

Name:

Matrikelnummer:

Vorname:

Studiengang:

**Lösungsvorschlag zur Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für Studierende des Maschinenbaus**

Datum: 16. Juli 2014

Dauer: 180 Minuten

Aufgabe 1					Aufgabe 2				Aufgabe 3				Aufgabe 4
a	b	c	d	e	a	b	c	d	a	b	c	d	

Aufgabe 5		Aufgabe 6					Aufgabe 7					Σ
a	b	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	75

ACHTUNG:

- Alle Antworten sind zu begründen bzw. herzuleiten, soweit nicht anders angegeben! Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich. Geben Sie die Ergebnisse so exakt wie möglich an (z.B. als Bruch), runden Sie ggf. auf 2 Nachkommastellen.
- Als **Hilfsmittel** sind zugelassen: Skriptum zur Vorlesung, Vorlesungsfolien, Taschenrechner (nicht vernetzbar), Wörterbuch
- Schreiben Sie nicht mit radierfähigen Stiften. Die Farben rot und grün sind nicht zugelassen, da diese bei der Korrektur verwendet werden.

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte.

VIEL ERFOLG!

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Beispiel: $\Phi(0.12) = 0.5478$

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_9, y_9)$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	0.3	0.4	0.8	1.1	1.7	1.7	2.0	2.4	2.6
y_j	0.5	0.4	2.1	1.7	1.9	2.8	4.1	3.1	3.8

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^9 x_j = 13, \quad \sum_{j=1}^9 x_j^2 = 24.4, \quad \sum_{j=1}^9 y_j = 20.4, \quad \sum_{j=1}^9 y_j^2 = 60.02, \quad \sum_{j=1}^9 x_j \cdot y_j = 37.37.$$

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .
- c) Berechnen Sie das 0.3-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.3}$ von $(y_1, \dots, y_9)$.
- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.24-Quantil $\tilde{y}_{0.24}$ von $(y_1, \dots, y_9)$.
- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \dots, y_9)$.

Lösung:

- a) (Jedes Ergebnis 1 Punkt)

Direkt aus den Daten ergeben sich nach den Abschnitten 1.4 und 1.5 im Skript mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

und $n = 9$ die Ergebnisse

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 x_j = \frac{13}{9} = 1.4444,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{9} \sum_{j=1}^9 y_j = \frac{1}{9} \cdot 20.4 = 2.266,$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 - n\bar{x}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{8} (24.4 - 9 \cdot 1.444^2)} = 0.839,$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 - n\bar{y}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{8} (60.02 - 9 \cdot 2.266^2)} = 1.314,$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j - n\bar{x}\bar{y} \right)}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{8} (37.37 - 9 \cdot 1.444 \cdot 2.266)}{0.839 \cdot 1.314} = 0.898.$$

- b) (a^* und b^* jeweils 1 Punkt)

Es gilt

$$b^* = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} = 0.898 \cdot \frac{1.314}{0.839} = 1.41,$$

$$a^* = \bar{y} - b^* \bar{x} = 2.266 - 1.41 \cdot 1.444 = 0.23.$$

- c) ($y_{()}$ und k je 0.5, $\bar{y}_{0.3}$ 1 Punkt)

Die geordnete Stichprobe ist $y_{()} = (0.4, 0.5, 1.7, 1.9, 2.1, 2.8, 3.1, 3.8, 4.1)$ und $k = [n\alpha] = [9 \cdot 0.3] = [2.7] = 2$. Damit ist das 0.3-getrimmte Mittel

$$\bar{y}_{0.3} = \frac{1}{n - 2 \cdot 2} (y_{(3)} + \dots + y_{(7)}) = \frac{1}{5} (1.7 + 1.9 + 2.1 + 2.8 + 3.1) = 2.32.$$

- d) (k 0.5, $\tilde{y}_{0.24}$ 1 Punkt)

Es ist $k = [9 \cdot 0.24] = [2.16] = 2$ und wegen $9 \cdot 0.24 \notin \mathbb{N}$

$$\tilde{y}_{0.24} = y_{(3)} = 1.7.$$

- e) ($\tilde{y}_{0.75}$, $\tilde{y}_{0.25}$ und Differenz je 0.5 Punkte)

