



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

PD Dr. Steffen Winter

M. Sc. Sebastian Höfer

Nachname:

Vorname:

Matr.-Nr.:

**Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für die Fachrichtungen Maschinenbau und Informatik**

Datum: 31. Juli 2023

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

- **Zugelassene Hilfsmittel:** Ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt, Taschenrechner (nicht vernetzbar und nicht programmierbar), Wörterbuch.
- Bei dieser Klausur werden nur diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die **vorgesehenen Kästchen** eingetragen sind! Eine Begründung bzw. **Herleitung** der Ergebnisse ist **nicht erforderlich**, sofern nicht explizit gefordert.
- Vereinfachen Sie Ergebnisse so weit wie möglich. Geben Sie Ergebnisse so exakt wie möglich an, z.B. als Bruch. Runden Sie **Endergebnisse** auf 4 **Nachkommastellen** genau, wenn nicht anders angegeben.
- Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1 (10 P)	2 (10 P)	3 (12 P)	4 (9 P)	5 (9 P)	Σ (50 P)
Punkte						
Korrektor						

bestanden	nicht bestanden	Note

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $N(0, 1)$

[illegible]

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Kreuzen Sie die jeweils zutreffende Aussage an. Dabei ist jeweils nur **genau** ein Kreuz pro Teilaufgabe zu setzen.

1. f_1 und f_2 seien zwei Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$. Dann ist folgende Funktion ebenfalls stets eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$:	
$\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$	☐
$\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$	☐
$\frac{1}{2}(f_1 * f_2)$	☐
$\frac{1}{2}(f_1 \cdot f_2)$	☐
2. Auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$ stets :	
$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	☐
$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A B) = \mathbb{P}(A \cap B)$	☐
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$	☐
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B)$	☐
3. Die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariablen ist stets ...	
... streng monoton wachsend.	☐
... strikt positiv.	☐
... stetig.	☐
... durch 1 beschränkt.	☐
4. Es seien X und Y zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt stets ...	
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(Y \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	☐
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \neq \mathbb{P}(Y \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	☐
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(Y \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(\min(X, Y) \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	☐
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(Y \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(\max(X, Y) \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	☐
5. Ein Schätzer $\hat{\vartheta}$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$ ist stets erwartungstreu, falls für jedes $\vartheta > 0$ gilt ...	
... $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}] = 0$.	☐
... $\text{Var}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}) = \vartheta$.	☐
... $\mathbb{E}_{\vartheta}[\hat{\vartheta}^2] - \text{Var}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}) = \vartheta^2$.	☐
... $\mathbb{E}_{\vartheta}[\hat{\vartheta}^2] = \vartheta^2$.	☐

(b)

1. Geben Sie die Anzahl k aller Möglichkeiten an, Ihre 6 Lieblingsbücher nebeneinander in einem Regal aufzustellen.

$$k = \boxed{}$$

2. Geben Sie die Anzahl ℓ aller Möglichkeiten an, Ihre 6 Lieblingsbücher auf einen grünen und einen roten Karton aufzuteilen. (Ein Karton kann auch leer sein.)

$$\ell = \boxed{}$$

3. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{16}xy^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,2]^2}(x, y).$$

Geben Sie die Randdichte f_X von X an.

