae^{i\varphi} = Ae^{i(\omega t + \alpha)}.$$

Die Zerlegung mit der Euler-Formel

$$a(t) = A(\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha))$$

liefert für Real- und Imaginärteil:

$$\operatorname{Re}\{a(t)\} = A \cos(\omega t + \alpha),$$

$$\operatorname{Im}\{a(t)\} = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Anmerkung. In der Elektrotechnik wird häufig j statt i für die imaginäre Einheit geschrieben.

Da die Zeigerlänge zeitlich konstant ist, wird die Differentiation besonders einfach:

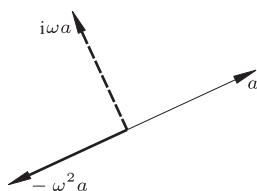


Abb. 11.17: Darstellung der ersten beiden Ableitungen von $a(t)$.

$$a = A e^{i(\omega t + \alpha)}$$

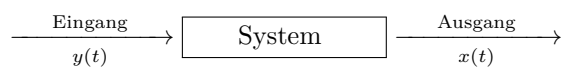
$$\dot{a} = i\omega A e^{i(\omega t + \alpha)} = i\omega a$$

$$\ddot{a} = -\omega^2 A e^{i(\omega t + \alpha)} = -\omega^2 a = (i\omega)^2 a$$

Zur Vorbereitung der Anwendung dieser Gleichungen auf erzwungenen Schwingungen abstrahieren wir die Begriffe

Erreger - Schwinger - Zwangsschwingung

im Sinne der linearen Systemtheorie (Regelungstechnik):



Die Erregung als Systemeingang $y(t)$ ist dabei gegeben, z.B. in der Form

$$y(t) = y_0 \sin \Omega t = \operatorname{Im} \{ y_0 e^{i\Omega t} \}$$

mit vorgegebener Amplitude y_0 und vorgegebener Erregerkreisfrequenz Ω . Sie wird dann als

$$y(t) = y_0 e^{i\Omega t}$$

verallgemeinert. In analoger Weise verallgemeinern wir die Systemantwort. In 11.3 war diese gegeben durch

$$x_p(t) = V y_0 \sin(\Omega t - \varepsilon) = \operatorname{Im} \left\{ V y_0 e^{i(\Omega t - \varepsilon)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ V e^{-i\varepsilon} y_0 e^{i\Omega t} \right\}$$

mit der Vergrößerungsfunktion V und der Phasenverschiebung ε als gesuchte Parameter der partikulären Lösung $x_p(t)$. Unter Einführung des **komplexen Frequenzgangs** $F(i\Omega)$ wird dies zu

$$x_p(t) = \text{Im} \{ F(i\Omega) y(t) \}$$

oder verallgemeinert

$$x_p(t) = F(i\Omega) y_0 e^{i\Omega t} = F(i\Omega) y(t).$$

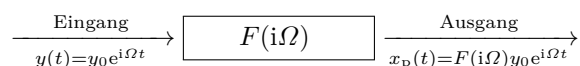
Für ein gegebenes System (also gegebene Systemparameter) und bei harmonischer Erregung beschreibt der Frequenzgang die Abhängigkeit des Verhältnisses von Systemausgang zu Systemeingang von der Kreisfrequenz der Erregung. Als komplexe Zahl kann er in Real- und in Imaginärteil aufgeteilt werden.

Zum Eingang (Erregung)

$$y(t) = y_0 e^{i\Omega t}$$

gehört also der Ausgang (Zwangsschwingung)

$$x_p(t) = F(i\Omega) y_0 e^{i\Omega t} :$$



Vergrößerungsfunktion und Phasenverschiebung können nun in Abhängigkeit des komplexen Frequenzgangs ausgedrückt werden. Aus

$$F(i\Omega) = V(\Omega) e^{-i\varepsilon}$$

folgen

$$V(\Omega) = |F(i\Omega)|$$

und

$$\tan \varepsilon = - \frac{\text{Im}\{F(i\Omega)\}}{\text{Re}\{F(i\Omega)\}}.$$

↑
da ε positiv im Uhrzeigersinn

Die Berechnung von $F(i\Omega)$ erfolgt durch Einsetzen der Ansätze in die Differentialgleichung unter Verwendung der Ableitungen des komplexen Zeigers für den Systemausgang: Aus

$$\ddot{x} + 2D\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 E y_0 e^{i\Omega t}$$

folgt so

$$((i\Omega)^2 + 2D\omega_0(i\Omega) + \omega_0^2) F(i\Omega) y_0 e^{i\Omega t} = \omega_0^2 y_0 E e^{i\Omega t}$$

und damit

$$F(i\Omega) = \frac{\omega_0^2 E}{(i\Omega)^2 + 2D\omega_0(i\Omega) + \omega_0^2},$$

oder mit $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$:

$$F(i\eta) = \frac{E}{1 - \eta^2 + i2D\eta} = \frac{(1 - \eta^2)E}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} - i \frac{2D\eta E}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}.$$

Die **Ortskurve** ergibt sich durch Auftragen des komplexen Frequenzgangs als Kurve in der komplexen Zahlenebene mit der Erregerkreisfrequenz Ω bzw. dem Frequenzverhältnis η als Parameter. Speziell für Kräfteerregung ($E = 1$) finden wir die in Abb. 11.18 dargestellte Ortskurve

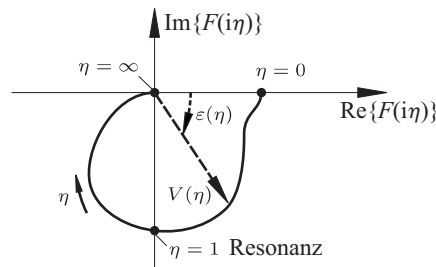


Abb. 11.18: Ortskurve in Abhängigkeit vom Frequenzverhältnis η .

$$\text{mit } V(\eta) = |F(i\eta)| = \sqrt{\text{Re}^2\{F(i\eta)\} + \text{Im}^2\{F(i\eta)\}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

und

$$\tan \varepsilon(\eta) = -\frac{\text{Im}\{F(i\Omega)\}}{\text{Re}\{F(i\Omega)\}} = \frac{2D\eta}{1 - \eta^2},$$

also tatsächlich die Ergebnisse des vorherigen Abschnitts.

Für den Systemausgang $x_p(t)$ finden wir die komplexwertige Zeitfunktion

$$x_p(t) = F(i\Omega)y_0e^{i\Omega t} = V(\Omega)e^{i(\Omega t - \varepsilon)}y_0.$$

Nach der Berechnung mit komplexen Zahlen muss dieses Ergebnis noch auf eine Schwingung mit reellwertiger Auslenkung zurückgeführt werden. Beispielsweise ergibt sich bei sinusförmiger Erregung $\sin \Omega t$ mit

$$y(t) = \text{Im} \{y_0e^{i\Omega t}\}$$

die Antwort ebenfalls aus dem Imaginärteil:

$$x_p(t) = \text{Im} \{F(i\Omega)y_0e^{i\Omega t}\} = V(\Omega)y_0 \sin(\Omega t - \varepsilon(\Omega))$$

und analog bei cosinusförmiger Erregung $\cos \Omega t$ mit

$$y(t) = \text{Re} \{y_0e^{i\Omega t}\}$$

die Antwort zu

$$x_p(t) = \text{Re} \{F(i\Omega)y_0e^{i\Omega t}\} = V(\Omega)y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon(\Omega)).$$

11.5 Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden

Die Behandlung von Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden ist Gegenstand der Vorlesung „Technische Schwingungslehre“. Hier erfolgt daher nur die Betrachtung eines Beispiels in Form des unten skizzierten ungedämpften Systems mit zwei Freiheitsgraden.

