Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

PD Dr. Steffen Winter

Celeste Mayer, M.Sc.

Lösungsvorschlag Klausur zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik für die Fachrichtungen Maschinenbau/ Informatik

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Aufgabe 1 (11 Punkte)

In einem Labor wurden an 10 Proben ein Merkmal X gemessen und in einer Tabelle notiert. Im Anschluss wurde der Mittelwert berechnet $\overline{x} = 2.5$. Durch einen technischen Fehler gingen **nach** der Berechnung des Mittelwerts die zwei Messwerte x_9 und x_{10} verloren, sodass Ihnen ausschließlich der Mittelwert und die folgende unvollständige Tabelle bleiben:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	2.7	0.3	2.1	4.9	1	1.7	4.5	2.8	?	?

a) Nehmen Sie an, dass x_9 und x_{10} unbekannt sind. Wie müssten die Werte gewählt werden, um die kleinstmögliche Stichprobenvarianz zu erhalten? Was ist in diesem Fall die Stichprobenvarianz? (3P)

$x_9 =$ $\qquad$ $x_{10} =$

$s_x^2 =$

b) Aus sicherer Quelle erfahren Sie nun, dass $x_9 = 2.3$ gilt. Welchen Wert hat dann x_{10}? (2P)

$x_{10} =$

Für die ersten 8 der oben erwähnten Proben wurde noch ein weiteres Merkmal Y ermittelt und es ergaben sich die folgenden Messwerte:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
y_j	2.7	2	-0.5	-2	2.2	1.1	3.5	2.8

c) Geben Sie den Median, das obere Quartil und das untere Quartil von $y = (y_1, \ldots, y_8)$ an. (3P)

Median =

oberes Quartil = $\qquad$ unteres Quartil =

d) Berechnen Sie den Mittelwert $\overline{y}$ und die Standardabweichung s_y der Stichprobe y sowie den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} von $x = (x_1, \ldots, x_8)$ und y. Sie können voraussetzen, dass $s_x^2 = 2.54$ gilt. (3P)

$\overline{y} =$ $\qquad$ $s_y =$

$r_{xy} =$

Aufgabe 2 (11 Punkte)
In einem Online-Shop entdecken Sie ein Angebot: Sie können zu einem Vorzugspreis ein Überraschungspaket (Paket "Schokolade") mit 6 Tafeln Schokolade Ihres Lieblingsherstellers erwerben. (Bei einem Überraschungspaket werden Produkte rein zufällig zusammengestellt. Es ist insbesondere möglich, ein Produkt mehrmals zu erhalten.) Sie wissen, dass insgesamt 7 verschiedene Schokoladensorten im Handel sind, von denen Sie jedoch nur 4 Sorten mögen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie bei Bestellung eines Pakets "Schokolade" ausschließlich Sorten erhalten, die Sie mögen? (1P)

Wahrscheinlichkeit = $\boxed{}$

b) Nehmen Sie an, dass Schokoladentafeln, die Sie nicht mögen, für Sie keinen Wert haben, und dass eine Tafel für gewöhnlich 1.50 Euro kostet. Wie viele Tafeln Schokolade sind im Mittel nach Ihrem Geschmack? Wieviel darf ein Paket maximal kosten, so dass es sich im Mittel für Sie lohnt, ein Paket zu bestellen? (3P)

Anzahl Tafeln = $\boxed{}$

Maximalpreis (in Euro) = $\boxed{}$

Sie entdecken nun ein weiteres Angebot (Überraschungspaket "Pralinen"), in dem eine sehr große, zufällige Anzahl Pralinen enthalten ist. Sie gehen davon aus, dass Sie im Mittel 3 der darin enthaltenen Pralinen nicht mögen. Nehmen Sie an, dass die zufällige Anzahl Y an Pralinen (in einem Überraschungspaket "Pralinen"), die Sie nicht mögen, Poisson-verteilt ist mit dem Parameter λ.

c) Welchen Wert wählen Sie dabei für den Parameter λ der Verteilung von Y? (1P)

$\lambda = \boxed{}$

Sie bestellen nun je ein Überraschungspaket "Schokolade" und "Praline".

