INSTITUT FÜR STOCHASTIK
Karlsruher Institut für Technologie
Priv.-Doz. Dr. D. Kadelka

SS 2010

Klausur (Maschineningenieure)

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
vom 14.9.2010

Musterlösungen

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{12}, y_{12})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	1.5	2.4	3.3	4.1	4.9	5.8	7.9	8.5	9.1	10.6	10.9	13
y_j	12.6	5.9	10.2	7.5	7.7	2	−0.9	0.6	−4.7	−5	−4.6	−8.7

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Lösung: Direkt aus den Daten ergibt sich gemäß Definition 1.8 und Paragraph 1.5 unter Ausnützung der Beziehung

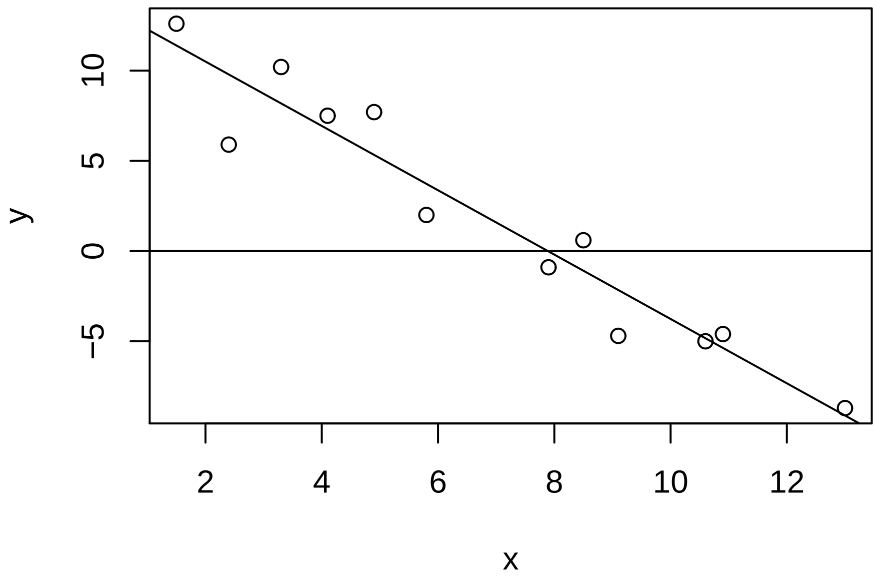
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

$$\bar{x} = 6.83 \qquad s_x = 3.701$$
$$\bar{y} = 1.88 \qquad s_y = 6.874$$
$$r_{xy} = -0.9601$$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.
Lösung: Nach Paragraph 1.5 ist $b^* = r_{xy} \cdot \dfrac{s_y}{s_x}$ und $a^* = \bar{y} - b^* \cdot \bar{x}$, also

$$\begin{aligned} b^* &= -1.783 \\ a^* &= 14.07 \end{aligned}$$

und die Regressionsgerade $y = 14.07 - 1.783 \cdot x$.



Punkte und Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$

Für die Lösung der nächsten drei Aufgabenteile benötigen wir die aufsteigend sortierten y-Werte. Es ist

$$y_{()} = (-8.7,\ -5,\ -4.7,\ -4.6,\ -0.9,\ 0.6,\ 2,\ 5.9,\ 7.5,\ 7.7,\ 10.2,\ 12.6)$$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Mit $k = [12 \cdot 0.15] = 1$ ergibt sich

$$\bar{y}_{0.15} = \frac{1}{12 - 2 \cdot 1} \cdot (y_{(2)} + \ldots + y_{(11)}) = 1.87$$

d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.12-Quantil $\tilde{y}_{0.12}$ von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Da $12 \cdot 0.12 = 1.44$ nicht ganzzahlig ist, ist mit $k = [1.44] = 1$

$$\tilde{y}_{0.12} = y_{(k+1)} = y_{(2)} = -5$$

e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{12})$.
Lösung: Da $0.25 \cdot 12 = 3$ und $0.75 \cdot 12 = 9$ beide ganzzahlig sind, ergibt sich mit $k_1 = 3$ und $k_2 = 9$

$$\begin{aligned}\tilde{y}_{0.25} &= \frac{y_{(k_1)} + y_{(k_1+1)}}{2} = \frac{y_{(3)} + y_{(4)}}{2} = -4.65\\ \tilde{y}_{0.75} &= \frac{y_{(k_2)} + y_{(k_2+1)}}{2} = \frac{y_{(9)} + y_{(10)}}{2} = 7.6\end{aligned}$$

und damit der Quartilsabstand zu $\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = 12.25$.

