INSTITUT FÜR STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Priv.-Doz. Dr. D. Kadelka

SS 2008

Klausur (Maschineningenieure)

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 9.9.2008

Musterlösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{12}, y_{12})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	-2.1	-1	0.1	1.1	1.6	2.9	4.2	5	5.7	7	8.3	9
y_j	7.1	3.3	6.4	5.9	4.1	1.2	1.3	2.7	0	-3.3	-5.7	-7.1

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

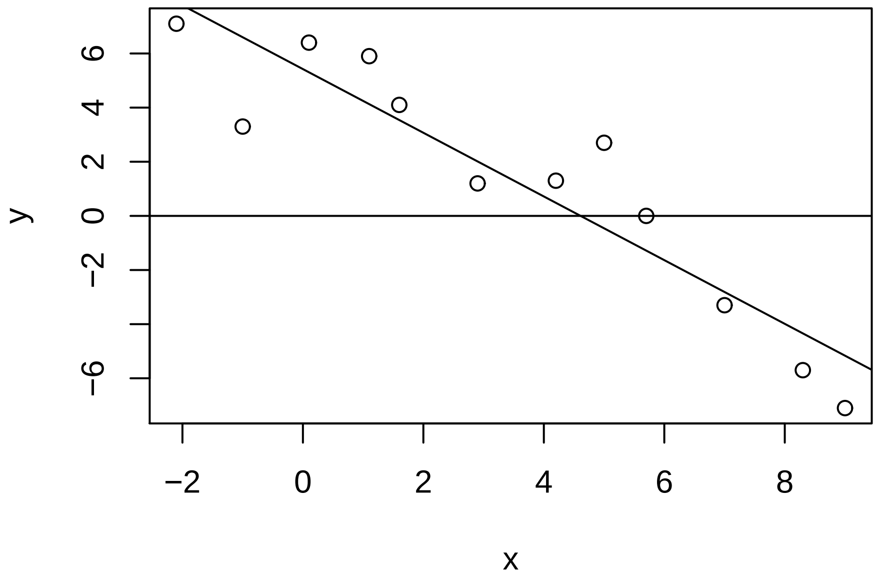
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 3.48 \qquad s_x = 3.643$$
$$\bar{y} = 1.32 \qquad s_y = 4.642$$
$$r_{xy} = -0.9233$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.
Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= -1.176 \\ a^* &= 5.42 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 5.42 - 1.176 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (-7.1,\ -5.7,\ -3.3,\ 0,\ 1.2,\ 1.3,\ 2.7,\ 3.3,\ 4.1,\ 5.9,\ 6.4,\ 7.1)$$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Mit $k = [12 \cdot 0.15] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.15} = \frac{1}{12 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \ldots + y_{(11)}) = 1.59$$

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.85-Quantil $\tilde{y}_{0.85}$ von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Da $12 \cdot 0.85 = 10.2$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [10.2] = 10$

$$\tilde{y}_{0.85} = y_{(k+1)} = y_{(11)} = 6.4$$

e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Da $0.25 \cdot 12 = 3$ und $0.75 \cdot 12 = 9$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 9$

$$\begin{aligned}
\tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(3)} + y_{(4)}}{2} = -1.65 \\
\tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(9)} + y_{(10)}}{2} = 5
\end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 6.65$.

Aufgabe 2

Die Zufallsvariable X besitze die Verteilung $\mathcal{N}(15, 25)$ und die Zufallsvariable Y die Verteilung $\mathcal{N}(-12, 144)$. X und Y seien stochastisch unabhängig.

a) Skizzieren Sie die Dichte $f_X(t)$ von X für $0 \leq t \leq 30$.

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(X \geq 22)$.

c) Bestimmen Sie die Standardabweichung σ_{X+Y} von $X + Y$.