Der Quartilsabstand ist

$$\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = y_{([9 \cdot 0.75] + 1)} - y_{([9 \cdot 0.25] + 1)} = y_{(7)} - y_{(3)} = 3.1 - 1.7 = 1.4.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 3\}$. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.3, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 3) = 0.2.$$

- a) Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i = -1, 0, 1$ und $j = 0, 1, 3$ an. Ergänzen Sie die fünf fehlenden Einträge.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 3$
$i = -1$	0.1	0.05	
$i = 0$	0.15		
$i = 1$			0.05

- b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}(X)$ und $\mathbb{E}(Y)$, die Varianzen $V(X)$ und $V(Y)$ sowie die Kovarianz $C(X, Y)$.
- c) Geben Sie für $i = -1, 0, 1$ jeweils die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = i | Y = 1)$ an.
- d) Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Lösung:

- a) (Jeder Eintrag 0.5 Punkte)

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 3$
$i = -1$	0.1	0.05	0.15
$i = 0$	0.15	0.35	0
$i = 1$	0.05	0.1	0.05

- b) (Jeweils 1 Punkt)

Die Definition 12.2 aus dem Skript ergibt direkt

$$\mathbb{E}(X) = (-1) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 = -0.1,$$

$$\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.2 = 1.1$$

und mit den Sätzen 12.11 b) und 12.8 a) gilt

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = (-1)^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 - (-0.1)^2 = 0.49,$$

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.2 - 1.1^2 = 1.09.$$

Schließlich folgt aus

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = (-3) \cdot 0.15 + (-1) \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.05 = -0.25$$

mit Satz 12.23 a)

$$C(X, Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = -0.25 + 0.11 = -0.14.$$

c) (Jeweils 1 Punkt)

Mit Definition 10.5:

$$\mathbb{P}(X = -1 | Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = -1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{0.05}{0.5} = 0.1,$$

$$\mathbb{P}(X = 0 | Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 0, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{0.35}{0.5} = 0.7,$$

$$\mathbb{P}(X = 1 | Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$$

d) (Richtige Antwort 0.5, mit Begründung insgesamt 1.5 Punkte)

Nein. Gegenbeispiel:

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = 0 \neq 0.1 = 0.5 \cdot 0.2 = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 3).$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

In einer Urne befinden sich 15 Kugeln, davon sind 6 rot und 9 schwarz. Nun werden nacheinander Kugeln gezogen und nach jedem Zug wieder zurück in die Urne gelegt. Für $i = 1, 2, \dots$ sei das Ereignis A_i definiert durch

$$A_i := \text{„die } i\text{-te gezogene Kugel ist rot“}$$

und die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch

$$X := \sum_{i=1}^{15} \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{und} \quad Y := \sum_{i=1}^{15} \mathbf{1}_{A_i^c}.$$

- a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(A_2)$, $\mathbb{P}(A_2 | A_1)$ und $\mathbb{P}(A_2 | A_1 \cup A_2)$.
- b) Geben Sie die Verteilung von X und die Verteilung von Y an.
- c) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.
- d) Die Zufallsvariable Z gebe an, wie oft eine schwarze Kugel gezogen wird, bevor die erste rote Kugel gezogen wird. Welche Verteilung hat Z ? Bestimmen Sie außerdem die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = 7 | Z = 0)$.

Lösung:

- a) (1, 1, 2 Punkte)

6 von 15 Kugeln sind rot, das ist ein Anteil von 0.4, also $\mathbb{P}(A_2) = 0.4$.

Da die erste Kugel zurückgelegt wurde, beeinflusst sie nicht den zweiten Zug. A_1, A_2 sind daher unabhängig, $\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0.4$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2 | A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap (A_1 \cup A_2))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{0.4}{0.4 + 0.4 - \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)} = \frac{0.4}{0.8 - 0.16} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

- b) (Eins richtig 2 Punkte, weiteres 1 Punkt)

Da X die Anzahl der „Erfolge“ in 15 unabhängigen Versuchen mit jeweils gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4 ist, gilt $X \sim \text{Bin}(15, 0.4)$.