Aufgabe 2

In einem Rohr soll Wasser nur in einer Richtung fließen. Dazu baut man hintereinander in das Rohr zwei Ventile ein, die das Wasser jeweils nur in ein und derselben Richtung durchlassen sollen.

Ventil 1 bzw. 2 ist in Zustand $\left\{\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}\right\}$, falls es das Wasser $\left\{\begin{array}{c} \text{in keiner Richtung} \\ \text{in beide Richtungen} \\ \text{in der gewünschten Richtung} \end{array}\right\}$ durchlässt.

Sei X der zufällige Zustand des ersten, Y der des zweiten Ventils. Es ist also

$$\begin{aligned} A &:= \text{„Die Ventilkombination funktioniert richtig“} \\ &= [X = 1, Y = 2] + [X = 2, Y = 1] + [X = 2, Y = 2]. \end{aligned}$$

a) Kreuzen Sie an, welche der nachfolgenden Aussagen richtig oder falsch sind. (Falsche Antworten ergeben einen Punkteabzug in dieser Teilaufgabe!)

	richtig	falsch
$A = [X = 2] \cap [Y = 2]$	☐	☐
$A = [X \geq 1] \cap [Y \geq 1]$	☐	☐
$A = [X + Y \geq 3]$	☐	☐
$A = [X \leq 1]^c \cup [Y \leq 1]^c$	☐	☐

Es seien X und Y unabhängig mit

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.09 \text{ und } \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 2) = 0.9.$$

b) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y = 0)$ und $\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)$.

c) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 2, Y = 2)$.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Ventilkombination richtig funktioniert.

e) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X + Y \leq 2)$.

Lösung:

a) $A = [X = 2] \cap [Y = 2]$ kann nicht richtig sein. Denn $[X = 2] \cap [Y = 2]$ ist gleichbedeutend damit, dass beide Ventile das Wasser in der gewünschten Richtung durchlassen. Aber die Ventilkombination funktioniert z.B. auch richtig, wenn $X = 1$ und $Y = 2$.

$A = [X \geq 1] \cap [Y \geq 1]$ kann nicht richtig sein. Denn falls $X = 1$ und $Y = 1$ gilt, so gilt auch $X \geq 1$ und $Y \geq 1$. Die Ventilkombination funktioniert dann aber dennoch nicht richtig.

Für die dritte Teilaufgabe überlegt man sich, wann genau $X + Y \geq 3$ möglich ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn $X \geq 1$ und $Y \geq 1$ gilt, aber wenn nicht gleichzeitig $X = 1$ und $Y = 1$ gilt. Die Aussage ist also richtig.

$[X \leq 1]^c \cup [Y \leq 1]^c$ ist gleichbedeutend mit $[X = 2] \cup [Y = 2]$. Dies ist z.B. erfüllt, wenn Ventil 1 das Wasser in der richtigen Richtung durchlässt ($X = 2$), Ventil 2 das Wasser in keiner Richtung durchlässt ($Y = 0$). Die Aussage ist also falsch.

b) Da Y nur die Werte 0, 1 und 2 annimmt, gilt

$$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 - \mathbb{P}(Y \neq 0) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(Y = 2) = 0.01$$

Da ferner X und Y stochastisch unabhängig sind, gilt

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.01.$$

c) Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = 0.9 \cdot 0.9 = 0.81.$$

d) Wegen der Unabhängigkeit von X und Y gilt diesmal

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \\ \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = \\ 0.09 \cdot 0.9 + 0.9 \cdot 0.09 + 0.9 : 0.9 = 0.972.\end{aligned}$$

e) Wegen $A^c = [X+Y \geq 3]^c = [X+Y \leq 2]$ gilt $\mathbb{P}(X+Y \leq 2) = \mathbb{P}(A^c) = 1-\mathbb{P}(A) = 0.028$.

