

Name:

Matrikelnummer:

Vorname:

Studiengang:

Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für Studierende des Maschinenbaus

Datum: 16. Juli 2015

Dauer: 180 Minuten

Aufgabe 1					Aufgabe 2				Aufgabe 3					Aufgabe 4
a	b	c	d	e	a	b	c	d	a	b	c	d	e	

Aufgabe 5				Aufgabe 6				Aufgabe 7				Σ
a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d	75

ACHTUNG:

- Alle Antworten sind zu begründen bzw. herzuleiten, soweit nicht anders angegeben! Vereinfachen Sie die Ergebnisse soweit wie möglich. Geben Sie die Ergebnisse so exakt wie möglich an (z.B. als Bruch), runden Sie Endergebnisse ggf. auf 2 Nachkommastellen.
- Als **Hilfsmittel** sind zugelassen: Skriptum zur Vorlesung, Vorlesungsfolien, Taschenrechner (nicht vernetzbar), Wörterbuch
- Schreiben Sie nicht mit radierfähigen Stiften. Die Farben rot und grün sind nicht zugelassen, da diese bei der Korrektur verwendet werden.

Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 30 Punkte.

VIEL ERFOLG!

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $\mathcal{N}(0, 1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Beispiel: $\Phi(0.12) = 0.5478$

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	2.3	1.7	2.0	3.1	2.6	2.6	2.8	1.9	2.9	2.1
y_j	7.6	4.2	4.4	8.4	7.2	7.8	8.2	5.8	8.8	5.6

- a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x , s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} .

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 24, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 59.58, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j = 68, \quad \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 487.68, \quad \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = 169.72.$$

- b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x .
- c) Berechnen Sie das 0.25-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.25}$ von $(y_1, \dots, y_{10})$.
- d) Bestimmen Sie das Stichproben-0.15-Quantil $\tilde{y}_{0.15}$ von $(y_1, \dots, y_{10})$.
- e) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \dots, y_{10})$.

Lösung:

- a) (5 Punkte: Je 1 Punkt)

Direkt aus den Daten ergeben sich nach den Abschnitten 1.4 und 1.5 im Skript mit Hilfe der Beziehung

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) = \sum_{j=1}^n x_j \cdot y_j - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}$$

und $n = 10$ die Ergebnisse

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} x_j = \frac{24}{10} = 2.4,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_j = \frac{1}{10} \sum_{j=1}^{10} y_j = \frac{1}{10} \cdot 68 = 6.8,$$

$$s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 - n\bar{x}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{9} (59.58 - 10 \cdot 2.4^2)} \approx 0.47,$$

$$s_y = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n y_j^2 - n\bar{y}^2 \right)} = \sqrt{\frac{1}{9} (487.68 - 10 \cdot 6.8^2)} \approx 1.68,$$

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{s_x s_y} = \frac{\frac{1}{n-1} \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j - n\bar{x}\bar{y} \right)}{s_x s_y} \approx \frac{\frac{1}{9} (169.72 - 10 \cdot 2.4 \cdot 6.8)}{0.4690416 \cdot 1.675974} \approx 0.92.$$

- b) (2 Punkte: a^* und b^* jeweils 1 Punkt)

Es gilt

$$b^* = r_{xy} \frac{s_y}{s_x} \approx 0.921566 \cdot \frac{1.675974}{0.4690416} \approx 3.29,$$

$$a^* = \bar{y} - b^* \bar{x} \approx 6.8 - 3.292929 \cdot 2.4 \approx -1.1.$$

- c) (2 Punkte: $y_{()}$ und k je 0.5 Punkte, $\bar{y}_{0.25}$ 1 Punkt)