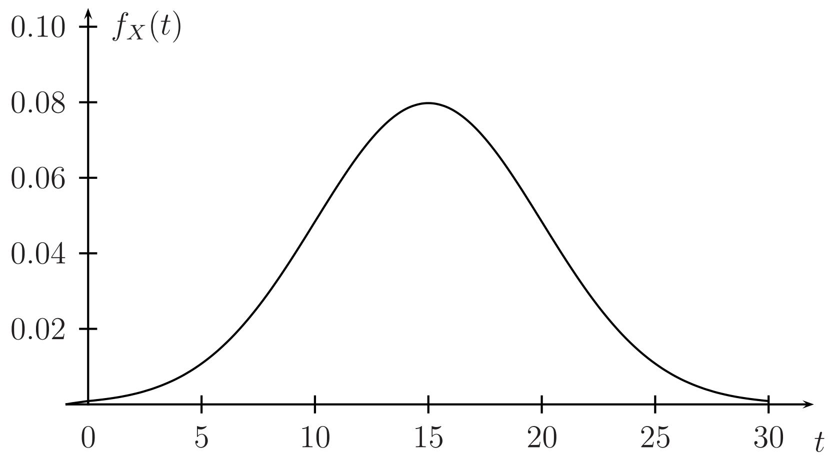
d) Welche Verteilung besitzt $Z := X/5 - Y/4$?

e) Berechnen Sie die Kovarianz $C(Z, X)$ von Z und X. Sind X und Z positiv korreliert, negativ korreliert oder unkorreliert?

f) Für welches $a > 0$ gilt $\mathbb{P}(|X - 15| \leq a) = 0.9545$?

Lösung:

a) Wegen (9.3) ist $f_X(t) = \dfrac{1}{5 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-15)^2}{2 \cdot 25}}$ und damit



b) Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{N}(15, 25)$ gilt nach (9.6) und Tabelle A.1

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 22) = 1 - \mathbb{P}(X < 22) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 22) &= 1 - \Phi\left(\frac{22 - 15}{5}\right) \\ &= 1 - \Phi(1.4) = 1 - 0.9192 = 0.0808\end{aligned}$$

c) Wegen Satz 12.23 f) gilt $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 25 + 144 = 169$, da X und Y stochastisch unabhängig sind, und damit

$$\sigma_{X+Y} = \sqrt{V(X + Y)} = \sqrt{169} = 13.$$

d) Wegen Satz 9.7 a) gilt $X/5 = \frac{1}{5} \cdot X \sim \mathcal{N}(\frac{1}{5} \cdot 15, \frac{1}{5^2} \cdot 25) = \mathcal{N}(3, 1)$ und $-Y/4 = \frac{-1}{4} \cdot Y \sim \mathcal{N}(\frac{-1}{4} \cdot (-12), \frac{1}{4^2} \cdot 144) = \mathcal{N}(3, 9)$, also wegen der Unabhängigkeit von $X/5$ und $-Y/4$ und der Faltungsformel 11.16

$$X/5 - Y/4 \sim \mathcal{N}(3 + 3, 1 + 9) = \mathcal{N}(6, 10).$$

e) Wegen Satz 12.23 und der Unabhängigkeit von $X/5$ und $-Y/4$ gilt

$$C(Z,X) = C(X/5 - Y/4, X) = C(X/5, X) - C(Y/4, X) = \frac{1}{5}C(X,X) - 0 = \frac{1}{5}V(X) = 5.$$

Hieraus erhält man ohne weitere Rechnung, dass $\rho(Z,X) > 0$ ist. Daher sind X und Z positiv korreliert.

f) Wir wenden die $k \cdot \sigma$-Regel aus (9.7) an mit $k = 2$. Danach gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mu| \leq 2 \cdot \sigma) = 2 \cdot \Phi(2) - 1 = 0.9545,$$

falls $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, hier also mit $\mu = 15$, $\sigma = 5$ und $t = 2$ wegen (9.7)

$$\mathbb{P}(|X - 15| \leq 10) = 0.9545.$$

Damit gilt $a = 10$.

Aufgabe 3

Aus einer Sendung von 20 Maschinenteilen, unter denen sich 3 defekte und 17 intakte befinden, wählt man zur Kontrolle 4 Stück zufällig nacheinander und ohne Zurücklegen aus.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das erste herausgegriffene Maschinenteil intakt ist?

b) Welche Verteilung besitzt X, die zufällige Anzahl der herausgegriffenen intakten Maschinenteile und welche Verteilung besitzt Y, die zufällige Anzahl der herausgegriffenen defekten Maschinenteile?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite herausgegriffene Maschinenteil intakt ist?

d) Man berechne die Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 entnommenen Teile intakt sind und die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 4 entnommenen Teilen mindestens ein defektes ist.

e) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass das erste entnommene Teil intakt ist, aber dass nicht alle 4 Teile intakt sind.

f) Man berechne die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass das erste herausgegriffene Maschinenteil intakt ist unter der Bedingung, dass mindestens ein defektes Teil ausgewählt wurde.