Aufgabe 3

Ein Unternehmen beschäftigt zwei Gruppen von Verkäufern. Die Umsätze $X_1, \ldots, X_{10}$ (alle in €) der 10 Verkäufer in Gruppe 1 seien normalverteilt mit Mittelwert 800 und Standardabweichung 240, während die Umsätze $Y_1, \ldots, Y_{40}$ der 40 Verkäufer in Gruppe 2 normalverteilt mit Mittelwert 1000 und Standardabweichung 300 sind. Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}, Y_1, \ldots, Y_{40}$ seien stochastisch unabhängig. $Z := X_1 + \ldots + X_{10} + Y_1 + \ldots + Y_{40}$ sei der tägliche Gesamtumsatz aller Verkäufer.

a) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von Z.

b) Welche Verteilung besitzt der Gesamtumsatz Z und welche Verteilung besitzt $\bar{Z} = \frac{Z}{50}$, der tägliche mittlere Umsatz aller Verkäufer?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der tägliche Gesamtumsatz Z größer als 50000 €?

d) Bestimmen Sie denjenigen Gesamtumsatz t, so dass $\mathbb{P}(Z > t) = 0.025$ gilt.

Lösung:

a) Nach Voraussetzung gilt $X_1, \ldots, X_{10} \sim \mathcal{N}(800, 240^2)$ und $Y_1, \ldots, Y_{40} \sim \mathcal{N}(1000, 300)$. Dann gilt für den Gesamtumsatz Z

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z = \mathbb{E}(X_1 + \ldots + X_{10} + Y_1 + \ldots + Y_{40}) &= \mathbb{E}X_1 + \ldots + \mathbb{E}X_{10} + \mathbb{E}Y_1 + \ldots + \mathbb{E}Y_{40} \\ &= 10 \cdot 800 + 40 \cdot 1000 = 48000\end{aligned}$$

und wegen der Unabhängigkeit der Einzelumsätze nach Satz 12.23 f)

$$\begin{aligned}V(Z) = V(X_1 + \ldots + X_{10} + Y_1 + \ldots + Y_{40}) &= V(X_1) + \ldots + V(X_{10}) + V(Y_1) + \ldots + V(Y_{40}) \\ &= 10 \cdot 240^2 + 40 \cdot 300^2 = 4176000.\end{aligned}$$

b) Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{10}, Y_1, \ldots, Y_{40}$ stochastisch unabhängig und normalverteilt sind, ist die Summe $Z = X_1 + \ldots + X_{10} + Y_1 + \ldots + Y_{40}$ nach der Tabelle auf S. 114 wieder normalverteilt, also $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit den Parametern $\mu = \mathbb{E}Z$ und $\sigma^2 = V(Z)$. Wegen a) gilt also

$$Z \sim \mathcal{N}(48000, 4176000).$$

Nach Satz 9.7 gilt dann

$$\bar{Z} = \frac{1}{50} \cdot Z \sim \mathcal{N}\left(\frac{48000}{50}, \frac{4176000}{50^2}\right) = \mathcal{N}(960, 1670.4)$$

c) Zu berechnen ist $\mathbb{P}(Z > 50000)$.

Wegen Satz 9.6 und wegen $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z > 50000) &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 50000) = 1 - \Phi\left(\frac{50000 - 48000}{\sqrt{4176000}}\right) \\ &= 1 - \Phi(0.9787) =\approx 1 - \Phi(0.98) = 1 - 0.8365 = 0.1635. \end{aligned}$$

nach Anhang A.1 im Skriptum.

d) Gesucht ist $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(Z > t) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq t) = 0.025$, also mit

$$0.975 = \mathbb{P}(Z \leq t) = \Phi\left(\frac{t - 48000}{\sqrt{4176000}}\right)$$

Wegen 12.20 d) oder nach Tabelle A.1 gilt $\Phi(1.96) = 0.975$, d.h. 1.96 ist das 0.975-Quantil von $\mathcal{N}(0, 1)$. Damit ergibt sich

$$1.96 = \frac{t - 48000}{\sqrt{4176000}}$$

also

$$t = 48000 + 1.96 \cdot \sqrt{4176000} = 52005.$$

Aufgabe 4

Eine Parallelschaltung bestehe aus vier elektrischen Elementen. Die Lebensdauern X_1, X_2, X_3, X_4 der vier Elemente seien stochastisch unabhängig und jeweils $\mathcal{U}(0, 10)$ verteilt, d.h. gleichverteilt auf dem Intervall $(0, 10)$. Die Gesamtlebensdauer der Parallelschaltung Y ist definiert durch

$$Y := \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}.$$

a) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y > -10)$ und $\mathbb{P}(Y > 10)$.

