



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

PD Dr. Steffen Winter

M. Sc. Sebastian Höfer

**Lösungsvorschlag zur Klausur
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für die Fachrichtungen Maschinenbau und Informatik**

Datum: 31. Juli 2023

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $N(0, 1)$

[illegible]

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Kreuzen Sie die jeweils zutreffende Aussage an. Dabei ist jeweils nur **genau** ein Kreuz pro Teilaufgabe zu setzen.

je 1P pro Teilaufgabe

1. f_1 und f_2 seien zwei Wahrscheinlichkeitsdichten auf $\mathbb{R}$. Dann ist folgende Funktion ebenfalls stets eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $\mathbb{R}$:	
$\frac{1}{2}(f_1 - f_2)$	
$\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$	x
$\frac{1}{2}(f_1 * f_2)$	
$\frac{1}{2}(f_1 \cdot f_2)$	
2. Auf einem beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ gilt für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$ stets :	
$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)$	
$\mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(A B) = \mathbb{P}(A \cap B)$	x
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$	
$\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup B)$	
3. Die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsvariablen ist stets ...	
... streng monoton wachsend.	
... strikt positiv.	
... stetig.	
... durch 1 beschränkt.	x
4. Es seien X und Y zwei unabhängige reelle Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann gilt stets ...	
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(Y \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \neq \mathbb{P}(Y \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(Y \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(\min(X, Y) \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	x
... $\mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(Y \in [a, \infty)) = \mathbb{P}(\max(X, Y) \in [a, \infty))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$.	
5. Ein Schätzer $\hat{\vartheta}$ für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$ ist stets erwartungstreu, falls für jedes $\vartheta > 0$ gilt ...	
... $\mathbb{E}[\hat{\vartheta}] = 0$.	
... $\text{Var}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}) = \vartheta$.	
... $\mathbb{E}_{\vartheta}[\hat{\vartheta}^2] - \text{Var}_{\vartheta}(\hat{\vartheta}) = \vartheta^2$.	x
... $\mathbb{E}_{\vartheta}[\hat{\vartheta}^2] = \vartheta^2$.	

(b)

je 1P pro Teilaufgabe

1. Geben Sie die Anzahl k aller Möglichkeiten an, Ihre 6 Lieblingsbücher nebeneinander in einem Regal aufzustellen.

$$k = \boxed{6! = 720}$$

2. Geben Sie die Anzahl ℓ aller Möglichkeiten an, Ihre 6 Lieblingsbücher auf einen grünen und einen roten Karton aufzuteilen. (Ein Karton kann auch leer sein.)

$$\ell = \boxed{2^6 = 64}$$

3. Der Zufallsvektor (X, Y) habe die gemeinsame Dichte

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{3}{16}xy^2 \cdot \mathbb{1}_{[0,2]^2}(x, y).$$

Geben Sie die Randdichte f_X von X an.

$$f_X(x) = \boxed{\frac{1}{2}x \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)}$$

4. Für ein Ereignis A mit Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A) = 0.5$ sei $X := \mathbb{1}_A$. Geben Sie die Varianz von X^2 an.

$$\text{Var}(X^2) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

5. Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen, die stochastisch gegen eine Zufallsvariable X konvergieren, d.h., es gelte $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ für $n \rightarrow \infty$. Konvergiert dann die Folge $(\frac{1}{2}X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch? Geben Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert an. Anderenfalls geben Sie “konvergiert nicht” an.

$$\boxed{\frac{1}{2}X}$$

Lösungshinweise:

- (a)
1. Nur $\frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ erfüllt stets die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichte.
 2. Definition bedingte Wahrscheinlichkeit
 3. $F(x) := \mathbb{P}(X \leq x) \leq 1$
 4. Siehe Satz 4.31 der Vorlesung. Es gilt aufgrund der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X, Y) \in [a, \infty)) &= \mathbb{P}(X \geq a, Y \geq a) = \mathbb{P}(X \geq a) \cdot \mathbb{P}(Y \geq a) \\ &= \mathbb{P}(X \in [a, \infty)) \cdot \mathbb{P}(Y \in [a, \infty))\end{aligned}$$

5. Die erste Antwortmöglichkeit kommt nicht infrage, da für einen erwartungstreuen Schätzer gelten muss $\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}] = \vartheta$. Die zweite liefert einem keine Aussage über den Erwartungswert des Schätzers und fällt damit auch weg. Ebenso die vierte, da hier nur eine Aussage über das zweite Moment des Schätzers getroffen wird.