Die geordnete Stichprobe ist

$$y_{()} = (4.2, 4.4, 5.6, 5.8, 7.2, 7.6, 7.8, 8.2, 8.4, 8.8)$$

und

$$k = [n\alpha] = [10 \cdot 0.25] = [2.5] = 2.$$

Damit ist das 0.25-getrimmte Mittel

$$\bar{y}_{0.25} = \frac{1}{n - 2 \cdot 2} (y_{(3)} + \dots + y_{(8)}) = \frac{1}{6} (5.6 + 5.8 + 7.2 + 7.6 + 7.8 + 8.2) \approx 7.03.$$

- d) (1.5 Punkte: k 0.5 Punkte, $\tilde{y}_{0.15}$ 1 Punkt)

Es ist $k = [10 \cdot 0.15] = [1.5] = 1$ und wegen $10 \cdot 0.15 \notin \mathbb{N}$

$$\tilde{y}_{0.15} = y_{(2)} = 4.4.$$

- e) (1.5 Punkte: $\tilde{y}_{0.75}$, $\tilde{y}_{0.25}$ und Differenz je 0.5 Punkte)

Der Quartilsabstand ist

$$\tilde{y}_{0.75} - \tilde{y}_{0.25} = y_{([10 \cdot 0.75] + 1)} - y_{([10 \cdot 0.25] + 1)} = y_{(8)} - y_{(3)} = 8.2 - 5.6 = 2.6.$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Folgende (unvollständige) Tabelle gibt Auskunft über die gemeinsame Verteilung der Zufallsvariablen X und Y , d.h. $\mathbb{P}(X = j, Y = k)$, sowie über deren Randverteilungen.

$j \backslash k$	-1	0	1	2	$\mathbb{P}(X = j)$
-1		$\frac{1}{6}$		0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$		
$\mathbb{P}(Y = k)$			$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	

- Vervollständigen Sie die Tabelle. (Eine Begründung ist hier nicht erforderlich!)
- Berechnen Sie $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}Y$, $V(X)$, $V(Y)$, $C(X, Y)$.
- Sind die Zufallsvariablen X und Y unabhängig?
- Berechnen Sie $\mathbb{P}(Y > 0 | X > 0)$.

Lösung:

- (3 Punkte: Jeder Eintrag 0.5 Punkte) Mittels folgender Regeln

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = j) &= \mathbb{P}(X = j, Y = -1) + \mathbb{P}(X = j, Y = 0) + \mathbb{P}(X = j, Y = 1) + \mathbb{P}(X = j, Y = 2), \\ \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(X = -1, Y = k) + \mathbb{P}(X = 1, Y = k).\end{aligned}$$

erhält man die Tabelle

$j \backslash k$	-1	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	

- (5 Punkte: Jeweils 1 Punkt) Es gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{s \in \{-1, 1\}} s \mathbb{P}(X = s) = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

und

$$\mathbb{E}Y = \sum_{s=-1}^2 s \mathbb{P}(Y = s) = -1 \cdot \frac{5}{12} + 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{12} = 0.$$

Weiter gilt, da $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = 0$,

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] = \sum_{s \in \{-1, 1\}} s^2 \mathbb{P}(X = s) = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$V(Y) = \mathbb{E}[Y^2] = \sum_{s=-1}^2 s^2 \mathbb{P}(Y = s) = (-1)^2 \cdot \frac{5}{12} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{1}{12} = 1$$

und

$$\begin{aligned} C(X, Y) &= \mathbb{E}(XY) = \sum_{s \in \{-1, 1\}} \sum_{t=-1}^2 st \mathbb{P}(X = s, Y = t) \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{1}{12} + (-1) \cdot 2 \cdot 0 \\ &\quad + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{12} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{12} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{2}{12} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- c) (2 Punkte: Antwort und Begründung je 1 Punkt) Die Zufallsvariablen X und Y sind nicht unabhängig, da $C(X, Y) \neq 0$, oder da z.B.

$$\mathbb{P}(X = 2, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{24} = \mathbb{P}(X = 2)\mathbb{P}(Y = -1).$$

- d) (2 Punkte) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y > 0 | X > 0) &= \frac{\mathbb{P}(Y > 0, X > 0)}{\mathbb{P}(X > 0)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(X = 1)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Eine Zufallsvariable X hat die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} c x^{-4}, & \text{falls } x \geq 2, \\ 0 & , \text{ falls } x < 2, \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c > 0$.