Lösung: Wegen $0 < X_1, \ldots, X_4 < 10$ gilt auch $0 < Y < 10$, insbesondere $Y > -10$. Daher gilt

$$\mathbb{P}(Y > -10) = 1 \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Y > 10) = 0.$$

b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(t)$ und die Dichte $f_Y(t)$ von Y.
<u>Hinweis:</u> Sie dürfen $0 < t < 10$ voraussetzen.

Lösung: Wegen der stochastischen Unabhängigkeit von X_1, X_2, X_3 und X_4 und wegen $X_1, X_2, X_3, X_4 \sim \mathcal{U}(0, 10)$ gilt für $0 \le t \le 10$:

$$F_Y(t) = F_{X_1}(t) \cdot F_{X_2}(t) \cdot F_{X_3}(t) \cdot F_{X_4}(t) = \frac{t}{10} \cdot \frac{t}{10} \cdot \frac{t}{10} \cdot \frac{t}{10} = \frac{t^4}{10000}, \ 0 \le t \le 10.$$

Wegen Satz 8.12 hat Y die Dichte

$$f_Y(t) = F_Y'(t) = 4 \cdot \frac{t^3}{10000} = \frac{t^3}{2500}, \ 0 < t < 10.$$

c) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$.

Lösung: Nach Definition 12.2 gilt

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^{10} y \cdot \frac{y^3}{2500}\, dy = \frac{1}{5} \cdot \frac{y^5}{2500}\bigg|_0^{10} = \frac{100000}{12500} = 8.$$

d) Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y \le 5 \mid X_1 \le 3)$ und $\mathbb{P}(Y > 5 \mid X_1 \le 3)$.

Lösung: $Y \le 5$ gilt genau dann, wenn $X_1 \le 5, \ldots, X_4 \le 5$. Daher gilt nach Definition 10.5

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \le 5 \mid X_1 \le 3) &= \frac{\mathbb{P}(Y \le 5, X_1 \le 3)}{\mathbb{P}(X_1 \le 3)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 \le 5, X_2 \le 5, X_3 \le 5, X_4 \le 5, X_1 \le 3)}{\mathbb{P}(X_1 \le 3)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_1 \le 3, X_2 \le 5, X_3 \le 5, X_4 \le 5)}{\mathbb{P}(X_1 \le 3)} \overset{X_1,\ldots,X_4 \text{ unabhängig}}{=}\end{aligned}$$

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 \le 3) \cdot \mathbb{P}(X_2 \le 5) \cdot \mathbb{P}(X_3 \le 5) \cdot \mathbb{P}(X_4 \le 5)}{\mathbb{P}(X_1 \le 3)} = \mathbb{P}(X_2 \le 5) \cdot \mathbb{P}(X_3 \le 5) \cdot \mathbb{P}(X_4 \le 5) = \frac{1}{8}.$$

Wegen Satz 10.11 a) gilt

$$\mathbb{P}(Y > 5 \mid X_1 \le 3) = 1 - \mathbb{P}(Y \le 5 \mid X_1 \le 3) = \frac{7}{8}.$$

e) Sind X_1 und Y unabhängig? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Lösung: X_1 und Y können nicht unabhängig sein. Denn $\mathbb{P}(Y \le 5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ und $\mathbb{P}(Y \le 5 \mid X_1 \le 3) = \frac{1}{8}$. Beide Wahrscheinlichkeiten müssten gleich sein, wenn X_1 und Y unabhängig wären.

Aufgabe 5

Die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen X, Y und Z besitzen alle die Exponentialverteilung $Exp(0.5)$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $U := X + Y + Z$ (einschließlich der Parameter).

c) Bestimmen Sie das 0.05-Quantil $q_{0.05}$ der Zufallsvariablen X (Genauigkeit: 4 Nachkommastellen)

d) Berechnen Sie die Kovarianz $C(U,X)$ und den Korrelationskoeffizienten $\rho(U,X)$ von U und X.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-1 \le X \le 2,\ 1 \le Y \le 3)$.