Die dritte Aussage ist also richtig. Für die Varianz des Schätzers gilt

$$\text{Var}_\vartheta(\hat{\vartheta}) = \mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}^2] - \mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}]^2$$

und damit hier $\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}]^2 = \vartheta^2$, also $\mathbb{E}_\vartheta[\hat{\vartheta}] = \vartheta$. (Da es sich um einen positiven Parameter handelt, sollte sinnvollerweise auch der Schätzer positiv sein.)

- (b)
1. Es stehen von links nach rechts 6 Plätze (Fächer) im Regal zur Verfügung, auf die die 6 (unterscheidbaren!) Bücher ohne Mehrfachbelegung verteilt werden müssen.
 2. Es gibt für jedes Buch zwei Möglichkeiten, entweder roter Karton oder grüner Karton.
 - 3.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_0^2 \frac{3}{16} xy^2 \mathbb{1}_{[0,2]}(x) dy = \frac{1}{2} x \cdot \mathbb{1}_{[0,2]}(x)$$

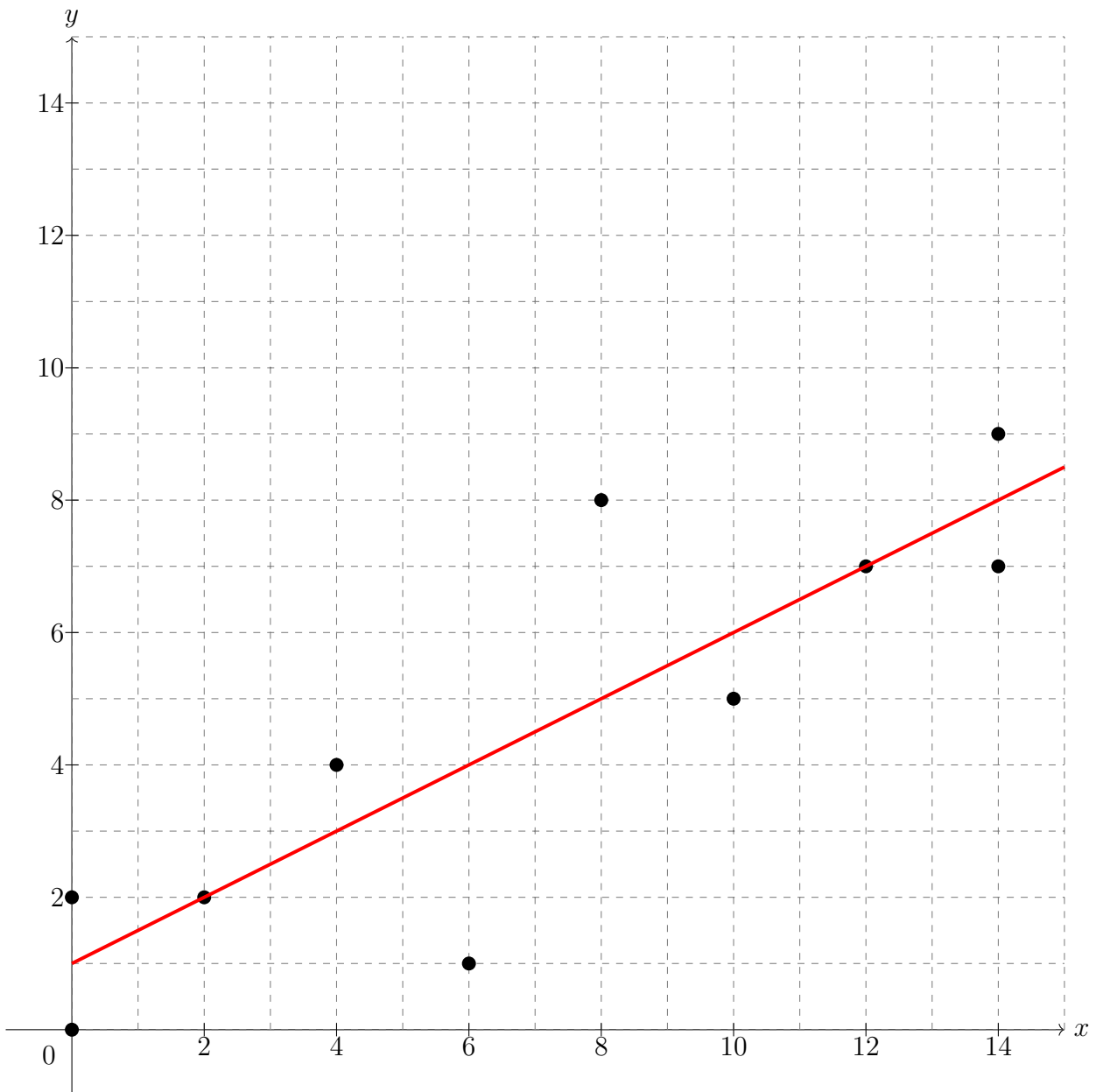
4. Es gilt $X = X^2 \sim \text{Bin}(1, 0.5)$. Daher ist $\text{Var}(X^2) = 1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.
5. Es gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{2}X_n - \frac{1}{2}X\right| \geq \frac{1}{2} \cdot \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Somit folgt aus der stochastischen Konvergenz $X_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} X$ auch diejenige der Folge $(\frac{1}{2}X_n)_n$ gegen $\frac{1}{2}X$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Das folgende Schaubild zeigt die Stichprobe $(x_1, y_1), \dots, (x_{10}, y_{10})$.