Da Y auch eine Anzahl von „Erfolgen“ in 15 unabhängigen Versuchen mit jeweils gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit ist, nämlich 0.6, gilt $Y \sim \text{Bin}(15, 0.6)$.

- c) (Verteilung 1 Punkt, Begründung 1 Punkt)

Da X die roten Kugeln zählt und Y die anderen, kann $X + Y$ nur den Wert 15 annehmen und es gilt $\mathbb{P}(X + Y = 15) = 1$.

- d) (Verteilung 1 Punkt, Wahrscheinlichkeit 2 Punkte)

Z gibt die Anzahl der „Misserfolge“ (schwarze Kugeln) vor dem ersten „Erfolg“ (rote Kugel) an, also $Z \sim \text{G}(0.4)$.

$Z = 0$ bedeutet, dass die erste Kugel rot ist. Auf die weiteren 14 Kugeln hat diese Bedingung keinen Einfluss. Gesucht wird also die Wahrscheinlichkeit, dass von den (unabhängigen) Kugeln der Züge 2 bis 15 genau 6 rot sind. Dies ist gleich $\mathbb{P}(\tilde{X} = 6)$, wobei $\tilde{X} \sim \text{Bin}(14, 0.4)$.

$$\mathbb{P}(X = 7 \mid Z = 0) = \mathbb{P}(\tilde{X} = 6) = \binom{14}{6} \cdot 0.4^6 \cdot (1 - 0.4)^{14-6} = 0.21$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Wahr oder **Falsch**? Bitte kreisen Sie ohne Begründung die richtige Antwort ein.

(Richtige Antwort: 1 Punkt. Unrichtige Antwort: −1 Punkt. Keine Antwort: Kein Punkt.

Bei negativer Gesamtpunktzahl in Aufgabe 4 werden 0 Punkte gutgeschrieben.)

W	F	
		1) Wenn X gleichverteilt auf der Menge $\{0, 1\}$ ist, so sind X und X^2 unabhängig.
		2) Wenn X, Y, Z unabhängig sind, so sind auch XY und Z^2 unabhängig.
		3) Wenn $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ist, dann gilt $2X \sim \mathcal{N}(0, 4)$.
		4) Sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2]$. Dann ist $Y := \max\{1, X\}$ stetig verteilt.
		5) Die Zufallsvariable Y aus Behauptung 4) ist diskret verteilt.
		6) Für jede Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}(X^2) = (\mathbb{E}(X))^2$.
		7) Es gibt eine Zufallsvariable X , deren Verteilungsfunktion $F_X(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ ist.
		8) Es gibt eine Zufallsvariable X , deren Dichtefunktion $f_X(t) = \mathbf{1}_{[0,1]}(t)$ ist.
		9) Es gibt genau 10 Möglichkeiten, aus 5 unterschiedlichen Spiel-Karten ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge 3 Karten auszuwählen.

Lösung:

- 1) **F** $\mathbb{P}(X = 0, X^2 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(X^2 = 0)$
- 2) **W** Blockungslemma
- 3) **W** Satz 9.7 a)
- 4) **F** $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{2} \neq 0$ steht in Widerspruch zu einer stetigen Verteilung.
- 5) **F** Der Wertebereich von Y ist $[1, 2]$ und damit nicht abzählbar.
- 6) **F** Jede Zufallsvariable, die nicht konstant ist, dient als Gegenbeispiel.
- 7) **F** $F_X(t)$ ist nicht monoton steigend.
- 8) **W** Die Verteilung von X ist die Gleichverteilung auf $[0, 1]$.
- 9) **W** Anzahl der Möglichkeiten $= \binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Es sei $\lambda > 0$. Des Weiteren seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen und jeweils poissonverteilt mit Parameter λ . (Das heißt, für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Außerdem gilt $\mathbb{E}(X) = V(X) = \lambda$.)

- a) Berechnen Sie die Kovarianz $C(X, XY^2)$.
- b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(XY^2 = 1 \mid X = 1)$.