Lösung:

a) Sei A das Ereignis, dass das erste herausgegriffene Maschinenteil intakt ist. Mit $r := 3$, die Anzahl der defekten Maschinenteile, und $s := 17$, die Anzahl der intakten Maschinenteile, ist

$$\mathbb{P}(A) = \frac{s}{r+s} = 0.85 \ .$$

b) Da die herausgegriffenen Teile nicht zurückgelegt werden, gilt mit $n = 4$

$$\begin{aligned} X &\sim Hyp(n, s, r) = Hyp(4, 17, 3) \\ Y &\sim Hyp(n, r, s) = Hyp(4, 3, 17). \end{aligned}$$

c) Sei B das Ereignis, dass das zweite herausgegriffene Maschinenteil intakt ist. Es ist $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{s-1}{r+s-1}$ da unter der Bedingung B beim zweiten Ziehen nur noch $s-1$ von $r+s-1$ Teile intakt sind und analog $\mathbb{P}(B|A^c) = \dfrac{s}{r+s-1}$. Mit der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c) = \frac{s-1}{r+s-1} \cdot \frac{s}{r+s} + \frac{s}{r+s-1} \cdot \frac{r}{r+s} \\ &= \frac{s \cdot (r+s-1)}{(r+s) \cdot (r+s-1)} = \frac{s}{r+s} = \mathbb{P}(A) = 0.85\ . \end{aligned}$$

d) Gesucht ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{„Alle 4 entnommenen Teile intakt“}) = \mathbb{P}(X = 4) &= \frac{\binom{s}{4}\binom{r}{0}}{\binom{r+s}{4}} = \frac{\binom{17}{4}}{\binom{20}{4}} \\ &= \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{4!} \Big/ \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = 0.4912\ . \end{aligned}$$

und

$$\mathbb{P}(\text{„Mindestens 1 defektes Teil“}) = 1 - \mathbb{P}(\text{„Alle 4 entnommenen Teile intakt“}) = 0.5088\ .$$

e) Sei C das Ereignis „Alle 4 entnommenen Teile intakt“. Wegen d) gilt $\mathbb{P}(C) = 0.4912$. Gesucht ist

$$\mathbb{P}(A \setminus C) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C) = \frac{17}{20} - \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{409}{1140} = 0.3588\ ,$$

da das Ereignis C in A enthalten ist.

f) Gesucht ist

$$\mathbb{P}(A \mid C^c) = \frac{\mathbb{P}(A \cap C^c)}{\mathbb{P}(C^c)} = \frac{\mathbb{P}(A \setminus C)}{1 - \mathbb{P}(C)} = \frac{0.3588}{0.5088} = 0.7052\ .$$

Aufgabe 4

Die Zufallsvariablen X und Y nehmen die Werte $0, 1$ und 2 an. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\begin{array}{lll} \mathbb{P}(X=0) = 0.2 & \mathbb{P}(X=1) = 0.3 & \mathbb{P}(X=2) = 0.5, \\ \mathbb{P}(Y=0) = 0.1 & \mathbb{P}(Y=1) = 0.2 & \mathbb{P}(Y=2) = 0.7, \\ \mathbb{P}(X=0, Y=2) = 0.20, & & \\ \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0.06, & & \\ \mathbb{P}(X=2, Y=2) = 0.35. & & \end{array}$$

a) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

b) Ergänzen Sie die folgende Tabelle von $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$:

j \ i	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
0				0.10
1		0.06		0.20
2	0.20		0.35	0.70
$\mathbb{P}(X = i)$	0.20	0.30	0.50	

Hinweis: Die angegebenen Werte reichen zur Bestimmung der übrigen Werte aus! Überlegen Sie, welche Eigenschaften Wahrscheinlichkeiten besitzen.

c) Berechnen Sie $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $\mathbb{V}(X)$, $\mathbb{V}(Y)$ und die Kovarianz $C(X, Y)$ von X und Y.