Lösung:

a) Allgemein besitzt $Exp(\alpha)$ den Erwartungswert $\frac{1}{\alpha}$ und die Varianz $\frac{1}{\alpha^2}$. Damit gilt

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{0.5} = 2 \quad \text{und} \quad V(X) = \frac{1}{0.5^2} = 4.$$

b) Wegen $Exp(0.5) = \Gamma(1, 0.5)$ und der Faltungsformel in 11.16 gilt

$$U = X + Y + Z \sim \Gamma(1+1+1, 0.5) = \Gamma(3, 0.5).$$

c) Wegen Beispiel 12.21 ist $q_{0.05} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \ln(1-0.05)$ das 0.05-Quantil von $Exp(\alpha)$, hier also mit $\alpha = 0.5$

$$q_{0.05} = -\frac{1}{0.5} \cdot \ln(0.95) = 0.1026.$$

d) Wegen Satz 12.23 und der Unabhängigkeit von X und $Y+Z$, also $C(Y+Z,X) = 0$, gilt

$$C(U,X) = C(X+(Y+Z),X) = C(X,X) + C(Y+Z,X) = V(X) = 4,$$

ferner wegen $U \sim \Gamma(3, 0.5)$

$$V(U) = \frac{3}{0.5^2} = 12$$

und damit

$$\rho(U,X) = \frac{C(U,X)}{\sqrt{V(U) \cdot V(X)}} = \frac{4}{\sqrt{12 \cdot 4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.5774.$$

e) Wegen der Unabhängigkeit von $X \sim Exp(0.5)$ und $Y \sim Exp(0.5)$ und da X und Y stetig sind gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(-1 \le X \le 2, 1 \le Y \le 3) &= \mathbb{P}(-1 \le X \le 2) \cdot \mathbb{P}(1 \le Y \le 3) \\
&= (F_X(2) - F_X(-1)) \cdot (F_Y(3) - F_Y(1)) \\
&= ((1-e^{-0.5 \cdot 2}) - 0) \cdot ((1-e^{-0.5 \cdot 3}) - (1 - e^{-0.5 \cdot 1})) \\
&\ 0.6321 \cdot (0.7769 - 0.3935) = 0.2424.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Ein Merkmal besitze eine logarithmische Normalverteilung $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$ mit der Dichte

$$f_\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & , x \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi}x} \cdot e^{-\frac{1}{8}(\ln(x)-\vartheta)^2} & , x > 0, \end{cases}$$

wobei der Parameter $\vartheta \in \mathbb{R}$ unbekannt ist.

a) Zeigen Sie, dass

$$\hat{\vartheta}(x) = \hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

ein Maximum-Likelihood-Schätzer für ϑ zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist, wobei $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$.

b) Berechnen Sie für die $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$-verteilten unabhängigen Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ den Erwartungswert $\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n))$ und die Varianz $V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n))$.

Hinweis: Für eine beliebige Zufallsvariable Y mit der Verteilung $\mathcal{LN}(\mu, \sigma^2)$ besitzt $\ln(Y)$ die Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Bem.: Statt $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$-verteilten Stichprobenvariablen stand auf dem Aufgabenblatt $\mathcal{LN}(\vartheta, 1)$-verteilten Stichprobenvariablen. Natürlich werden auch die zu dieser Verteilung passenden Lösungen als richtig gewertet!

c) Ist $\hat{\vartheta}(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ? Ist $\hat{\vartheta}(x)$ asymptotisch erwartungstreu für ϑ? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

d) Bestimmen Sie den Momentenschätzer für ϑ zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Lösung:

a) Mit

$$\ln(f_\vartheta(x)) = -\ln(\sqrt{8\pi}x) - \frac{1}{8}(\ln(x) - \vartheta)^2$$

ergibt sich die Loglikelihood-Funktion zu

$$\begin{aligned} M_x(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(f_\vartheta(x_i)) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln(\sqrt{8\pi}x_i) - \frac{1}{8}(\ln(x_i) - \vartheta)^2 \right) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \ln(\sqrt{8\pi}x_i) - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i) - \vartheta)^2 \end{aligned}$$

mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} M'_x(\vartheta) &= -\frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n} -2 \cdot (\ln(x_i) - \vartheta) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} (\ln(x_i - \vartheta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - n \cdot \vartheta \\ M''_x(\vartheta) &= -\frac{n}{4} < 0. \end{aligned}$$

Da die zweite Ableitung überall kleiner als 0 ist, ergibt sich die Maximumstelle $\hat{\vartheta}(x)$ von $\vartheta \to M_x(\vartheta)$ als Lösung von $M'_x(\vartheta) = 0$, also $\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = n \cdot \vartheta$ und damit