Lösung:

- a) (Blockungslemma 1 Punkt, Rechnung 4 Punkte)

Aufgrund des Blockungslemmas 11.9 sind X^2 und Y^2 unabhängig sowie X und Y^2 unabhängig. Für beide Fälle wird Satz 12.8 c) verwendet und mit Satz 12.23 a) gilt nun

$$\begin{aligned} C(X, XY^2) &= \mathbb{E}(X^2 Y^2) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(XY^2) = \mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \mathbb{E}(X^2). \end{aligned}$$

Wegen Satz 12.11 b) gilt $\mathbb{E}(X^2) = V(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \lambda + \lambda^2$ und daher

$$\begin{aligned} C(X, XY^2) &= (\lambda + \lambda^2)^2 - \lambda^2 (\lambda + \lambda^2) = \lambda^2 + 2\lambda^3 + \lambda^4 - \lambda^3 - \lambda^4 \\ &= \lambda^2 + \lambda^3. \end{aligned}$$

- b) (3 Punkte)

Wenn X den Wert 1 annimmt, kann $XY^2 = 1$ nur zustande kommen, wenn $Y = 1$ ist, da Y nur natürliche Zahlen als Werte annehmen kann. Also gilt, zusammen mit der Unabhängigkeit von X und Y ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(XY^2 = 1 \mid X = 1) &= \frac{\mathbb{P}(XY^2 = 1, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \frac{\mathbb{P}(Y = 1, X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y = 1) \cdot \mathbb{P}(X = 1)}{\mathbb{P}(X = 1)} = \mathbb{P}(Y = 1) \\ &= e^{-\lambda} \cdot \lambda. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Melker Martin beginnt um 6.00 Uhr, nacheinander 12 Milchkühe zu melken, und benötigt dabei für die i -te Kuh eine Zeit von X_i Minuten. Wir nehmen an, dass $X_1, \dots, X_{12}$ unabhängig sind und jeweils die Verteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ besitzen, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Die Zeit $X := X_1 + \dots + X_{12}$, die Martin zum Melken aller Kühe benötigt, habe Erwartungswert 60 und Standardabweichung 6.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist Martin vor 7.00 Uhr mit dem Melken fertig?
- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird Martin um exakt 7.00 Uhr mit dem Melken fertig?
- c) Berechnen Sie μ .
- d) Berechnen Sie σ .
- e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Modell für den Melkvorgang ein absurdes Ergebnis liefert, das heißt wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_j \leq 0$ gilt für mindestens ein $j \in \{1, \dots, 12\}$?

Lösung:

- a) (2 Punkte)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\mathbb{P}(X \leq 60)$. Da $X_1, \dots, X_{12}$ unabhängig sind, ist ihre Summe wieder normalverteilt und es gilt nach Aufgabenstellung $X \sim \mathcal{N}(60, 36)$. Standardisieren wie in Satz 9.7 b) ergibt:

$$\mathbb{P}(X \leq 60) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 60}{6} \leq \frac{60 - 60}{6}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 60}{6} \leq 0\right) = \Phi(0) = 0.5.$$

- b) (1 Punkt)

Da X stetig ist, gilt $\mathbb{P}(X = 60) = 0$.

- c) (2 Punkte)

Laut der Tabelle nach 11.16 gilt $X = X_1 + \dots + X_{12} \sim \mathcal{N}(12 \cdot \mu, 12 \cdot \sigma^2)$. Andererseits gilt $X \sim \mathcal{N}(60, 36)$. Daraus folgt erstens

$$\mu = \frac{60}{12} = 5.$$

- d) (2 Punkte)

Zweitens folgt daraus $\sigma^2 = \frac{36}{12} = 3$, also

$$\sigma = \sqrt{3} = 1.732.$$

e) (3 Punkte)