- (a) Geben Sie das Stichprobenmittel $\bar{y}$, das untere Stichprobenquartil $\tilde{y}_{1/4}$ und den Stichprobenmedian $\tilde{y}$ von $(y_1, \dots, y_{10})$ an:

1+2+1P

$$\bar{y} = \boxed{4.5} \quad \tilde{y}_{1/4} = \boxed{2} \quad \tilde{y} = \boxed{4.5}$$

- (b) **Zeichnen** Sie die Regressionsgerade $f(x) = a^* + b^*x$ des Datensatzes in das obige Koordinatensystem ein. Sie können dabei voraussetzen, dass die Regressionsgerade die Steigung $\frac{1}{2}$ besitzt. Geben Sie hier zusätzlich a^* und b^* an: 3P

$$a^* = \boxed{1}$$

$$b^* = \boxed{\frac{1}{2}}$$

- (c) **Zeichnen** Sie einen weiteren Datenpunkt (x_{11}, y_{11}) in das obige Koordinatensystem so ein, dass sich die Regressionsgerade nicht verändert. Geben Sie den eingezeichneten Punkt zusätzlich hier an: 1P

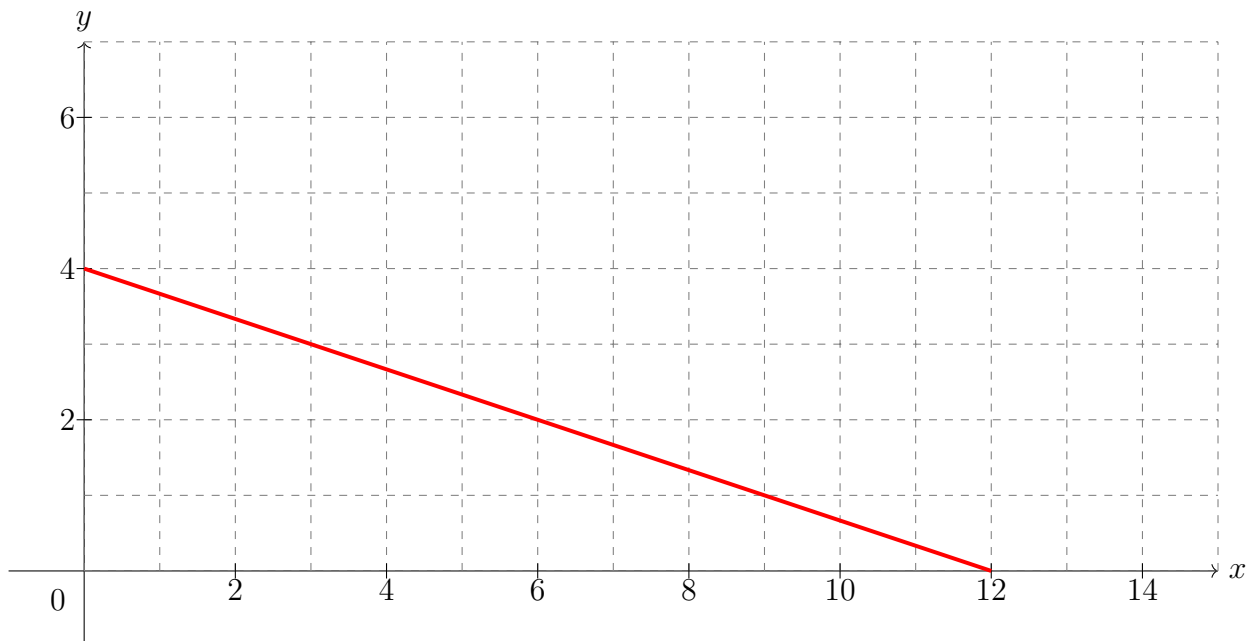
$$(x_{11}, y_{11}) = \boxed{\text{z.B. } (0, 1)}$$

- (d) Unten sehen Sie ein weiteres Schaubild mit einer Regressionsgeraden, allerdings sind die Stichprobenpunkte nicht eingezeichnet. Es ist Ihnen lediglich bekannt, dass für die Stichprobenvarianzen von x und y gilt $s_x^2 = s_y^2 = 2$.

Bestimmen Sie den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy} :

2P

$$r_{xy} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$



Lösungshinweise:

- (a) Die geordnete Stichprobe für y lautet

$$y_{()} = (0, 1, 2, 2, 4, 5, 7, 7, 8, 9).$$

Dementsprechend ist

$$\bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 4.5,$$