$$f_X(x) = \boxed{}$$

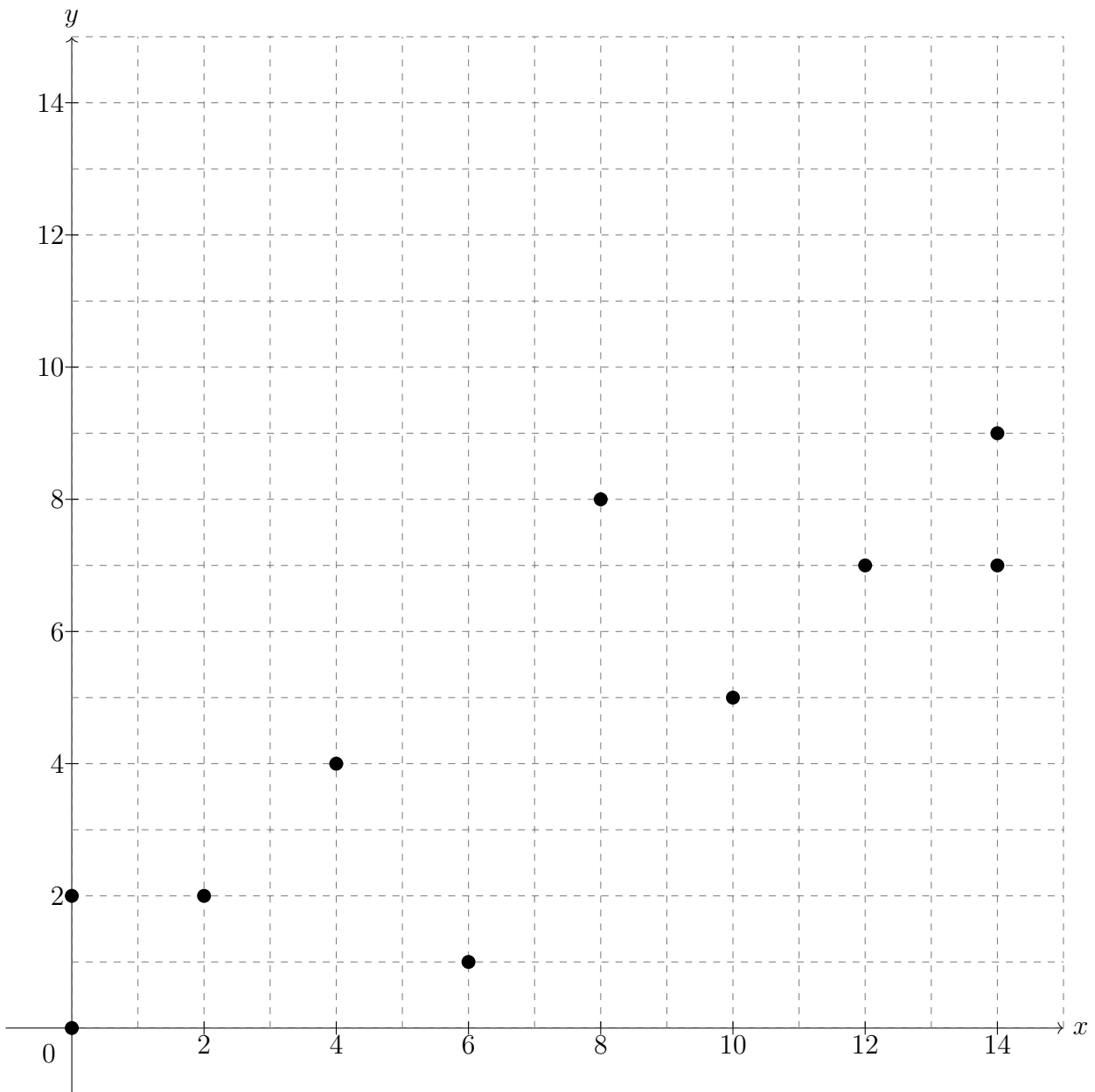
4. Für ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ sei $X := \mathbb{1}_A$. Geben Sie die Varianz von X^2 an.

$$\text{Var}(X^2) = \boxed{}$$

5. Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die stochastisch gegen eine Zufallsvariable X konvergieren, d.h., es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ für $n \rightarrow \infty$. Konvergiert dann die Folge $(\frac{1}{2}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch? Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an. Anderenfalls geben Sie “konvergiert nicht” an.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Das folgende Schaubild zeigt die Stichprobe $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$.