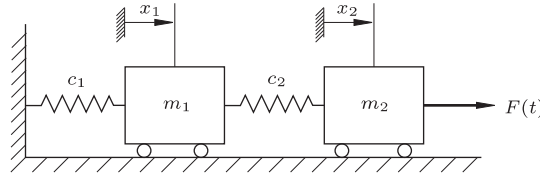


Abb. 11.19: Ungedämpftes System mit zwei Freiheitsgraden.

Die Bewegungsgleichungen für dieses System können leicht hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0, \\m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= F(t).\end{aligned}$$

Anmerkung.

1. Es liegt ein System linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen vor.
2. Im Fall eines nichtverschwindenden Erregerterms ($F(t) \neq 0$) ist das System inhomogen.
3. Es werden n Differentialgleichungen bei n Freiheitsgraden sowie $2n$ Anfangsbedingungen für eine eindeutige Lösung benötigt.
4. Wenn Dämpfungskräfte (oder gyroskopische Kräfte) auftreten, dann treten in den Differentialgleichungen zusätzliche Terme in den Geschwindigkeiten \dot{x}_i auf.
5. Die Differentialgleichungen sind gekoppelt. Die Kopplungsterme treten in Abhängigkeit von den gewählten Bezugssystemen auf und sind daher keine Systemeigenschaft! Kopplungen können beispielsweise auch in den Beschleunigungstermen auftreten.

11.5.1 Freie (ungedämpfte) Schwingungen

Wir betrachten zunächst wieder den Fall, dass keine Erregung auftritt, d.h. $F(t) = 0$. Die Bewegungsgleichungen vereinfachen sich dann zu:

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{x}_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0, \\m_2 \ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) &= 0.\end{aligned}$$

Es handelt sich weiterhin um lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Daher führt auch in diesem Fall der Exponentialansatz auf die allgemeine Lösung:

$$x_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, 2.$$

Darin sind C_k die Integrationskonstanten und λ_k ist ein Eigenwert, der so zu bestimmen ist, dass der Ansatz die Differentialgleichungen erfüllt. Die Terme $e^{\lambda_k t}$ heben sich nur dann aus allen Gleichungen heraus, wenn $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ gilt, also das Zeitverhalten $e^{\lambda t}$ für alle Freiheitsgrade gleich ist. Alternativ kann die Lösung wie beim Einfreiheitsgradsystem mit Amplitude und Phasenverschiebung angesetzt werden, wobei die Amplituden dann abhängig vom Freiheitsgrad sind und wegen der fehlenden Dämpfung die Phasenverschiebung verschwindet:

$$x_k(t) = C_k \underbrace{\sin \omega t}_{\text{auch } \cos \omega t \text{ oder allgemein } \sin(\omega t + \alpha) \text{ möglich}} \hat{=} C_k e^{i\omega t}.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichungen führt auf das lineare algebraische Gleichungssystem für die Integrationskonstanten C_1, C_2

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \omega^2) C_1 - c_2 C_2 &= 0, \\ -c_2 C_1 + (c_2 - m_2 \omega^2) C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die triviale Lösung $C_1 = 0, C_2 = 0$ charakterisiert dabei wieder keine Schwingung, weshalb nichttriviale Lösungen $C_k \neq 0$ von Interesse sind. Sie treten auf, wenn die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems singulär wird. Dies führt auf die folgende notwendige Bedingung für den Eigenwert ω :

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Die Auswertung der Determinante führt auf die charakteristische Gleichung

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2) \omega^2 + c_1 c_2 = 0,$$

also auf eine quadratische Gleichung für ω^2 . Nach Division durch $m_1 m_2$ und unter Einführung der Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{c_1}{m_1}} \quad \text{und} \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}}$$

der Einfreiheitsgradsysteme sowie des Massenverhältnisses

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}$$

lautet diese Gleichung

$$\omega^4 - (\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2) \omega^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2 = 0.$$

Sie besitzt die beiden Lösungen

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_{01}^2 + (1 + \mu)\omega_{02}^2)^2}{4} - \omega_{01}^2 \omega_{02}^2},$$

die beiden positiv sind, so dass ω_1 und ω_2 rein reell sind. $\omega_{1,2}$ sind die beiden **Eigenkreisfrequenzen** des Systems, wobei ω_1 die größere der beiden Eigenkreisfrequenzen ist. Im Fall eines Systems mit n Freiheitsgraden würden n Eigenkreisfrequenzen vorliegen.

Für die Eigenwerte sind die beiden Gleichungen für C_1 und C_2 linear abhängig, da ja die Koeffizientenmatrix singular ist. Daher sind die Konstanten C_1 und C_2 nicht unabhängig voneinander. Einsetzen von ω_i , $i = 1, 2$ in die erste Gleichung

$$(c_1 + c_2 - m_1\omega_i^2)C_{1i} - c_2C_{2i} = 0$$

liefert das Amplitudenverhältnis

$$\mu_i = \frac{C_{2i}}{C_{1i}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_i^2}{c_2}.$$

Wegen der linearen Abhängigkeit der beiden Gleichungen führt das Einsetzen von ω_i in die zweite Gleichung auf das gleiche Ergebnis.

Die Gesamtlösung der homogenen Differentialgleichungen setzt sich unter Berücksichtigung des Amplitudenverhältnisses aus den harmonischen Funktionen zu den beiden Eigenkreisfrequenzen zusammen:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t, \\ x_2(t) &= \mu_1(A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t) + \mu_2(A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t). \end{aligned}$$

Sie enthält noch vier Integrationskonstanten zur Anpassung an die vier Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_1(0) &= v_{10}, \\ x_2(0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_2(0) &= v_{20}. \end{aligned}$$

Die entstehende Schwingung ist nur dann periodisch, wenn die Eigenkreisfrequenzen **kommensurabel** sind, d.h. wenn das Verhältnis $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ rational ist.

Beispiel 11.3

Wir betrachten den Fall $m_1 = m_2$ und $c_1 = c_2$, für den $\mu = 1$, $\omega_{01} = \omega_{02}$ und

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(3 \pm \sqrt{5})}{2} \omega_{01}^2$$

sowie

$$\mu_{1,2} = \frac{(7 \pm \sqrt{5})}{2}$$

gilt und diskutieren die sich einstellende Bewegung für verschiedene Anfangsbedingungen:

1. Für $x_{20} = \mu_1 x_{10}$ und $v_{20} = \mu_1 \omega_1 v_{10}$ bzw. $x_{20} = \mu_2 x_{10}$ und $v_{20} = \mu_2 \omega_2 v_{10}$ stellt sich eine gleichläufige Bewegung der beiden Massen mit der Kreisfrequenz ω_1 bzw. ω_2 ein.
2. Für $x_{20} = -\mu_1 x_{10}$ und $v_{20} = -\mu_1 \omega_1 v_{10}$ bzw. $x_{20} = -\mu_2 x_{10}$ und $v_{20} = -\mu_2 \omega_2 v_{10}$ stellt sich eine gegenläufige Bewegung der beiden Massen mit der Kreisfrequenz ω_1 bzw. ω_2 ein.

3. Für $x_{10} \neq 0$, $x_2(0) = \frac{7x_{10}}{2}$ und $v_1(0) = v_2(0) = 0$ ergeben sich $A_1 = A_2 = 0$ und $B_1 = B_2 = \frac{x_{10}}{2}$. Wegen

$$x_1(t) = \frac{x_{10}}{2}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)$$

stellt sich für $x_1(t)$ eine Schwebung ein. Der Term $\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ kennzeichnet dabei die langsamen Änderungen der Amplitude, die an den Nullstellen von $\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$ vollständig verschwinden, während sich aufgrund des letzten Faktors die Schwingung mit der Kreisfrequenz $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ vollzieht.

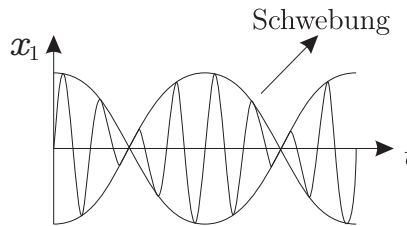


Abb. 11.20: Schwebung.