$$\tilde{y}_{1/4} = y_{(3)} = 2,$$

$$\tilde{y} = \frac{1}{2}(y_{(5)} + y_{(6)}) = 4.5.$$

- (b) Die Steigung b^* ist direkt in der Aufgabenstellung gegeben. Damit berechnen wir den y-Achsenabschnitt über

$$a^* = \bar{y} - \bar{x} \cdot b^* = 4.5 - 7 \cdot 0.5 = 1$$

- (c) Hier kann jeder Punkt auf der Regressionsgeraden gewählt werden.

- (e) Aus der Regressionsgerade lesen wir ab, dass $b^* = -\frac{1}{3}$ gilt. Damit folgt

$$r_{xy} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{s_x s_y} = \frac{b^* \cdot s_x}{s_y} = -\frac{1}{3}.$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es seien X eine Zufallsvariable mit Werten in $\{-1, 0, 1\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1, 3\}$. Dabei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(Y = 0) = 0.3, \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 1) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 3) = 0.2.$$

- (a) Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $i = -1, 0, 1$ und $j = 0, 1, 3$ an. Ergänzen Sie die fünf fehlenden Einträge. 2,5 P

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 3$
$i = -1$	0.1	0.05	0.15
$i = 0$	0.15	0.35	0
$i = 1$	0.05	0.1	0.05

- (b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$, die Varianzen $\text{Var}(X)$ und $\text{Var}(Y)$ sowie die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$. 2,5 P

$\mathbb{E}[X] = $ -0.1	$\mathbb{E}[Y] = $ 1.1
$\text{Var}(X) = $ 0.49	$\text{Var}(Y) = $ 1.09
$\text{Cov}(X, Y) = $ -0.14	