- (a) Geben Sie das Stichprobenmittel $\bar{y}$, das untere Stichprobenquartil $\tilde{y}_{1/4}$ und den Stichprobenmedian $\tilde{y}$ von $(y_1, \dots, y_{10})$ an:

$$\bar{y} = \boxed{} \quad \tilde{y}_{1/4} = \boxed{} \quad \tilde{y} = \boxed{}$$

- (b) **Zeichnen** Sie die Regressionsgerade $f(x) = a^* + b^*x$ des Datensatzes in das obige Koordinatensystem ein. Sie können dabei voraussetzen, dass die Regressionsgerade die Steigung $\frac{1}{2}$ besitzt. Geben Sie hier zusätzlich a^* und b^* an:

$$a^* = \boxed{}$$

$$b^* = \boxed{}$$

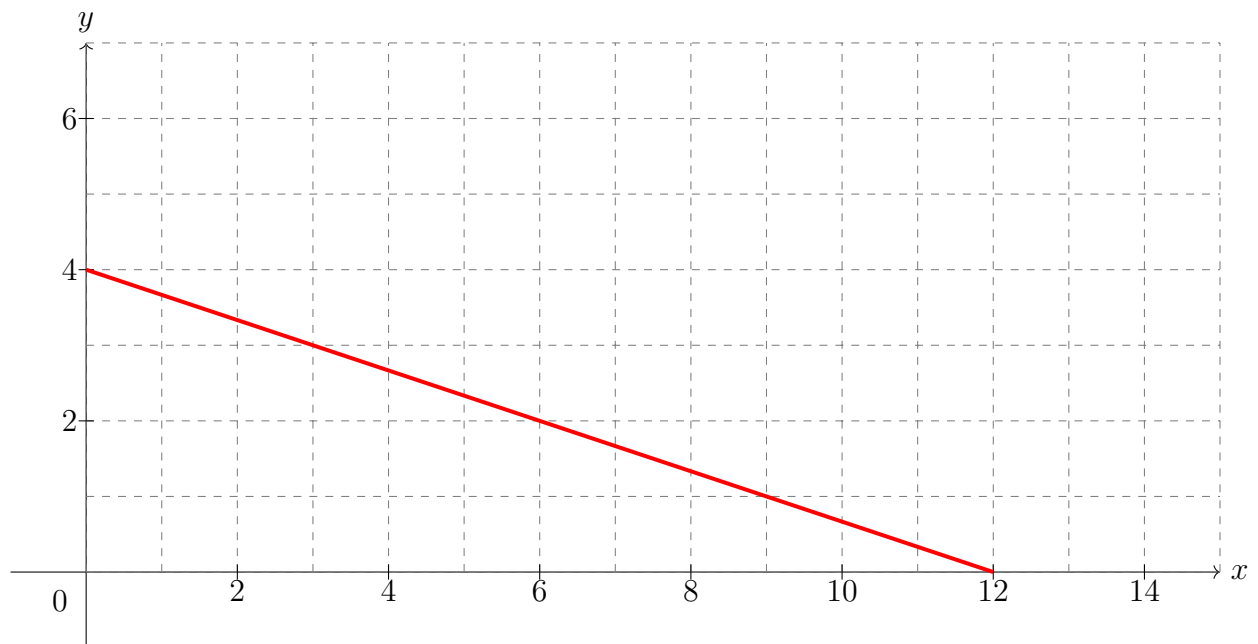
- (c) **Zeichnen** Sie einen weiteren Datenpunkt (x_{11}, y_{11}) in das obige Koordinatensystem so ein, dass sich die Regressionsgerade nicht verändert. Geben Sie den eingezeichneten Punkt zusätzlich hier an:

$$(x_{11}, y_{11}) = \boxed{}$$

- (d) Unten sehen Sie ein weiteres Schaubild mit einer Regressionsgeraden, allerdings sind die Stichprobenpunkte nicht eingezeichnet. Es ist Ihnen lediglich bekannt, dass für die Stichprobenvarianzen von x und y gilt $s_x^2 = s_y^2 = 2$.