- Bestimmen Sie c .
- Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von X .
- Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von X .
- Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 6)$.
- Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 2t | X > t)$ für $t > 2$.

Lösung:

- a) (2 Punkte)

Damit f eine Dichtefunktion ist, muss $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ gelten, also erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = c \int_2^{\infty} x^{-4} dx = -\frac{c}{3} [x^{-3}]_2^{\infty} = \frac{c}{24} \stackrel{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow c = 24.$$

- b) (2 Punkte)

Für $t < 2$ gilt $F(t) = 0$ und für $t \geq 2$

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx = \int_2^t 24x^{-4} dx = -8 [x^{-3}]_2^t = 1 - 8t^{-3}.$$

- c) (4 Punkte)

Für den Erwartungswert erhalten wir

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_2^{\infty} 24x^{-3} dx = -12 [x^{-2}]_2^{\infty} = 3.$$

Für das zweite Moment von X gilt

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_2^{\infty} 24x^{-2} dx = -24 [x^{-1}]_2^{\infty} = 12.$$

und somit für die Varianz

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 12 - 9 = 3.$$

- d) (1 Punkt)

Es gilt

$$\mathbb{P}(4 \leq X \leq 6) = F(6) - F(4) = 8 \cdot 4^{-3} - 8 \cdot 6^{-3} = 2^{-3} - 3^{-3}.$$

- e) (2 Punkte)

Es ist $\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = 8t^{-3}$ für $t \geq 2$ und somit

$$\mathbb{P}(X > 2t | X > t) = \frac{\mathbb{P}(X > 2t, X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > 2t)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{8(2t)^{-3}}{8t^{-3}} = \frac{1}{8}.$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wahr oder **Falsch**? Bitte kreuzen Sie ohne Begründung die richtige Antwort an.
 (Richtige Antwort: 1 Punkt. Unrichtige Antwort: −1 Punkt. Keine Antwort: Kein Punkt.
 Bei negativer Gesamtpunktzahl in Aufgabe 4 werden 0 Punkte gutgeschrieben.)

W	F	
		1) Für jede Zufallsvariable X mit $\mathbb{E}X = 1$ gilt $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - 1$.
		2) Die Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ besitzt genau 15 verschiedene Teilmengen.
		3) Wenn ein Würfel zweimal geworfen wird, so ist mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Augenzahl des zweiten Wurfs größer als die des ersten Wurfs.
		4) Wenn $X \sim \mathcal{N}(0, 2)$ ist, dann gilt $X^2 \sim \mathcal{N}(0, 4)$.
		5) Sind X und Y zwei Zufallsvariablen, für die $C(X, Y) = 0$ ist, so gilt $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
		6) Sind X, Y unabhängige Zufallsvariablen und $Z := \max\{X, Y\}$, so gilt $F_Z(t) \leq F_X(t)$ für die Verteilungsfunktionen F_X von X und F_Z von Z .
		7) Wenn zwei Zufallsvariablen X und Y unabhängig sind, dann sind auch $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig.
		8) Ist X eine diskret verteilte Zufallsvariable, so ist auch e^X diskret verteilt.

Lösung:

1) **Wahr**, denn: Es gilt

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \underbrace{\mathbb{E}[X]^2}_{=1} = \mathbb{E}[X^2] - 1.$$

2) **Falsch**, denn: Eine 4-elementige Menge besitzt genau $2^4 = 16$ Teilmengen.

3) **Falsch**, denn: Für das Ereignis $A = \{(s, t) \in \Omega : s < t\}$ im Laplaceraum $\Omega = \{(s, t) : 1 \leq s, t \leq 6\}$ gilt $|A| = 15$. Damit erhalten wir $\mathbb{P}(A) = \frac{15}{36} \neq \frac{1}{2}$.