Lösung:

a) Wären X und Y unabhängig, so müsste

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 0.2 = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = 0.2 \cdot 0.7$$

gelten. Da dies falsch ist, können X und Y nicht unabhängig sein.

b) In der rechten Spalte der Tafel stehen die Zeilensummen, in der unteren Zeile die Spaltensumme. Damit ergibt sich zuerst $0.20 + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + 0.35 = 0.70$ und daraus $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 0.15$. Für die erste Spalte gilt

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + 0.20 = 0.20.$$

Wegen $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) \geq 0$ und $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) \geq 0$ ist dies nur möglich, wenn $\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 0$ und $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 0$ gilt. Als nächstes nützen wir aus, dass

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \underbrace{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}_{=0.06} + \underbrace{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}_{=0.15} = 0.30$$

gilt, woraus $\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 0.09$ folgt. Die beiden verbleibenden Werte folgen dann daraus, dass in der rechten Spalte die Zeilensummen stehen. Es ergibt sich

j \ i	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
0	0.00	0.09	0.01	0.10
1	0.00	0.06	0.14	0.20
2	0.20	0.15	0.35	0.70
$\mathbb{P}(X = i)$	0.20	0.30	0.50	1.00

c) Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= 0\cdot\mathbb{P}(X=0)+1\cdot\mathbb{P}(X=1)+2\cdot\mathbb{P}(X=2)=0.3+2\cdot0.5=1.3,\\
\mathbb{E}Y &= 0\cdot\mathbb{P}(Y=0)+1\cdot\mathbb{P}(Y=1)+2\cdot\mathbb{P}(Y=2)=0.2+2\cdot0.7=1.6,\\
\mathbb{E}X^2 &= 0\cdot\mathbb{P}(X=0)+1^2\cdot\mathbb{P}(X=1)+2^2\cdot\mathbb{P}(X=2)=0.3+2^2\cdot0.5=2.3,\\
\mathbb{E}Y^2 &= 0\cdot\mathbb{P}(Y=0)+1^2\cdot\mathbb{P}(Y=1)+2^2\cdot\mathbb{P}(Y=2)=0.2+2^2\cdot0.7=3.0
\end{aligned}$$

und daraus $V(X)=\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2=2.3-1.3^2=0.61$ und $V(Y)=\mathbb{E}Y^2-(\mathbb{E}Y)^2=3.0-1.6^2=0.44$. Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X\cdot Y) = 1\cdot\mathbb{P}(X=1,Y=1)+1\cdot2\cdot\mathbb{P}(X=1,Y=2)\\
+2\cdot1\cdot\mathbb{P}(X=2,Y=2)+2\cdot2\cdot\mathbb{P}(X=2,Y=2)=2.04
\end{aligned}$$

und damit

$$C(X,Y)=\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}Y=2.04-1.3\cdot1.6=-0.04.$$

Wegen $C(X,Y)\neq0$ folgt auch hieraus, dass X und Y nicht unabhängig sein können.

Aufgabe 5

Eine Zufallsvariable Y habe die Dichte

$$x\to g(x):=\begin{cases}0 & ,\ x\le1\ ,\\ c/x^{c+1} & ,\ x>1\ ,\end{cases}$$

wobei $c>0$ ein fester Parameter ist.

a) Zeigen Sie, dass Y die Verteilungsfunktion

$$t\to G(t):=\begin{cases}0 & ,\ t\le1,\\ 1-\dfrac{1}{t^c} & ,\ t>1\end{cases}$$

besitzt.

b) Berechnen Sie das q-Quantil von Y für $0<q<1$.

c) Es sei $c>2$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$, das zweite Moment $\mathbb{E}Y^2$ und die Varianz $V(Y)$.
Hinweis: $\int_1^\infty x^{-k}dx=\dfrac{1}{k-1}$ für $k>1$.

d) Es sei $Z:=\ln(Y)$. Berechnen Sie $\mathbb{P}(Z\le t)$ für $t>0$.

e) Die Zufallsvariable Z besitzt eine Exponentialverteilung $Exp(\alpha)$ mit einem gewissen Parameter $\alpha>0$. Bestimmen Sie α.