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie alle in Ihrem Einkauf enthaltenen Produkte mögen? (1P)

Wahrscheinlichkeit = $\boxed{}$

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Ihrem Einkauf genau ein Produkt enthalten ist, das Sie nicht mögen? (1P)

Wahrscheinlichkeit = $\boxed{}$

f) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in Ihrem Einkauf mindestens zwei Produkte enthalten sind, die Sie nicht mögen? (2P)

Wahrscheinlichkeit = $\boxed{}$

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn Sie genau ein unbeliebtes Produkt im Einkauf haben, dieses eine Praline ist? (2P)

Wahrscheinlichkeit = $\boxed{}$

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Es sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 1 und Varianz 4. Weiter sei Y eine von X unabhängige Zufallsvariable mit $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

a) Wie ist die Zufallsvariable $Z := X + 2Y$ verteilt? (2P)

$$X + 2Y \sim \boxed{}$$

b) Berechnen Sie die Kovarianz von X und Z. (1P)

$$C(X, Z) = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie: (2P)

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \boxed{} \qquad \mathbb{P}(X \leq 0 | Y \leq 2) = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$ so, dass $\mathbb{P}(|X - 1| \leq t) = 0.39$ gilt. Es genügt, wenn Sie das Ergebnis auf 2 Nachkommastellen genau angeben. (2P)

$$t = \boxed{}$$

e) Geben die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Maximum von X und Y kleiner als 2 ist. (2P)

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} \leq 2) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)
Es seien X und Y zwei stetige Zufallsvariablen, deren gemeinsame Dichte $f_{X,Y}$ gegeben ist durch

$$f_{X,Y}(x,y) = c \cdot \left(\frac{1}{x^2} + y^2\right) \mathbf{1}\{x \in [1,3], y \in [1,2]\}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine geeignete Konstante ist.

a) Bestimmen Sie die Konstante c in der obigen Dichte $f_{X,Y}$. (2P)

$c =$ ☐

b) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass $X \geq 1$ gilt. (1P)

$\mathbb{P}(X \geq 1) =$ ☐

c) Geben Sie die Dichten f_X und f_Y der Zufallsvariablen X bzw. Y an. (2P)

$f_X(x) =$ ☐

$f_Y(y) =$ ☐

d) Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[X+Y]$: (3P)

$\mathbb{E}[X] =$ ☐ $\quad \mathbb{E}[Y] =$ ☐

$\mathbb{E}[X+Y] =$ ☐

e) Woran erkennt man, dass X und Y stochastisch abhängig sind? (2P)

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Es soll der unbekannte Parameter $\vartheta > 0$ einer stetigen Verteilung mit der Dichte

$$f_\vartheta(t) = \begin{cases} \frac{2}{\vartheta} \cdot \exp\left(-\frac{2t}{\vartheta}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

bestimmt werden.

a) Geben Sie die zur Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ gehörende Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$ an und berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion $M_x(\vartheta)$. Dabei dürfen Sie voraussetzen, dass $x_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. (2P)

$L_x(\vartheta) =$ ☐

$M_x(\vartheta) =$ ☐

b) Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ. Gehen Sie folgendermaßen vor:

b1) Geben Sie zunächst die Ableitung von $M_x(\vartheta)$ an. (1P)

$M_x'(\vartheta) =$ ☐

b2) Geben Sie nun den Maximum-Likelihood Schätzer für ϑ an. (1P)

$\hat{\vartheta}(x) =$ ☐

b3) Begründen Sie, dass der von Ihnen unter b2) angegebene Schätzer tatsächlich der ML-Schätzer für ϑ ist. (3P)

☐

c) Geben Sie den Momentenschätzer für ϑ an. (2P)

Momentenschätzer : ☐