4) **Falsch**, denn: Es gilt

$$\mathbb{P}(X^2 \leq 0) = \mathbb{P}(|X| \leq 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 0$$

und damit kann X^2 nicht normalverteilt sein.

5) **Wahr**, denn: Es gilt

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + \underbrace{C(X, Y)}_{=0} = V(X) + V(Y).$$

6) **Wahr**, denn: Es gilt

$$F_Z(t) = \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq t) \leq \mathbb{P}(X \leq t) = F_X(t).$$

7) **Falsch**, denn: Im Spezialfall, $Y \equiv 0$, würde die Aussage bedeuten, dass X und X stochastisch unabhängig sind, was falsch ist.

8) **Wahr**, denn: Für eine diskrete Zufallsvariable X auf Ω gilt $X(\Omega)$ ist abzählbar. Dann ist aber auch $e^X(\Omega) = \{e^x : x \in X(\Omega)\}$ abzählbar.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine Maschine bestehe aus drei Bauteilen B_i , $i = 1, 2, 3$, die zu den zufälligen Zeitpunkten X_1, X_2 bzw. X_3 ausfallen. X_1, X_2 und X_3 seien stochastisch unabhängig und $\mathcal{U}(0, 1)$ -verteilt, wobei $\mathcal{U}(0, 1)$ die Gleichverteilung auf $(0, 1)$ ist. Die Maschine fällt zu dem Zeitpunkt T aus, zu dem erstmals B_1 und B_2 beide ausgefallen sind oder zu dem B_3 ausfällt, je nachdem, welcher Zeitpunkt früher eintritt.

a) Zeigen Sie, dass T die Verteilungsfunktion

$$t \rightarrow F_T(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 - (1 - t^2)(1 - t) & , 0 < t \leq 1 \\ 1 & , t > 1 \end{cases}$$

besitzt.

Hinweis: Sie können ohne Begründung verwenden, dass $T = \min[\max(X_1, X_2), X_3]$ gilt.

- b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine nach dem Zeitpunkt $\frac{1}{2}$ ausfällt?
- c) Bestimmen Sie eine Dichte von T .
- d) Bestimmen Sie den Erwartungswert von T .

Lösung:

a) (4 Punkte)

Wegen $T = \min[\max(X_1, X_2), X_3]$ gilt

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \mathbb{P}(T \leq t) = 1 - \mathbb{P}(T > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\min[\max(X_1, X_2), X_3] > t) \\ &= 1 - \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > t, X_3 > t). \end{aligned}$$

Aus der Unabhängigkeit von X_1, X_2, X_3 sowie dem Blockungslemma (Satz 11.9) folgt

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) > t) \cdot \mathbb{P}(X_3 > t) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq t)) \cdot (1 - \mathbb{P}(X_3 \leq t)) \\ &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t, X_2 \leq t)) \cdot (1 - \mathbb{P}(X_3 \leq t)). \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von X_1, X_2 gilt dann

$$\begin{aligned} F_T(t) &= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq t)) \cdot (1 - \mathbb{P}(X_3 \leq t)) \\ &= 1 - (1 - F(t) \cdot F(t)) \cdot (1 - F(t)) \\ &= 1 - (1 - F(t)^2) \cdot (1 - F(t)). \end{aligned}$$

Da $X_1, X_2, X_3 \sim \mathcal{U}(0, 1)$, ist

$$F(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ t & , 0 < t \leq 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion von X_1, X_2, X_3 (Beispiel 8.9) und es gilt

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 - (1 - t^2)(1 - t) & , 0 < t \leq 1 \\ 1 & , t \geq 1 \end{cases}$$

b) (1 Punkt)

Es gilt

$$\mathbb{P}(T \geq \frac{1}{2}) = 1 - \mathbb{P}(T < \frac{1}{2}) = 1 - F_T(\frac{1}{2}) = (1 - \frac{1}{2^2})(1 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{8}.$$

c) (3 Punkte)