Lösung:

a) Es ist $G(t)=\int_{-\infty}^t g(x)\,dx$, insbesondere $G(t)=0$ für $t\le1$. Für $t>1$ gilt dagegen

$$G(t)=\int_1^t\frac{c}{x^{c+1}}\,dx=-\frac{1}{x^c}\bigg|_1^t=1-\frac{1}{t^c}\ .$$

b) Nach Definition 12.19 gilt, dass t_q die Lösung ist von

$$G(t_q) = 1 - \frac{1}{t_q^c} = q$$

und damit

$$\begin{aligned} 1 - q &= \frac{1}{t_q^c} \\ t_q^c &= \frac{1}{1-q} \\ t_q &= \sqrt[c]{\frac{1}{1-q}} . \end{aligned}$$

c) Unter Ausnützung des Hinweises erhält man

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y &= \int_{-\infty}^{\infty} x\ g(x)\ dx = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^c}\ dx = \frac{c}{c-1} \\ \mathbb{E}Y^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\ g(x)\ dx = \int_1^{\infty} \frac{c}{x^{c-1}}\ dx = \frac{c}{c-2} \\ V(Y) &= \mathbb{E}Y^2 - (\mathbb{E}Y)^2 = \frac{c}{c-2} - \left(\frac{c}{c-1}\right)^2 = \frac{c}{(c-2)\cdot(c-1)^2} \end{aligned}$$

d) Es ist wegen a) und $e^t > 1$ für $t > 0$

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\ln(Y) \leq t) = \mathbb{P}(Y \leq e^t) = 1 - \frac{1}{(e^t)^c} = 1 - \frac{1}{e^{c\cdot t}} = 1 - e^{-c\cdot t}.$$

e) Die Exponentialverteilung $Exp(\alpha)$ besitzt die Verteilungsfunktion $F(t) = 1 - e^{-\alpha\cdot t}, t > 0$. Durch Vergleich mit der Verteilungsfunktion von Z in d) folgt direkt $\alpha = c$.

Aufgabe 6

Ein Merkmal besitze die Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\ \vartheta^{3/2}\ x^{1/2}\ e^{-\vartheta x}, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

mit unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$.

a) Zeigen Sie, dass

$$T(x_1, \dots, x_n) = \frac{3n}{2\sum_{i=1}^n x_i}$$

ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ^* zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ ist, wobei $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$.

b) $x \to f_\vartheta(x)$ ist die Dichte einer speziellen $\Gamma(\alpha, \beta)$-Verteilung. Wie groß ist α und wie groß ist β ?

c) $X_1, \ldots, X_n$ seien die unabhängigen Stichprobenvariablen mit der Dichte f_ϑ. Welche Verteilung hat $Y := \sum_{i=1}^n X_i$?

d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}_\vartheta T(X_1, \ldots, X_n)$.
Hinweis: Hat eine Zufallsvariable Z die Verteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha > 1$, so gilt bekanntlich $\mathbb{E}Z^{-1} = \frac{\beta}{\alpha-1}$ (kein Nachweis erforderlich).

e) Ist T ein erwartungstreuer Schätzer für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$? Ist T asymptotisch erwartungstreu für $\gamma(\vartheta) = \vartheta$?

Lösung:

a) Es gilt

$$\ln(f_\vartheta(x)) = \ln(2/\sqrt{\pi}) + \frac{3}{2}\ln(\vartheta) + \frac{1}{2}\ln(x) - \vartheta \cdot x, \quad x > 0.$$

Damit ergibt sich die Loglikelihood-Funktion zu

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{i=1}^n \ln(f_\vartheta(x_i)) = \sum_{i=1}^n \left(\ln(2/\sqrt{\pi}) + \frac{3}{2}\ln(\vartheta) + \frac{1}{2}\ln(x_i) - \vartheta \cdot x_i \right) \\ &= n \cdot \ln(2/\sqrt{\pi}) + n \cdot \frac{3}{2} \cdot \ln(\vartheta) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \ln(x_i) - \sum_{i=1}^n \vartheta \cdot x_i \\ &= n \cdot \ln(2/\sqrt{\pi}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \ln(x_i) + \frac{3n}{2} \cdot \ln(\vartheta) - n \cdot \bar{x} \cdot \vartheta, \end{aligned}$$

wobei wir $n \cdot \bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i$ ausgenützt haben. Ableiten nach ϑ ergibt

$$M_x'(\vartheta) = \frac{3n}{2 \cdot \vartheta} - n \cdot \bar{x}$$

und

$$M_x''(\vartheta) = -\frac{3n}{2 \cdot \vartheta^2} < 0.$$

Wegen $M_x''(\vartheta) < 0$ für alle $\vartheta > 0$ erhalten wir den Maximum-Likelihood-Schätzwert $\hat{\vartheta}(x)$ als Nullstelle ϑ_0 der Gleichung $M_x'(\vartheta_0) = 0$, also $\dfrac{3n}{2 \cdot \vartheta_0} = n \cdot \bar{x}$. Aufgelöst nach ϑ_0 ergibt sich