Für die zweite Masse ist

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \frac{7}{4}x_{10}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \frac{\sqrt{5}}{4}x_{10}(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \\ &= \frac{7}{2}x_{10} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}x_{10} \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \end{aligned}$$

die additive Überlagerung zweier Schwebungen.

◇

11.5.2 Erzwungene Schwingungen

Wir beschränken uns wieder auf eine harmonische Erregung, also $F(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ und insbesondere auf den Fall der Fußpunkterregung einer Feder mit $F(t) = c_0 Y_0 \cos(\Omega t)$ und der Federkonstanten c_0 . Analog zum Einfreiheitsgradsystem wählen wir zur Ermittlung der partikulären Lösung wieder einen Ansatz der rechten Seite:

$$\begin{aligned} x_{1,p}(t) &= V_1 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_1), \\ x_{2,p}(t) &= V_2 Y_0 \cos(\Omega t - \varepsilon_2). \end{aligned}$$

Darin sind V_1 , V_2 die Vergrößerungsfunktionen und ε_1 , ε_2 Phasenverschiebungen, wobei für das ungedämpfte System die Phasenverschiebung 0 oder π ist. Einsetzen in die Bewegungsgleichungen führt auf ein inhomogenes lineares algebraisches Gleichungssystem für V_1 und V_2 :

$$\begin{aligned} (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) V_1 - c_2 V_2 &= 0, \\ -c_2 V_1 + (c_2 - m_2 \Omega^2) V_2 &= c_0. \end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems kann beispielsweise mit Hilfe der Cramer-Regel ermittelt werden und lautet:

$$V_{1,2} = \frac{\Delta_{1,2}(\Omega)}{\Delta(\Omega)},$$

mit

$$\Delta(\Omega) = m_1 m_2 \underbrace{\left(\Omega^4 - \frac{m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2}{m_1 m_2} \Omega^2 + \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2} \right)}_{*, \text{ s. freie Schwingungen: } \Delta(\omega_1) = \Delta(\omega_2) = 0},$$

$$\Delta_1(\Omega) = c_2 c_0,$$

$$\Delta_2(\Omega) = (c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) c_0.$$

Da der Term in Klammern (*) für $\Omega = \omega_1$ oder $\Omega = \omega_2$ verschwindet, kann er als Produkt

$$(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$$

geschrieben werden, so dass $\Delta(\Omega)$ sich zu

$$\Delta(\Omega) = m_1 m_2 (\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)$$

ergibt. Damit lauten die Vergrößerungsfunktionen

$$V_1 = \frac{\frac{c_2 c_0}{m_1 m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)},$$

$$V_2 = \frac{\frac{(c_1 + c_2 - m_1 \Omega^2) c_0}{m_1 m_2}}{(\Omega^2 - \omega_1^2)(\Omega^2 - \omega_2^2)}.$$

Zwei wichtige Phänomene können an diesen Ausdrücken für die Vergrößerungsfunktionen abgelesen werden:

1. **Resonanz** $\Delta_{1,2} \neq 0$, aber $\Delta = 0$ ($\Omega = \omega_1$ oder $\Omega = \omega_2$)
In diesem Fall werden die Amplituden sehr groß (theoretisch sogar unendlich, da Dämpfung nicht berücksichtigt wurde). Dieser Zustand sollte in jedem Fall vermieden werden.
2. **Tilgung** $\Delta_1 = 0$ oder $\Delta_2 = 0$, aber $\Delta \neq 0$
In unserem Fall kann nur $\Delta_2 = 0$ auftreten, nämlich für

$$\Omega^2 = \frac{c_1 + c_2}{m_1}.$$

Bei dieser Erregerfrequenz bleibt die Masse trotz angreifender Kraft in Ruhe, die weitere Masse schwingt mit endlicher Amplitude und gleicht dadurch die Wirkung der angreifenden Kraft aus. Es liegt ein Schwingungstilger vor, der von hoher praktischer Relevanz ist.

Anmerkung.

1. Werden die berechneten Werte für V_1 und V_2 wieder in den Lösungsansatz eingesetzt, dann erhält man eine Beschreibung der Zwangsschwingungen als Funktion der Zeit.

2. Auch bei Systemen mit endlich vielen Freiheitsgraden ist die komplexe Frequenzgangrechnung möglich und sinnvoll, sofern das Differentialgleichungssystem linear ist. Sie führt dann auf die Frequenzgangsmatrix. Dies ist Gegenstand der Vorlesung „Technische Schwingungslehre“.

Bei gegebenen Parametern können V_1 und V_2 als Funktionen von Ω berechnet werden. Es ergibt sich dann die Darstellung in Abb. 11.21.

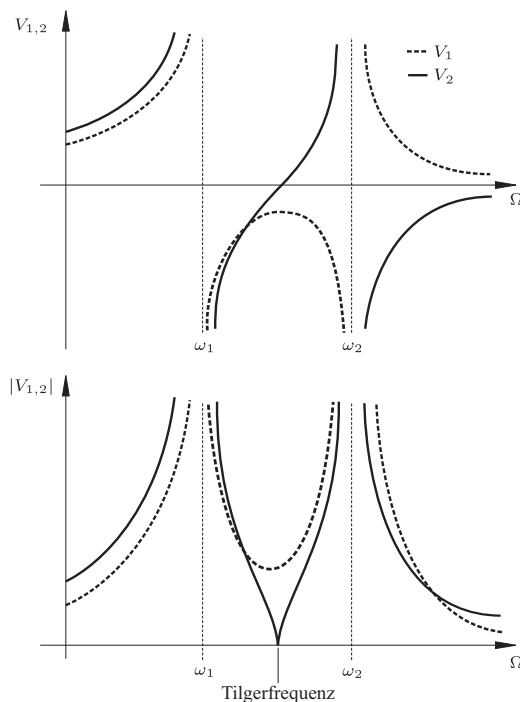


Abb. 11.21: Vergrößerungsfunktionen in Abhängigkeit von der Erregerfrequenz.

11.6 Schwingende Kontinua

Oft müssen technische Bauteile als Kontinuum modelliert werden, z.B. bei Achsen, Wellen, Turbinenschaufeln, Behältern etc. In diesem Fall sind die Bewegungsgleichungen partielle Differentialgleichungen, und zu den Anfangsbedingungen treten noch Randbedingungen hinzu. Die Bewegung wird dann durch ein Anfangsrandwertproblem beschrieben. Für einfache lineare Anfangsrandwertprobleme lässt sich die Lösung mit einem Produktansatz zurückführen auf das Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Für die freien Schwingungen führt das Randwertproblem zur Ermittlung der Eigenformen der Schwingung auf ein **Eigenwertproblem** für die Eigenfrequenzen. Die charakteristische Gleichung ist **transzendent** und besitzt abzählbar unendlich viele Lösungen. Zur Bestimmung der Integrationskonstanten des Anfangswertproblems können dann **Orthogonalitätsbeziehungen** zwischen den Eigenformen ausgenutzt werden.

Wir leiten zunächst die Bewegungsgleichungen für die freien Schwingungen einiger eindimensionaler Kontinua her: für Saitenschwingungen, Stablängsschwingungen und Torsionsschwingungen. Es wird sich herausstellen, dass in allen drei Fällen die partielle Differentialgleichung vom Typ der Wellengleichung ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung wird auf zwei Weisen bestimmt: zunächst mit Hilfe des Produktansatzes, anschließend durch Variablentransformation. Nicht weiter betrachtet werden erzwungene Schwingungen, Dies bleibt weiterführenden Lehrveranstaltungen, insbesondere der „Technischen Schwingungslehre“ vorbehalten.