F_T ist stetig und eventuell bis auf die Stellen $t = 0$ und $t = 1$ stetig differenzierbar. Wegen Satz 8.12 und unter Anwendung der Produktregel besitzt T die Dichte

$$\begin{aligned} f_T(t) &= F'_T(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \text{ oder } t \geq 1 \\ -(-2t \cdot (1-t) + (1-t^2)(-1)) & , 0 < t < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \text{ oder } t \geq 1 \\ 2t \cdot (1-t) + (1-t^2) & , 0 < t < 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \text{ oder } t \geq 1 \\ 1 + 2t - 3t^2 & , 0 < t < 1 \end{cases} \end{aligned}$$

d) (2 Punkte) Mit Definition 12.2 folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}T &= \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_T(t) \, dt \\ &= \int_0^1 t \cdot (1 + 2t - 3t^2) \, dt \\ &= \int_0^1 t + 2t^2 - 3t^3 \, dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{4}t^4 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert -2 und der Standardabweichung 2 . Weiter sei Y eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 3 und der Standardabweichung 3 . Die Zufallsvariablen X und Y seien stochastisch unabhängig.

- a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Z := \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}$ und $W := \frac{X+Y}{5}$.
- b) Berechnen Sie die Kovarianz $C(W, Z)$ der Zufallsvariablen W und Z .
- c) Bestimmen Sie $\mathbb{P}(Y > 6)$.
- d) Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}(X < t) = 0.9$ gilt.

Lösung:

- a) (4 Punkte: Je 1 Punkt)

Es gilt $X \sim \mathcal{N}(-2, 4)$ und $Y \sim \mathcal{N}(3, 9)$. Aus Satz 9.7 a) folgt

$$Z \sim \mathcal{N}\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

und damit gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z &= -\frac{1}{2} \\ V(Z) &= 1.\end{aligned}$$

Da X und Y stochastisch unabhängig sind, folgt aus der Faltungsformel (und insbesondere der Tabelle in Bemerkung 11.16)

$$W \sim \mathcal{N}\left(\frac{1}{5}, \frac{13}{25}\right)$$

und somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E}W &= \frac{1}{5} \\ V(W) &= \frac{13}{25}.\end{aligned}$$

- b) (2 Punkte)

Wegen Satz 12.23 und der Unabhängigkeit von X und Y , also $C(X, Y) = 0$, gilt

$$\begin{aligned}C(W, Z) &= C\left(\frac{1}{5} \cdot (X + Y), \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot C(X + Y, X) \\ &= \frac{1}{10} \cdot [C(X, X) + C(Y, X)] \\ &= \frac{V(X)}{10} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

c) (2 Punkte)

Wegen $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu := \mathbb{E}Y = 3$ und $\sigma^2 := V(Y) = 9$ und (9.6) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y > 6) &= 1 - \mathbb{P}(Y \leq 6) = 1 - \Phi_{\mu, \sigma^2}(6) = 1 - \Phi\left(\frac{6 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{6 - 3}{3}\right) = 1 - \Phi(1).\end{aligned}$$

Wegen $\Phi(1) = 0.8413$ (aus Tabelle A.1) folgt

$$\mathbb{P}(Y > 6) = 0.1587.$$

d) (2 Punkte)

Gesucht ist ein $t \in \mathbb{R}$ mit $\mathbb{P}(X < t) = 0.9$. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X < t) = \mathbb{P}\left(\frac{X+2}{2} < \frac{t+2}{2}\right) &= \Phi\left(\frac{t+2}{2}\right) = 0.9 \\ &\Leftrightarrow \frac{t+2}{2} = \Phi^{-1}(0.9) \approx 1.28 \\ &\Leftrightarrow t \approx 0.56.\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (12 Punkte)

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$, seien stochastisch unabhängig und identisch verteilt mit der Verteilungsfunktion F_ϑ , welche die Dichte

$$f_\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad t \mapsto f_\vartheta(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 1, \\ \frac{\vartheta}{t^{\vartheta+1}}, & t > 1, \end{cases}$$

besitze. Dabei ist $\vartheta > 0$ ein unbekannter Parameter.