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

b) Nach dem Hinweis gilt $\ln(X_i) \sim \mathcal{N}(\vartheta, 4)$, also $\mathbb{E}_\vartheta \ln(X_i) = \vartheta$, $V_\vartheta(\ln(X_i)) = 4$ und damit

$$\mathbb{E}_\vartheta \hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n) = \mathbb{E}_\vartheta \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i) \right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \vartheta = \frac{n}{n} \cdot \vartheta = \vartheta$$

und wegen der Unabhängigkeit der Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ nach Satz 12.23

$$V_\vartheta(\hat{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)) = V_\vartheta\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln(X_i)\right) = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} V_\vartheta(X_i) = \frac{n}{n^2} \cdot 4 = \frac{4}{n}$$

c) Wegen b) und nach Definition der Erwartungstreue (Skriptum 17.11) ist $\hat{\vartheta}(x)$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ und damit auch automatisch asymptotisch erwartungstreu.

d) Für den Momentenschätzer ist gemäß Skriptum 17.1.3 die Gleichung

$$m_1(\vartheta) = \mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \hat{m}_1(x) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

nach ϑ aufzulösen. Da X_1 die Verteilung $\mathcal{LN}(\vartheta, 4)$ besitzt, gilt nach der Tabelle auf S. 124 im Skriptum $\mathbb{E}_\vartheta(X_1) = e^{\vartheta+2}$ und damit

$$\begin{aligned} e^{\vartheta+2} &= \bar{x} \\ \vartheta + 2 &= \ln(\bar{x}) \\ \vartheta &= \ln(\bar{x}) - 2 \end{aligned}$$

Der gesuchte Momentenschätzer ist also $\hat{\vartheta}_m(x) := \ln(\bar{x}) - 2$.

Aufgabe 7

Zwei Firmen erhalten Lieferungen gleichartiger Messinstrumente, von denen viele wegen Messfehlern noch nachjustiert werden müssen. Angenommen sei, dass sich die Messinstrumente nicht gegenseitig beeinflussen.

a) Von den $n = 19$ an die erste Firma gelieferten Messinstrumenten mussten 11 nachjustiert werden. Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für die Wahrscheinlichkeit p an, dass ein Messinstrument nachjustiert werden muss.

b) Die zweite Firma erhält eine Lieferung von $N = 1000$ Messinstrumenten eines anderen Typs. Von den gelieferten Instrumenten werden 200 überprüft; dabei stellt sich heraus, dass 116 der überprüften Instrumente nachjustiert werden müssen. Bestimmen Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 0.9 für den Anteil der Instrumenten in der gesamten Lieferung, die nachjustiert werden müssen.

Lösung:

a) Nach Voraussetzung kann wie in Beispiel 18.5 ein ideales Zufallsexperiment mit den zwei möglichen Ergebnissen „Es muss nachjustiert werden“ (Treffer) und „Es muss nicht nachjustiert werden“ (Niete) und der Trefferwahrscheinlichkeit $\vartheta := p$ angesehen werden. Nach diesem Beispiel und wegen 18.6 ist das gesuchte Konfidenzintervall $[l(x), L(x)]$, wobei die Konfidenzgrenzen $l(x)$ und $L(x)$ für $x = 11$ und $n - x = 8$ und $1 - \alpha = 0.9$ Tabelle A.4 entnommen werden. Dies ergibt das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.368\ ,\ 0.770]\ .$$

b) Hier ist Beispiel 18.12 (Anteils-Schätzung bei endlicher Population) anwendbar. In der Lieferung sind $N = 1000$ Geräte, von denen r (r unbekannt) nachjustiert werden müssen. Es ist dann $T_n = 116/200 = 0.58$ der relative Anteil der Instrumente in der zufälligen Stichprobe vom Umfang $n = 200$, die nachjustiert werden müssen. Mit $\vartheta := r/N$ (= unbekannter Anteil der nachzujustierenden Instrumente), $h := u_{1-\alpha/2} = 1.6449$ und dem Endlichkeitskorrektur-Faktor $\gamma \ := \ 1 - \frac{n-1}{N-1} = 0.8007$ bilden dann

$$\frac{T_n \ + \ \dfrac{h^2}{2n}\gamma \ \pm \ \dfrac{h}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{T_n(1-T_n)\gamma + \dfrac{h^2}{4n}\gamma^2}}{1 \ + \ \dfrac{h^2}{n}\gamma}$$

den oberen bzw. unteren Endpunkt eines approximativen $(1-\alpha)$–Konfidenzintervalles für ϑ $(= \frac{r}{N})$.

Setzt man die Werte ein, so ergibt sich für den unbekannten Anteil r/N das Konfidenzintervall

$$\mathcal{C}(x) = [0.5280\ ,\ 0.6302]\ .$$