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{3}{2\bar{x}} = \frac{3n}{2 \cdot \sum_{i=1}^n x_i} = T(x_1, \ldots, x_n).$$

b) Nach Definition 9.3 besitzt allgemein $\Gamma(\alpha, \beta)$ die Dichte

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \cdot e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Der Vergleich mit der Dichte f_ϑ liefert $\alpha - 1 = 1/2$, also $\alpha = \frac{3}{2}$ und $\beta = \vartheta$. (Tatsächlich stimmen wegen $\Gamma(3/2) = 1/2 \cdot \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}/2$ (vergl. Skript 9.2) dann f_ϑ und f überein.)

c) Wegen $X_i \sim \Gamma(\frac{3}{2}, \vartheta)$ und der Unabhängigkeit der X_i gilt nach der Faltungsformel

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma\left(\underbrace{\frac{3}{2} + \ldots + \frac{3}{2}}_{n\text{-mal}}, \vartheta \right) = \Gamma\left(\frac{3n}{2}, \vartheta \right).$$

d) Es ist $T(X_1,\ldots,X_n) = \frac{3n}{2Y} = \frac{3n}{2} \cdot Y^{-1}$ und damit

$$\mathbb{E}_\vartheta T(X_1,\ldots,X_n) = \mathbb{E}_\vartheta \frac{3n}{2} \cdot Y^{-1} = \frac{3n}{2} \cdot \mathbb{E}_\vartheta Y^{-1} \overset{\text{d) und Hinweis}}{=} \frac{3n}{2} \frac{\vartheta}{\frac{3n}{2} - 1} = \vartheta \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3n}}.$$

e) Wegen $\frac{1}{1-\frac{2}{3n}} \neq 1$ ist T <u>kein</u> erwartungstreuer Schätzer für ϑ. T ist aber asymptotisch erwartungstreu wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{3n}} \vartheta = \vartheta$.

Aufgabe 7

Eine Firma erhält eine Lieferung mit $N = 200$ Bauteilen. Zur Überprüfung der Qualität werden 50 der Bauteile überprüft. Dabei stellt sich heraus, dass 11 der überprüften Bauteile unbrauchbar sind.

a) Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $1 - \alpha = 0.9$ für den Anteil unbrauchbarer Bauteile an der Lieferung.

b) Welches zweiseitige Konfidenzintervall für den Anteil unbrauchbarer Bauteile ergäbe sich zum Konfidenzniveau $1-\alpha = 0.9$, wenn Sie von einer „praktisch" unendlich großen (d.h. $N = \infty$) Lieferung ausgehen?

Lösung:

a) Hier ist Beispiel 18.12 (Anteils-Schätzung bei endlicher Population) aus dem Skriptum anwendbar. In der Lieferung sind $N = 200$ Bauteile, von denen r (r unbekannt) unbrauchbar, die übrigen brauchbar sind. Es ist dann $T_n = 11/50 = 0.22$ der relative Anteil der unbrauchbaren Bauteile in der zufälligen Stichprobe vom Umfang $n = 50$. Mit $\vartheta := r/N$ (= unbekannter Anteil der unbrauchbaren Bauteile), $h := u_{1-\alpha/2} = u_{0.95} = 1.6449$ (Skript S. 133) und dem Endlichkeitskorrektur-Faktor $\gamma := 1 - \frac{n-1}{N-1} = 0.7538$ bilden dann

$$\frac{T_n + \frac{h^2}{2n}\gamma \pm \frac{h}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{T_n(1-T_n)\gamma + \frac{h^2}{4n}\gamma^2}}{1 + \frac{h^2}{n}\gamma}$$

den oberen bzw. unteren Endpunkt eines approximativen $(1-\alpha)$–Konfidenzintervalles für ϑ $(= \frac{r}{N})$.

Setzt man die Werte ein, so ergibt sich für den unbekannten Anteil r/N das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.148\ ,\ 0.314]\ .$$

b) Für den Fall $N = \infty$ ist der Endlichkeitskorrektur-Faktor $\gamma = 1$. Einsetzen in die obige Formel ergibt dann für den unbekannten Anteil unbrauchbarer Teile das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.139\ ,\ 0.329]\ .$$