Beispiel 11.4 (Kontinuumsschwinger vom Typ Wellengleichung)

1. Saitenschwingungen:

Der Massenmittelpunktsatz für den Impuls liefert in x -Richtung für das in Abb. 11.22 freigeschnittene Saitenelement

$$\Delta m u_{tt} = -N \cos \alpha + (N + \Delta N) \cos(\alpha + \Delta \alpha), \quad (11.2)$$

mit $\Delta m = \rho A \Delta s$ (s ist der Bogenlängenparameter und Δs der Zuwachs der Bogenlänge der Saitenmittellinie) bzw. $\Delta m = \mu \Delta s$, wobei $\mu = \rho A$ die Massenbelegung der Saite ist. Hier und im Folgenden werden die partiellen Ableitungen nach der Zeit t bzw. dem Ort x durch tiefgestellte Indizes gekennzeichnet. So steht bspw. u_{tt} für die zweifache partielle Zeitableitung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ von u . Für kleine Winkel α ist $\cos \alpha \approx \cos(\alpha + \Delta \alpha) \approx 1$. Vollführt die Saite Querschwingungen, dann sind die Längsverschiebung $u(x, t)$ und ihre zeitlichen Ableitungen vernachlässigbar, so dass aus (11.2) die Gleichung $\Delta N = 0$, also die Konstanz des Normalkraftverlaufs folgt.

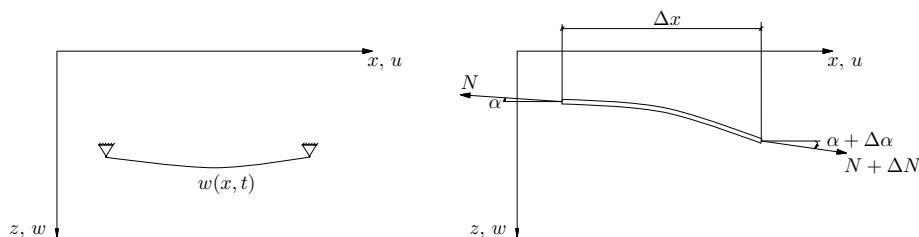


Abb. 11.22: Saitenschwingungen, Freischnitt eines Saitenelementes der Länge Δx .

In z -Richtung liefert der Massenmittelpunktsatz für den Impuls

$$\Delta m w_{tt} = -N \sin \alpha + (N + \Delta N) \sin(\alpha + \Delta \alpha).$$

Ersetzen wir hier den Sinus durch sein Argument und berücksichtigen ferner $\Delta N = 0$, dann ist

$$\Delta m w_{tt} = \mu \Delta s w_{tt} = N \Delta \alpha.$$

Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ gilt $\Delta s \rightarrow \Delta x$ und daher $\frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \rightarrow \alpha_x$. Division durch Δs und Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ liefert daher

$$\mu w_{tt} = N \alpha_x.$$

Für kleine Winkel α ist $\alpha \approx \tan \alpha = w_x$ und somit

$$\mu w_{tt} = N w_{xx}$$

bzw.

$$w_{tt} - \frac{N}{\mu} w_{xx} = 0.$$

2. Stablängsschwingungen:

In Längsrichtung liefert der Massenmittelpunktsatz für den Impuls:

$$\Delta m u_{tt} = \Delta N,$$

mit $\Delta m = \rho A \Delta x$ und $\Delta N = N_x \Delta x$. Für die Normalkraft gilt $N = \sigma_{11} A = E \epsilon_{11} A = E u_x A$ und somit

$$\rho A u_{tt} = N_x = (E A u_x)_x.$$

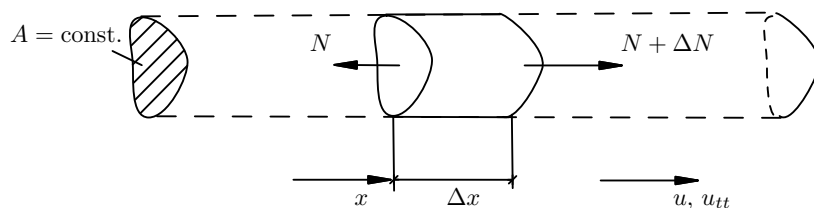


Abb. 11.23: Längsschwingungen eines prismatischen Stabs.

Für einen prismatischen Stab mit ortsunabhängigem E-Modul vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$u_{tt} - \frac{E}{\rho} u_{xx} = 0.$$

3. Torsionsschwingungen eines homogenen prismatischen Stabs mit Kreisquerschnitt:

Für das Massenträgheitsmoment des Stabelements gilt

$$\Delta \theta = \int_{\Delta \mathcal{B}} r^2 \, dm = \rho \int_{\mathcal{A}} r^2 \, dA \, \Delta x,$$

wobei sich das letzte Integral nur noch über die Querschnittsfläche des Stabelements erstreckt und dem polaren Flächenträgheitsmoment I_p des Stabs entspricht. Somit ist

$$\Delta \theta = \rho I_p \Delta x$$

und der Massenmittelpunktsatz für den Drall liefert

$$\Delta \theta \vartheta_{tt} = \Delta M_T,$$

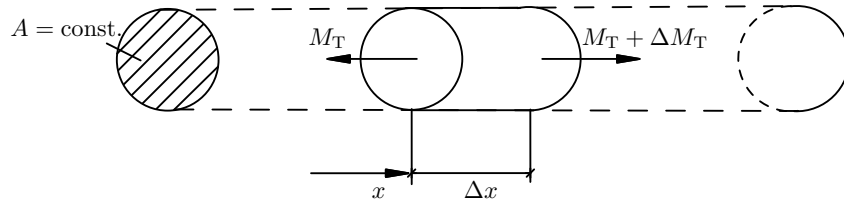


Abb. 11.24: Torsionsschwingungen eines Stabs mit Kreisquerschnitt.

wobei ϑ den Torsionswinkel und ΔM_T den Zuwachs des Torsionsmoments bezeichnet.

Über die aus der Festigkeitslehre bekannte Beziehung

$$\vartheta_x = \frac{M_T}{GI_p}$$

berechnen sich die Zuwächse bei ortsunabhängigem Schubmodul zu

$$\Delta\vartheta_x = \frac{\Delta M_T}{GI_p}.$$

Im Massenmittelpunktsatz für den Drall kann nun der Zuwachs des Torsionsmoments eliminiert werden. Es ergibt sich dann

$$\rho I_p \Delta x \vartheta_{tt} = GI_p \Delta\vartheta_x,$$

woraus nach Division durch Δx und Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ die Bewegungsgleichung

$$\vartheta_{tt} - \frac{G}{\rho} \vartheta_{xx} = 0$$

folgt. ◇

In allen drei Fällen ist die Bewegungsgleichung eine partielle Differentialgleichung des Typs

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0,$$

die Wellengleichung genannt wird. Zur Lösung der Wellengleichung werden zwei verschiedene Methoden betrachtet: die Superpositionsmethode nach Daniel Bernoulli und die Transformationsmethode nach d'Alembert.

Sie werden für Längsschwingungen eines einseitig eingespannten Stabes illustriert. Zur Bewegungsgleichung treten noch die Anfangs- und Randbedingungen hinzu:

1. Anfangsbedingungen: $u(x, 0) = u_0(x)$, $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$,
2. Randbedingungen:

$$u(x = 0, t) = 0 \quad \text{feste Einspannung,}$$

$$EAu_x(x = \ell, t) = 0 \Rightarrow u_x(\ell, t) = 0 \quad \text{normalkraftfreies Ende.}$$

Die Lösung der Bewegungsgleichung für den homogenen Stab und freie Schwingungen ($p(x, t) = 0$) erfolgt zunächst mit dem Produktansatz

$$u(x, t) = W(x)\theta(t).$$

Einsetzen in die homogene Bewegungsgleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$

liefert

$$\ddot{\theta}W - c^2 W''\theta = 0, \text{ also } c^2 \frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta}.$$

In dieser Gleichung ist die linke Seite nur vom Ort abhängig, die rechte Seite nur von der Zeit abhängig. Da Zeit und Ort aber unabhängig voneinander verändert werden können, müssen die Verhältnisse auf beiden Seiten der Gleichung konstant sein. Daher gilt

$$c^2 \frac{W''}{W} = \frac{\ddot{\theta}}{\theta} = -\omega^2,$$

wobei die Konstante negativ angesetzt wurde. Dies wird plausibel, wenn man die beiden Gleichungen separat notiert:

$$W'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0 \text{ und } \ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0. \quad (11.3)$$

Es handelt sich dann um zwei gewöhnliche Differentialgleichungen, die den orts- und den zeitabhängigen Lösungsanteil beschreiben. Der zeitabhängige Anteil ist dabei bereits bestens bekannt: Es handelt sich um die gleiche Differentialgleichung wie beim ungedämpften Einheitsgradschwinger; ω entspricht dann der Eigenkreisfrequenz. Es lässt sich zeigen, dass eine positive Konstante in (11.3) nicht zu einer Lösung führt, die die Randbedingungen erfüllt.