- (c) Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X = 1|Y = 1)$ an. 1 P

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 1) =$$
 0.2

- (d) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie! 2 P

Nein. Gegenbeispiel: $\mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = 0 \neq 0.1 = 0.5 \cdot 0.2 = \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 3)$

In einer Urne befinden sich 15 Kugeln, davon sind 6 rot und 9 schwarz. Nun werden nacheinander Kugeln gezogen und nach jedem Zug wieder zurück in die Urne gelegt. Für $i = 1, 2, \dots$ sei das Ereignis A_i definiert durch

$$A_i := \text{„die } i\text{-te gezogene Kugel ist rot“}$$

und die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch

$$X := \sum_{i=1}^{15} \mathbb{1}_{A_i} \text{ und } Y := \sum_{i=1}^{15} \mathbb{1}_{A_i^c}.$$

(e) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A_2|A_1 \cup A_2)$.

1 P

$$\mathbb{P}(A_2|A_1 \cup A_2) =$$

$$\frac{5}{8}$$

(f) Geben Sie die Verteilung von X an.

1 P

$$X \sim$$

$$\text{Bin}(15, 0.4)$$

(g) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

1 P

$$\delta_{15}$$

(h) Die Zufallsvariable Z gebe an, wie oft eine schwarze Kugel gezogen wird, bevor die erste rote Kugel gezogen wird. Welche Verteilung hat Z ?

1 P

$$\text{Geo}(0.4)$$

Lösungshinweise:

- (a) Die Gesamtsumme der Einträge ist 1. Zeilen- und Spaltensummen sind in der Aufgabenstellung gegeben.

	$j = 0$	$j = 1$	$j = 3$
$i = -1$	0.1	0.05	0.15
$i = 0$	0.15	0.35	0
$i = 1$	0.05	0.1	0.05

- (b) Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = (-1) \cdot 0.3 + 0 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.2 = -0.1,$$

$$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 3 \cdot 0.2 = 1.1,$$

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = (-1)^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.2 - (-0.1)^2 = 0.49,$$

$$\text{Var}(Y) = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = 1^2 \cdot 0.5 + 3^2 \cdot 0.2 - 1.1^2 = 1.09.$$

$$\text{Weiter folgt aus } \mathbb{E}[X \cdot Y] = (-3) \cdot 0.15 + (-1) \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.05 = -0.25$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = -0.25 + 0.11 = -0.14.$$

- (c) Es gilt

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2.$$

- (e) 6 von 15 Kugeln sind rot, das ist ein Anteil von 0.4, also $\mathbb{P}(A_2) = 0.4$.

Da die erste Kugel zurückgelegt wurde, beeinflusst sie nicht den zweiten Zug. A_1, A_2 sind daher unabhängig. Es folgt also $\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \mathbb{P}(A_2) = 0.4$.

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2 \mid A_1 \cup A_2) &= \frac{\mathbb{P}(A_2 \cap (A_1 \cup A_2))}{\mathbb{P}(A_1 \cup A_2)} = \frac{\mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2)} \\ &= \frac{0.4}{0.4 + 0.4 - \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(A_2)} = \frac{0.4}{0.8 - 0.16} = \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

- (f) Da X die Anzahl der „Erfolge“ in 15 unabhängigen Versuchen mit jeweils gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit 0.4 ist, gilt $X \sim \text{Bin}(15, 0.4)$.
- (g) Da X die roten Kugeln zählt und Y die anderen, kann $X + Y$ nur den Wert 15 annehmen und es gilt $\mathbb{P}(X + Y = 15) = 1$.
- (h) Z gibt die Anzahl der „Misserfolge“ (schwarze Kugeln) vor dem ersten „Erfolg“ (rote Kugel) an, also $Z \sim \text{Geo}(0.4)$.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Ein Profi und ein Amateur werfen jeweils einmal auf eine Dartscheibe. Der Mittelpunkt der Dartscheibe sei der Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Die Koordinaten der Auftreffpunkte (x_1, y_1) (Amateur) und (x_2, y_2) (Profi) werden als Realisierungen von unabhängigen Zufallsvariablen X_1, X_2, Y_1, Y_2 modelliert, wobei $X_1, Y_1 \sim N(0, 4)$ und $X_2, Y_2 \sim N(0, 1)$.