Es ist genau dann mindestens ein $X_j \leq 0$, wenn $\min\{X_1, \dots, X_{12}\} \leq 0$. Nach Satz 11.18

b) und Standardisierung der X_j gilt mit Gleichung (9.5) aus Definition 9.5

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min\{X_1, \dots, X_{12}\} \leq 0) &= 1 - \prod_{j=1}^{12} (1 - \mathbb{P}(X_j \leq 0)) \\&= 1 - \prod_{j=1}^{12} \left(1 - \mathbb{P}\left(\frac{X_j - 5}{\sqrt{3}} \leq \frac{0 - 5}{\sqrt{3}}\right)\right) \\&= 1 - \prod_{j=1}^{12} \left(1 - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{3}}\right)\right) = 1 - (1 - \Phi(-2.89))^{12} \\&= 1 - \Phi(2.89)^{12} \stackrel{\text{Tabelle}}{=} 1 - 0.9981^{12} \\&= 0.023.\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta > 0$ für die Verteilung mit der Dichte

$$f_{\vartheta}(t) = \begin{cases} c(\vartheta) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\vartheta}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

bestimmt werden, wobei $c(\vartheta)$ eine (von ϑ abhängige) geeignete Konstante ist.

- Bestimmen Sie die Konstante $c(\vartheta)$ in Abhängigkeit von $\vartheta > 0$ so, dass f_{ϑ} tatsächlich eine Dichte ist.
- Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ an und berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$. Sie dürfen dabei voraussetzen, dass $x_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ gilt.
- Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ gegeben ist durch

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

- Ist $\hat{\vartheta}$ erwartungstreu für ϑ ?
- Ist $\hat{\vartheta}$ konsistent für ϑ ?

Lösung:

- (1.5 Punkte für das Rechnen, 0.5 für die zweite Bedingung)
Damit f_{ϑ} eine Dichte ist, muss gelten:

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\vartheta}(t) dt = c(\vartheta) \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\vartheta}\right) dt = c(\vartheta) \left[-\vartheta \exp\left(-\frac{t}{\vartheta}\right) \right]_0^{\infty} = c(\vartheta) \cdot \vartheta$$

Also muss

$$c(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta}$$

gelten, dann ist auch $f_{\vartheta} \geq 0$ und f_{ϑ} tatsächlich eine Dichte.

- (Jeweils 1 Punkt)

$$L_x(\vartheta) = \prod_{j=1}^n f_{\vartheta}(x_j) = \vartheta^{-n} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta}\right),$$

$$M_x(\vartheta) = \log(L_x(\vartheta)) = \log(\vartheta^{-n}) + \log\left(\exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta}\right)\right) = (-n) \cdot \log(\vartheta) - \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta}$$

- (4 Punkte)

Zu finden ist die Maximumstelle von $M_x(\vartheta)$. Dort muss die Ableitung 0 sein:

$$M'_x(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta} \quad \Leftrightarrow \quad \vartheta = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n}.$$

Da für das eben gefundene $\vartheta_0 := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$

$$M_x''(\vartheta_0) = \frac{n}{\vartheta_0^2} - \frac{2 \cdot \sum_{j=1}^n x_j}{\vartheta_0^3} = \frac{n^3}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2} - \frac{2n^3}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2} = -\frac{n^3}{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2} < 0$$

gilt, ist ϑ_0 eine Maximumstelle von M_x (siehe dritte Bedingung aus (iii) zwischen 17.6 und 17.7) und $\hat{\vartheta} = \vartheta_0$ der Maximum-Likelihood-Schätzer.

d) (2 Punkte)

Da f_ϑ die Dichte der Exponentialverteilung mit Parameter ϑ^{-1} ist, gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\vartheta\left(\hat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)\right) &= \mathbb{E}_\vartheta\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j\right) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\vartheta(X_j) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}_\vartheta(X_1) \\ &= \mathbb{E}_\vartheta(X_1) = \frac{1}{\vartheta^{-1}} = \vartheta\end{aligned}$$

und $\hat{\vartheta}$ ist erwartungstreu für ϑ .

e) (2 Punkte)

Ja. Nach Satz 17.19 a) ist $\hat{\vartheta}$ ein konsistenter Schätzer für den Erwartungswert. Wie in d) gesehen ist dieser ϑ .