Da auch die Differentialgleichung für den ortsabhängigen Anteil die gleiche Struktur besitzt, lauten die allgemeinen Lösungen

$$W(x) = C_1 \sin \hat{\omega}x + C_2 \cos \hat{\omega}x, \quad \hat{\omega} = \frac{\omega}{c},$$

$$\theta(t) = C_3 \sin \omega t + C_4 \cos \omega t.$$

Sie müssen noch an die Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden. Wir beginnen mit den Randbedingungen, die für $W(x)$ dann $W(0) = 0$, $W'(\ell) = 0$ lauten:

$$C_2 = 0 \text{ und } \cos \hat{\omega}\ell = 0,$$

da $C_1 = 0$ auf triviale Lösung führt ($W(x) = 0$) und daher für Schwingungen nicht von Interesse ist.

Die transzendente Gleichung $\cos(\hat{\omega}\ell) = 0$ besitzt abzählbar unendlich viele Lösungen, die **Eigenkreisfrequenzen**

$$\hat{\omega}_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{\ell}, \quad n \in \mathbb{N},$$

also

$$\omega_n = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi c}{\ell}.$$

Die zugehörigen **Eigenformen** lauten:

$$W_n(x) = \sin \hat{\omega}_n x = \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \frac{x}{\ell}\right).$$

Damit ergibt sich die Gesamtlösung zu

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \sin \omega_n t + C_{2n} \cos \omega_n t) \sin \hat{\omega}_n x, \quad \hat{\omega}_n = \frac{\omega_n}{c}.$$

Sie muss noch an die Anfangsbedingungen angepasst werden. Hierzu werden die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{\ell} \sin \hat{\omega}_n x \sin \hat{\omega}_m x \, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\ell}{2}, & n = m \end{cases}$$

verwendet. Damit ergeben sich die Integrationskonstanten C_{1n} und C_{2n} als **Fourierkoeffizienten** von $u_0(x)$ und $v_0(x)$:

$$\begin{aligned} \omega_n C_{1n} &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin \hat{\omega}_n x \, dx, \\ C_{2n} &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} u_0(x) \sin \hat{\omega}_n x \, dx. \end{aligned}$$

Die Bewegung lässt sich auch als eine Wellenbewegung deuten. Hierzu führen wir die Variablentransformation $v = x + ct$, $w = x - ct$ durch. Die Ableitungen transformieren sich dann gemäß der Kettenregel wie folgt:

1. Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial}{\partial w} = c \frac{\partial}{\partial v} - c \frac{\partial}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial w} \end{aligned}$$

2. Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial v \partial w} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} \end{aligned}$$

Einsetzen in die homogene Bewegungsgleichung liefert dann

$$0 = u_{tt} - c^2 u_{xx} = c^2 (u_{vv} - 2u_{vw} + u_{ww}) - c^2 (u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}) = -4c^2 u_{vw},$$

also

$$u_{vw} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = f(v) + g(w) = f(x + ct) + g(x - ct),$$

wobei $f(v)$ und $g(w)$ zwei beliebige, zweifach stetig differenzierbare Funktionen sind. An dieser Darstellung der Lösung lässt sich erkennen, dass die Lösungen Wellen sind, die sich jeweils nach links bzw. nach rechts ausbreiten.

Zur Ermittlung der Ausbreitungsgeschwindigkeit betrachten wir die sich nach links ausbreitende Welle $f(x + ct)$. Es ist $f(x, t) = f(x_1, t_1)$ für $x + ct = x_1 + ct_1$, also $x - x_1 = -c(t - t_1)$. Der Grenzübergang $t_1 \rightarrow t$ liefert dann

$$\frac{dx}{dt} = -c,$$

mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit c . Das Vorzeichen gibt die Ausbreitungsrichtung der Welle (hier: negativ=nach links) an.

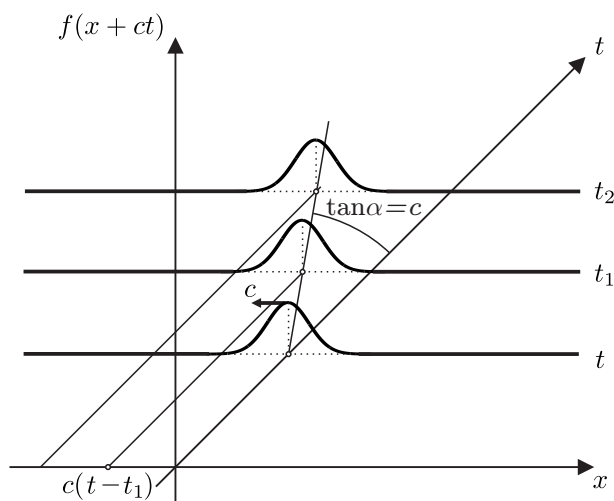


Abb. 11.25: Wellenausbreitung.

12 Kreiseltheorie

Ein **Kreisel** ist ein starrer Körper, der an einem Punkt fixiert wird. Er kann daher keine translatorische Bewegung mehr ausführen, sondern nur eine Drehbewegung um den fixierten körperfesten Punkt. Zur Beschreibung der Bewegung stehen dann die Eulerschen Kreiselgleichungen zur Verfügung. Ihre Lösung ist aber mathematisch anspruchsvoll, denn es handelt sich um nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungen, für die geschlossene Lösungen bis heute nur in Spezialfällen bekannt sind. Mit dem Kreisel liegt ein relativ einfaches (im Gegensatz zu komplexen Systemen mit vielen Wechselwirkungen), aber kompliziertes System vor. Dies ist charakteristisch für viele Fragestellungen der nichtlinearen Dynamik.

Dieses Kapitel soll an Beispielen illustrieren, welche Möglichkeiten existieren, um komplizierte Systeme zu untersuchen und damit besser zu verstehen. Dazu gehören die Beschreibung des Problems mit geeigneten Koordinaten und die Bestimmung von Invarianten der Bewegung mit Hilfe physikalischer Gesetzmäßigkeiten, die Untersuchung der Stabilität der Bewegung bei kleinen Störungen und letztlich auch die Vorgabe der Bewegung zur Bestimmung des dynamischen Reaktionsmoments.

12.1 Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen zur Untersuchung der Bewegung eines Kreisels sind die Eulerschen Kreiselgleichungen (8.19), die für den fixierten Punkt O des starren Körpers, der somit raum- und körperfest ist, formuliert werden:

$$\begin{aligned}\dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) &= M_1^O, \\ \dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) &= M_2^O, \\ \dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) &= M_3^O.\end{aligned}$$

Das $O, \tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3$ -Bezugssystem ist dabei das an O gebundene körperfeste Haupttrichtungssystem des Massenträgheitstensors, der Index H bei den Hauptträgheitsmomenten und die Tilde über den Koordinaten wurde zur Vereinfachung der Notation weggelassen. Die in diesen Gleichungen auftretenden Drehgeschwindigkeiten werden nun durch die Euler-Winkel ausgedrückt. Die besonderen Vorteile bei Verwendung der Euler-Winkel (gegenüber bspw. den Kardan-Winkeln) werden bei der Diskussion des kräftefreien Kreisels im nächsten Abschnitt deutlich werden.