- a) Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ eine Stichprobe von $X_1, \dots, X_n$ mit $x_i > 1$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}_n(x)$ für ϑ gegeben ist durch

$$\hat{\vartheta}_n(x) := \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log x_j}.$$

- b) Setzen Sie $Y_j := \log X_j$, $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass $Y_1 \sim \text{Exp}(\vartheta)$ gilt.
- c) Wie ist die Zufallsvariable $Z_n := \sum_{j=1}^n Y_j$ verteilt?
- d) Ist $\hat{\vartheta}_n$ erwartungstreu? Wenn nein, wie müsste man $\hat{\vartheta}_n$ abändern, um einen erwartungstreuen Schätzer zu erhalten?

Lösung:

- a) (4 Punkte: Likelihood-Funktion, Loglikelihood-Funktion, Maximieren nach ϑ , Bestimmen des ML-Schätzers je 1 Punkt)
Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L_x(\vartheta) = \prod_{j=1}^n f_\vartheta(x_j) = \vartheta^n \prod_{j=1}^n \frac{1}{x_j^{\vartheta+1}}$$

und die Loglikelihood-Funktion durch

$$M_x(\vartheta) = \log L_x(\vartheta) = n \log \vartheta - (\vartheta + 1) \sum_{j=1}^n \log(x_j)$$

Maximieren nach ϑ liefert

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} M_x(\vartheta) = \frac{n}{\vartheta} - \sum_{j=1}^n \log(x_j) \stackrel{!}{=} 0,$$

also

$$\hat{\vartheta}_n = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log x_j}.$$

Wegen $\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} M_x(\vartheta) = -\infty = \lim_{\vartheta \rightarrow 0+} M_x(\vartheta)$ und $\log L_x$ stetig in $\vartheta \in (0, \infty)$ ist $\hat{\vartheta}_n$ der ML-Schätzer für ϑ .

- b) (3 Punkte: Verteilung von X_i Berechnen, Verteilung von Y_i durch Verteilung von X_i Ausdrücken, Verteilung von X_i Berechnen je 1 Punkt)
 Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit Dichte f_ϑ . Dann ist die Verteilungsfunktion F_ϑ gegeben durch

$$F_\vartheta(t) := \int_{-\infty}^t f_\vartheta(\tau) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq 1, \\ \int_1^t \frac{\vartheta}{\tau^{\vartheta+1}} d\tau = 1 - t^{-\vartheta}, & \text{für } t > 1. \end{cases}$$

Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}(Y_j \leq t) = \mathbb{P}(\log(X_j) \leq t) = \mathbb{P}(X_j \leq e^t) = F_\vartheta(e^t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\vartheta t}, & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Also ist $Y_j \sim \text{Exp}(\vartheta)$ verteilt.

- c) (2 Punkte: Zusammenhang Gamma-/Exponentialverteilung, Additionsgesetz je 1 Punkt)
 Wegen $\text{Exp}(\vartheta) = \Gamma(1, \vartheta)$ und dem Additionsgesetz für unabhängige Gammaverteilungen ist $Z_n \sim \Gamma(n, \vartheta)$ verteilt.
- d) (3 Punkte)
 Es ist

$$\mathbb{E}_\vartheta(\hat{\vartheta}_n(X_1, \dots, X_n)) = \mathbb{E}_\vartheta \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^n \log(X_j)} \right) = n\mathbb{E}(Z^{-1}) = n \frac{\Gamma(n-1)}{\vartheta^{-1}\Gamma(n)} = \frac{n}{n-1}\vartheta \neq \vartheta,$$

und damit ist $\hat{\vartheta}_n$ nicht erwartungstreu. Allerdings ist $\frac{n-1}{n}\hat{\vartheta}_n$ ein erwartungstreuer Schätzer für ϑ .