Bestimmen Sie den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} :

$$r_{xy} = \boxed{}$$



Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 3\}$. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.3, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 3) = 0.2.$$

- (a) Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i = -1, 0, 1$ und $j = 0, 1, 3$ an. Ergänzen Sie die fünf fehlenden Einträge.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 3$
$i = -1$	0.1	0.05	
$i = 0$	0.15		
$i = 1$			0.05

- (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$, die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$ sowie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$.

$$\mathbb{E}[X] = \boxed{}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \boxed{}$$

$$\text{Var}(X) = \boxed{}$$

$$\text{Var}(Y) = \boxed{}$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \boxed{}$$

- (c) Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = 1|Y = 1)$ an.

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) = \boxed{}$$

- (d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie!

In einer Urne befinden sich 15 Kugeln, davon sind 6 rot und 9 schwarz. Nun werden nacheinander Kugeln gezogen und nach jedem Zug wieder zurück in die Urne gelegt. Für $i = 1, 2, \dots$ sei das Ereignis A_i definiert durch

$$A_i := \text{„die } i\text{-te gezogene Kugel ist rot“}$$

und die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch

$$X := \sum_{i=1}^{15} \mathbb{1}_{A_i} \text{ und } Y := \sum_{i=1}^{15} \mathbb{1}_{A_i^c}.$$

- (e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_2|A_1 \cup A_2)$.

$$\mathbb{P}(A_2|A_1 \cup A_2) =$$

- (f) Geben Sie die Verteilung von X an.

$$X \sim$$

- (g) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

- (h) Die Zufallsvariable Z gebe an, wie oft eine schwarze Kugel gezogen wird, bevor die erste rote Kugel gezogen wird. Welche Verteilung hat Z ?

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Ein Profi und ein Amateur werfen jeweils einmal auf eine Dartscheibe. Der Mittelpunkt der Dartscheibe sei der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Koordinaten der Auftreffpunkte (x_1, y_1) (Amateur) und (x_2, y_2) (Profi) werden als Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2, Y_1, Y_2 modelliert, wobei $X_1, Y_1 \sim N(0, 4)$ und $X_2, Y_2 \sim N(0, 1)$.

- (a) Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit.

$$\mathbb{P}(|X_1 - 1| \geq 1) = \boxed{}$$

- (b) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 - X_2$?

$$Z \sim \boxed{}$$

- (c) Bestimmen Sie die folgenden Erwartungswerte.

$$\mathbb{E}[Z] = \boxed{}$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \boxed{}$$

- (d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen $(X_1 - X_2)^2$.

$$F(x) = \boxed{}$$

- (e) Bestimmen Sie die folgenden Korrelationen.

$$\text{Corr}(Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_2) = \boxed{}$$

$$\text{Corr}(X_1 - X_2, Y_1 - Y_2) = \boxed{}$$

Seien $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$.

- $$\mathbb{P}_1(-1 \leq X \leq 1) =$$

- $$\text{Var}_1(X^2) =$$

(c) Der unbekannte Parameter ϑ soll basierend auf einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Dabei können Sie voraussetzen, dass $x_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

$$L_x(\vartheta) = \left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$$

$$\ell_x(\vartheta) =$$

$$\ell'_x(\vartheta) =$$

- $$\widehat{\vartheta}(x) =$$

- (e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ für Ihren in Teil (d) bestimmten Schätzer $\widehat{\vartheta}$.

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)] = \boxed{\phantom{\mathbb{E}_{\vartheta}[\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)] = \vartheta}}$$

- (f) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler von $\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$.

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[|\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) - \vartheta|^2] = \boxed{\phantom{\mathbb{E}_{\vartheta}[|\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) - \vartheta|^2] = \vartheta^2}}$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\text{Var}(X) = \vartheta^2$ gilt.