12.2 Kräftefreier Kreisel

Als **kräftefreier Kreisel** wird ein Kreisel ohne äußeres Moment bezeichnet. Unter Einwirkung des Schwerfeldes kann ein kräftefreier Kreisel dadurch realisiert werden, dass er im Schwerpunkt abgestützt wird.

Das Drallgesetz bei Drehung um einen festen Punkt O lautet

$$\dot{D}^O = \mathbf{0},$$

der Drall D^O ist daher ein konstanter Vektor und somit eine Invariante der Bewegung. Im körperfesten Hauptrichtungssystem ergibt sich daher

$$D^O = \theta_i^O \omega_i \tilde{e}_{(i)} = \text{konst. Vektor.}$$

Im einfachsten Fall, dass ω in Richtung einer Hauptachse liegt (z.B. in \tilde{e}_3 -Richtung), gilt: $\omega_1 = \omega_2 = 0$ und somit $D_1^O = D_2^O = 0$. Wegen $D_3^O = \text{const.}$ ist $D_3^O = \theta_3^O \omega_3$ ebenfalls konstant. Da das Massenträgheitsmoment konstant ist, folgt daraus mit $\omega_3 = \text{const.}$ eine weitere Invariante der Bewegung. In diesem Fall rotiert der kräftefreie Kreisel permanent um die \tilde{e}_3 -Achse. In der Praxis werden die beiden weiteren Komponenten der Drehgeschwindigkeit aber nicht exakt verschwinden. Es liegen dann kleine Störungen der Bewegung vor. Ist die permanente Drehung des kräftefreien Kreisels stabil gegen kleine Störungen?

Die Antwort liefert der folgende Satz:

Satz 12.1 (Stabilität der Drehung des kräftefreien Kreisels)
Permanente Drehungen eines kräftefreien Kreisels sind nur um die Achse des kleinsten oder größten Hauptträgheitsmoments stabil.

Beweis. Ausgangspunkt sind die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 \theta_1^O - \omega_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O) &= 0, \\ \dot{\omega}_2 \theta_2^O - \omega_3 \omega_1 (\theta_3^O - \theta_1^O) &= 0, \\ \dot{\omega}_3 \theta_3^O - \omega_1 \omega_2 (\theta_1^O - \theta_2^O) &= 0 \end{aligned} \quad (12.1)$$

des kräftefreien Kreisels, in denen ω_1 und ω_2 kleine Störungen sind, während die eigentliche Drehung weiterhin um die \tilde{e}_3 -Achse erfolgt. Die letzte Gleichung liefert bei Vernachlässigung quadratisch kleiner Terme in den Störungen

$$\dot{\omega}_3 \theta_3^O = 0,$$

also tatsächlich die zeitliche Konstanz der Drehgeschwindigkeit um die \tilde{e}_3 -Achse. Wie entwickeln sich aber die Störgrößen ω_1 und ω_2 mit der Zeit?

Hierüber geben die ersten beiden Gleichungen Auskunft. O.B.d.A. betrachten wir die zeitliche Entwicklung der Störgröße ω_1 , indem wir die erste Gleichung unter Berücksichtigung der Konstanz von ω_3 nach der Zeit ableiten,

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O = \dot{\omega}_2 \omega_3 (\theta_2^O - \theta_3^O)$$

und $\dot{\omega}_2$ durch die zweite Gleichung in (12.1) ersetzen:

$$\dot{\omega}_1 \theta_1^O = \frac{(\theta_3^O - \theta_1^O)(\theta_2^O - \theta_3^O)}{\theta_2^O} \omega_3^2 \omega_1$$

bzw.

$$\ddot{\omega}_1 + \frac{(\theta_3^O - \theta_1^O)(\theta_2^O - \theta_3^O)}{\theta_1^O \theta_2^O} \omega_3^2 \omega_1 = 0. \quad (12.2)$$

Diese Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten für ω_1 . Ist der zweite Term positiv, dann beschreibt

die Gleichung freie ungedämpfte Schwingungen. Die zeitliche Entwicklung der Störung ω_1 ist dann eine harmonische Funktion, die Amplitude der Schwingung ergibt sich aus den Anfangsbedingungen, also der Anfangsstörung und der Anfangsstörgeschwindigkeit. Kleine Störungen bleiben daher auch klein und die permanente Drehung ist stabil. Anders verhält es sich, wenn der zweite Term in Gl. (12.2) negativ ist. Der Exponentialansatz

$$\omega_1 = \exp(\lambda t)$$

würde dann auf zwei reelle Lösungen führen, eine positive und eine negative. Da sich die allgemeine Lösung aus diesen beiden Lösungen zusammensetzt, beinhaltet sie einen exponentiell wachsenden Term. Kleine Störungen wachsen daher nach einem Exponentialgesetz über alle Grenzen und dominieren dann die Bewegung, die permanente Drehung ist in diesem Fall instabil.

Das Vorzeichen des zweiten Terms in Gl. (12.2) wird durch den Zähler

$$(\theta_3^O - \theta_1^O)(\theta_3^O - \theta_2^O)$$

des Bruchs bestimmt. Er ist positiv, wenn θ_3^O das größte oder das kleinste Hauptträgheitsmoment ist und negativ, wenn θ_3^O zwischen den anderen beiden Hauptträgheitsmomenten liegt. Im letzten Fall ist daher die permanente Drehung instabil. ■

Anmerkung. Der Satz lässt sich sehr schön durch drehendes Werfen eines langen, flachen Gegenstands veranschaulichen und ist daher auch als „Tennisschlägertheorem“ bekannt.

Wir betrachten nun noch den Fall, dass die Drehgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$ in einer durch zwei Hauptrichtungen aufgespannten Ebene liegt. Ist bspw. $\omega_2 = 0$, aber $\omega_1 \neq 0$ und $\omega_3 \neq 0$, dann folgt aus der ersten und der letzten Bewegungsgleichung (12.1), dass ω_1 und ω_3 konstant sind. Der konstante Drallvektor ist

$$\boldsymbol{D}^O = \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} = \theta_1^O \omega_1 \tilde{\boldsymbol{e}}_1 + \theta_3^O \omega_3 \tilde{\boldsymbol{e}}_3.$$

Ist $\theta_1^O \neq \theta_3^O$, dann sind \boldsymbol{D}^O und $\boldsymbol{\omega}$ nicht parallel.

Ferner können wir noch eine weitere Invariante der Bewegung finden: die kinetische Energie. Da der Kreisel kräftefrei ist, ist die kinetische Energie und daher auch das Skalarprodukt $\boldsymbol{D}^O \cdot \boldsymbol{\omega}$ konstant. Da sowohl die Beträge des Drallvektors als auch des Drehgeschwindigkeitsvektors konstant sind, bedeutet dies:

1. Die Projektion der Drehgeschwindigkeit auf den Drall ist konstant.
2. Der Winkel zwischen dem Drehgeschwindigkeitsvektor und dem Drallvektor ist während der Bewegung konstant.

Der Drehgeschwindigkeitsvektor bewegt sich auf einem Kegel um die raumfeste Richtung des Dralls, vgl. Abb. 12.1. Dies wird als **Nutationsbewegung** des kräftefreien Kreisels bezeichnet.

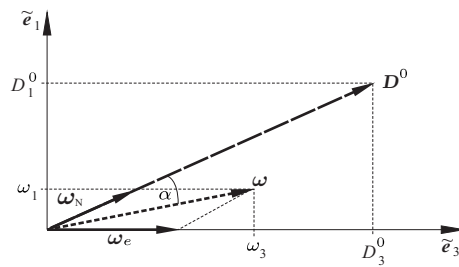


Abb. 12.1: Darstellung von Drall und Drehgeschwindigkeit in der Haupttrichtungsebene.

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und beschränken uns auf einen symmetrischen Kreisel mit $\theta_1^O = \theta_2^O = A$ und $\theta_3^O = B$. Die Symmetrieachse \tilde{e}_3 des Kreisels wird als Figurenachse bezeichnet. Aufgrund der Symmetrie folgt aus der dritten Gleichung in (12.1), dass ω_3 , die Komponente des Drehgeschwindigkeitsvektors in Richtung der Figurenachse, konstant und damit eine Invariante der Bewegung ist. Der Kreisel rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Figurenachse. Die anderen beiden Gleichungen in (12.1) lassen sich dann ebenfalls leicht lösen, denn sie sind aufgrund der Konstanz von ω_3 linear und die Kopplung lässt sich durch Zeitableitung und Einsetzen der jeweils anderen Gleichung leicht beseitigen. Es ergeben sich dann die entkoppelten **linearen** Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$A\ddot{\omega}_1 + \frac{(A-B)^2}{A}\omega_3^2\omega_1 = 0,$$

$$A\ddot{\omega}_2 + \frac{(A-B)^2}{A}\omega_3^2\omega_2 = 0$$

für ω_1 und ω_2 . Sie beschreiben freie ungedämpfte Schwingungen mit gleicher Eigenkreisfrequenz

$$\omega = \frac{(A-B)\omega_3}{A}.$$

Wegen

$$\dot{\omega}_2 = \frac{B-A}{A}\omega_3\omega_1 = -\omega\omega_1,$$

vgl. (12.1), lauten die Lösungen

$$\omega_1 = C \sin(\omega t + \varepsilon) \text{ und } \omega_2 = C \cos(\omega t + \varepsilon).$$

Die beiden Integrationskonstanten C und ε ergeben sich aus den Anfangsbedingungen

$$\omega_{10} = \omega_1(t=0) = C \sin \varepsilon,$$

$$\omega_{20} = \omega_2(t=0) = C \cos \varepsilon$$

zu

$$C = \sqrt{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2} \text{ und } \tan \varepsilon = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}.$$

Auch in diesem Fall ist daher der Betrag des Drehgeschwindigkeitsvektors während der Bewegung konstant.

Da weiterhin wegen der Energieerhaltung die Projektion des Drehgeschwindigkeitsvektors auf den Drallvektor konstant ist und der Winkel zwischen Drehgeschwindigkeitsvektor und Drallvektor konstant ist und nun aber auch die Komponente des Drehgeschwindigkeitsvektors in Richtung der Figurenachse konstant ist, muss auch der Winkel zwischen Figurenachse und Drallvektor konstant sein. Für den symmetrischen kräftefreien Kreisel bleibt daher die gegenseitige Lage von Figurenachse (\tilde{e}_3), Drehachse (ω) und Drallachse e_3 zueinander unveränderlich.

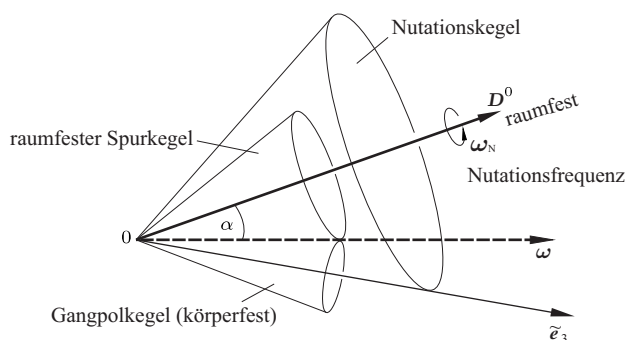


Abb. 12.2: Spurkegel, Gangpolkegel und Nutationskegel des symmetrischen kräftefreien Kreisels.

Diese Situation ist in Abbildung 12.2 dargestellt. Der körperfeste Gangpolkegel rollt auf dem raumfesten Spurkegel ab. Die Figurenachse umfährt dabei den Nutationskegel. Die Spitzen aller Kegel liegen in O .

Ist die raumfeste Richtung des konstanten Dralls die e_3 -Achse, dann haben die drei Euler-Winkel folgende anschauliche Bedeutung:

ϑ : Winkel zwischen Figurenachse und Drallachse.

ψ : Drehung der Figurenachse um die Drallachse.

φ : Drehung des Kreisels um die Figurenachse.

Der Zusammenhang zwischen den Euler-Winkeln und den Drehgeschwindigkeiten ergibt sich aus Gl. (2.27) zu:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.\end{aligned}$$

Aufgrund dieser anschaulichen Bedeutung der Winkel eignen sich Euler-Winkel besser als Kardan-Winkel zur Beschreibung der Bewegung des kräftefreien Kreisels; insbesondere erschließt sich dadurch auch die zweifache Drehung um die dritte Achse, da ihr im körperfesten Bezugssystem (Figurenachse) als auch im raumfesten Bezugssystem (Richtung des Dralls) eine besondere Bedeutung zukommt.

12.3 Nicht kräftefreier Kreisel

Für den nicht kräftefreien Kreisel existiert keine allgemeine Lösung mehr. Die Kreiselgleichungen können jedoch nicht nur zur Ermittlung der Bewegung, sondern auch zur Ermittlung des Reaktionsmoments zu vorgegebenen, bekannten Bewegungen verwendet werden. Dies wird im Folgenden an einem Beispiel veranschaulicht.

Wir betrachten den in Abb. 12.3 skizzierten symmetrischen Rotor bei stationärer Drehung ($\psi = \text{const.}$, $\dot{\varphi} = \text{const.}$) um eine raum- und eine körperfeste Achse (\mathbf{e}_3 bzw. $\tilde{\mathbf{e}}_3$) mit Fixpunkt O . Der Winkel ϑ zwischen der raumfesten \mathbf{e}_3 -Achse und der körperfesten $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Achse sei konstant.

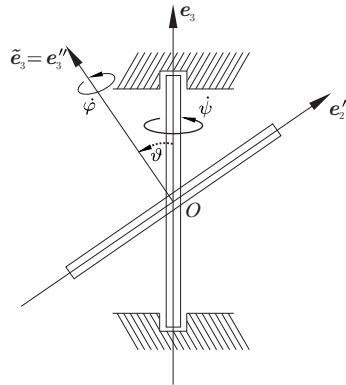


Abb. 12.3: Symmetrischer Rotor mit Drehung um eine raum- und eine körperfeste Achse.

1. Drehung (Zwangsdrehung, Präzessionsdrehung) mit $\dot{\psi}$ um die **raumfeste** \mathbf{e}_3 -Achse
2. Drehung (Eigendrehung) mit $\dot{\varphi}$ um die körperfeste $\tilde{\mathbf{e}}_3$ -Hauptachse (Figurenachse) des Kreisels

Da das Reaktionsmoment von Interesse ist, erfolgt die Berechnung im O , \mathbf{e}_1'' , \mathbf{e}_2'' , $\mathbf{e}_3'' = \tilde{\mathbf{e}}_3$ -Bezugssystem der Euler-Winkel, da dieses Bezugssystem die Drehung mit ψ um die raumfeste Achse sowie die Verkippung um $\vartheta = \text{const.}$, nicht jedoch die Eigendrehung berücksichtigt, vgl. Abb. 2.18. Aufgrund der Symmetrie besitzt der Massenträgheitstensor auch im O , \mathbf{e}_1'' , \mathbf{e}_2'' , \mathbf{e}_3'' -Bezugssystem konstante Koeffizienten. Da auch der Drehgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_z + \boldsymbol{\omega}_e$$

mit der Drehgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega}_z = \dot{\psi} \mathbf{e}_3 = \dot{\psi} (\sin \vartheta \mathbf{e}_2'' + \cos \vartheta \mathbf{e}_3'')$$

der Zwangsdrehung und der Drehgeschwindigkeit

$$\boldsymbol{\omega}_e = \dot{\varphi} \tilde{\mathbf{e}}_3 = \dot{\varphi} \mathbf{e}_3''$$

der Eigendrehung im $O, \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$ -Bezugssystem konstante Koeffizienten besitzt, liefert das Drallgesetz

$$\frac{d\mathbf{D}^O}{dt} = \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O = \mathbf{M}^O,$$

so dass sich das vom Kreisel auf die Umgebung ausgeübte **Kreiselmoment** zu

$$\mathbf{M}_T := -\mathbf{M}^O = -\boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O$$

ergibt. Den Drallvektor \mathbf{D}^O berechnen wir aus $\mathbf{D}^O = \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega}$, wobei im $O, \mathbf{e}_1'', \mathbf{e}_2'', \mathbf{e}_3''$ -Bezugssystem der Massenträgheitstensor aufgrund der Rotationssymmetrie die Darstellung

$$\boldsymbol{\Theta}^O = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}$$

und der Drehgeschwindigkeitsvektor

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

ist, so dass sich

$$\mathbf{D}^O = \boldsymbol{\Theta}^O \cdot \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} 0 \\ A\dot{\psi} \sin \vartheta \\ B(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix}$$

im gewählten Bezugssystem ergibt. Das Kreiselmoment ist dann

$$\mathbf{M}_T = -\boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{D}^O = - \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\psi} \sin \vartheta \\ \dot{\psi} \cos \vartheta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ A\dot{\psi} \sin \vartheta \\ B(\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) \end{bmatrix}.$$

Es besitzt daher nur eine Komponente

$$\mathbf{M}_T = -(B\dot{\varphi} + (B - A)\dot{\psi} \cos \vartheta) \dot{\psi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1''$$

in \mathbf{e}_1'' -Richtung.

Spezialfälle:

1. Schleudermoment: Eigendrehung $\dot{\varphi} \equiv 0$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_T = -\frac{1}{2}(B - A)\dot{\psi}^2 \sin 2\vartheta \mathbf{e}_1''$$

2. schneller Kreisel: Eigendrehung $\dot{\varphi} \gg$ Zwangsdrehung $\dot{\psi}$

$$\Rightarrow \mathbf{M}_T = -B\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin \vartheta \mathbf{e}_1''$$

Ist die Komponente des Kreiselmoments in \mathbf{e}_1'' -Richtung negativ, dann bewirkt es eine Drehung der Figurenachse in Richtung der raumfesten Achse der Zwangsdrehung (vgl. Experiment am Kreiselmodell).

A Verzeichnis der Definitionen

1.1	materielles Medium, Masse	13
1.3	Körper, Momentanlage, momentane Oberfläche	14
1.5	Körpersystem	15
1.6	materiell offenes System	15
1.8	Starrer Körper	16
2.1	Bezugssystem	20
2.3	Bewegung eines Massenpunkts	21
2.4	Geschwindigkeit	22
2.5	Beschleunigung	23
2.7	Bahn eines Massenpunkts	28
2.8	Bogenlänge	28
2.9	Begleitende Basis	29
2.11	Schmiegeebene	30
2.12	Krümmung, Krümmungsradius	31
2.15	Drehgeschwindigkeit	35
2.17	Führungsgeschwindigkeit, Relativgeschwindigkeit	36
3.1	Bewegung eines Körpers	49
3.2	Momentanlage	49
3.3	Ebene Bewegung	50
3.5	Materielle und räumliche Koordinaten	51
3.6	Bezugslage, Bezugskonfiguration	51
3.10	Kinematik	57
3.12	Momentanpol	59
3.13	Spurkurve, Rollkurve	60
3.15	Linearisierter Verzerrungstensor	64
4.1	Freie Bewegung	66
4.2	Bindung, geführte Bewegung	66
4.3	Freiheitsgrad	66
4.4	Vollständige Bindung	67
4.8	Klassifikation von Bindungen	70
5.2	Masse	74
5.3	Statisches Massenmoment	75
5.4	Massenmittelpunkt	75
5.6	Impuls	77
5.7	Drall	78
6.3	Flächenkraft, Volumenkraft	81
6.5	Resultierende Kraft	81
6.6	Moment einer Kraftdichte	82
6.7	Resultierendes Moment einer Kraftdichte	83
6.8	Dyname	84
6.10	Äquivalenz von Dynamen	87
6.12	Einzelkraft, freies Moment	88
6.14	Moment einer Einzelkraft	88
7.3	Schneiden	94
8.12	Massenträgheitstensor	109
8.13	Massenträgheitsmomente	110
8.22	Zustand der Ruhe	122
9.1	Kinetische Energie	124

9.3	Anteile der kinetischen Energie des starren Körpers	125
9.4	Äußere Leistung	126
9.6	Innere Leistung	129
9.12	Äußere Arbeit	134
9.14	Innere Arbeit	134
9.19	Potential	137
9.21	Konservative Kräfte	137
9.27	Virtuelle Leistungen	145
9.31	Gâteaux-Differential, erste Variation	152
11.1	Schwingung	176

B Verzeichnis der Axiome

1.2	Massenerhaltung	13
2.2	Galileisches Trägheitsprinzip	20
5.1	Existenz einer Massendichte	73
6.1	Existenz einer Flächenkraftdichte	80
6.2	Existenz einer Volumenkraftdichte	80
6.4	Additivität von Flächen- und Volumenkräften	81
7.1	Newton-Eulersche Bewegungsgesetze	92
7.2	Eulersches Schnittprinzip	94
7.5	Cauchysches Spannungsprinzip	95

C Verzeichnis der Sätze

1.4	Massenerhaltung für Körper	14
2.10	Orthonormalität der begleitenden Basis	29
2.13	Euler-Poissonsche Differentiationsformel	33
2.14	Eindeutigkeit der Funktion $\omega(\lambda)$	34
2.22	Hintereinanderausführung von Drehungen	44
3.11	Kinemataversetzung	57
4.5	Freiheitsgrade des starren Körpers	68
5.8	Drall im Massenmittelpunkt	79
6.9	Momentenversetzungsgleichung	85
6.11	Dynamenäquivalenz	87
8.1	Existenz des Spannungstensors (Satz von Cauchy)	96
8.4	Massenmittelpunktsatz für den Impuls	98
8.5	Gleichförmige Bewegung kräftefreier Körper	98
8.6	Massenmittelpunktsatz für den Drall	99
8.8	Massenmittelpunktsatz für den Impuls, bew. Bezugss.	103
8.10	Drallsatz für einen bewegten Bezugspunkt	107
8.15	Satz von Steiner	113
8.17	Massenträgheitsmomente bei gedrehten Basisvektoren	114
8.18	Eulersche Kreisgleichungen	116
8.20	Lokale Form des Impulsgesetzes	120
8.21	Lokale Form des Drallgesetzes	121
8.23	Gleichgewichtsbedingungen im Zustand der Ruhe	122
9.2	Kinetische Energie des starren Körpers	124
9.7	Innere Leistung eines Körpers	130
9.8	Allgemeiner Leistungssatz	131
9.9	Leistungssatz, masseloses deformierbares Element	131
9.10	Leistungssatz, starrer Körper	132
9.11	Leistungssatz für ein deformierbares Kontinuum	132
9.15	Allgemeiner Arbeitssatz	134
9.16	Arbeitssatz, masseloses deformierbares Element	135
9.17	Arbeitssatz, starrer Körper	135
9.18	Arbeitssatz für ein deformierbares Kontinuum	136
9.20	Energiesatz	137
9.22	Potential der Gewichtskraft	137
9.23	Potential eines masselosen Verbindungselementes	138
9.28	Addierbarkeit der virtuellen inneren Leistungen	146
9.29	Addierbarkeit der virtuellen inneren Arbeiten	148
10.1	Massenmittelpunktsätze in integraler Form	167
12.1	Stabilität der Drehung des kräftefreien Kreisels	207