(a) Berechnen Sie die folgende Wahrscheinlichkeit.

2P

$$\mathbb{P}(|X_1 - 1| \geq 1) =$$

0.6587

(b) Welche Verteilung besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 - X_2$?

1P

$$Z \sim$$

$N(0, 5)$

(c) Bestimmen Sie die folgenden Erwartungswerte.

2P

$$\mathbb{E}[Z] =$$

0

$$\mathbb{E}[Z^2] =$$

5

(d) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen $(X_1 - X_2)^2$.

2P

$$F(x) =$$

$\left(2\Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}\right) - 1\right) \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$

(e) Bestimmen Sie die folgenden Korrelationen.

2P

$$\text{Corr}(Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_2) =$$

1

$$\text{Corr}(X_1 - X_2, Y_1 - Y_2) =$$

0

Lösungshinweise:

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|X_1 - 1| \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(-1 \leq X_1 - 1 \leq 1) = 1 - \mathbb{P}(0 \leq X_1 \leq 2) \\ &= 1 - \mathbb{P}(0 \leq \frac{X_1}{2} \leq 1) = 1 - (\Phi(1) - \Phi(0)) = 1 - 0.8413 + 0.5 = 0.6587\end{aligned}$$

b) Wegen der Symmetrie der Normalverteilung sieht man direkt ein, dass $-X_2 \sim X_2 \sim N(0, 1)$ gilt. Mit den Additionsregeln für unabhängigen Normalverteilungen erhalten wir

$$Z = X_1 - X_2 \sim N(0, 5).$$

d) Für $x < 0$ ist direkt klar, dass $F(x) = \mathbb{P}((X_1 - X_2)^2 \leq x) = 0$ gilt. Für $x \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}F(x) &= \mathbb{P}((X_1 - X_2)^2 \leq x) = \mathbb{P}(|X_1 - X_2| \leq \sqrt{x}) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq X_1 - X_2 \leq \sqrt{x}) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}} \leq \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{5}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}\right) = \Phi\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{x}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5}}\right) - 1.\end{aligned}$$

e) Eine Zufallsvariable ist mit sich selbst stets perfekt positiv korreliert, daher ist

$$\text{Corr}(Y_1 - Y_2, Y_1 - Y_2) = 1.$$

Da $X_1 - X_2$ und $Y_1 - Y_2$ stochastisch unabhängig sind, folgt sofort

$$\text{Corr}(X_1 - X_2, Y_1 - Y_2) = 0.$$

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Seien $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit der Dichte

$$f_{\vartheta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\vartheta} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\vartheta}\right), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

für einen unbekannten Parameter $\vartheta > 0$.

- (a) Berechnen Sie für $\vartheta = 1$ die folgende Wahrscheinlichkeit:

1P

$$\mathbb{P}_1(-1 \leq X \leq 1) =$$

$$1 - \frac{1}{e}$$

- (b) Berechnen Sie für $\vartheta = 1$ die folgende Varianz:

2P

$$\text{Var}_1(X^2) =$$

$$20$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty x^k e^{-x} dx = k!$ gilt.

- (c) Der unbekannte Parameter ϑ soll basierend auf einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Dabei können Sie voraussetzen, dass $x_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt.

Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$, berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion $\ell_x(\vartheta)$ und deren Ableitung $\ell'_x(\vartheta)$. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich.

3P

$$L_x(\vartheta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\vartheta} e^{-\frac{x_i}{\vartheta}} = \frac{1}{\vartheta^n} e^{-\frac{1}{\vartheta} \sum_{i=1}^n x_i}$$

$$\ell_x(\vartheta) = -n \cdot \log(\vartheta) - \frac{1}{\vartheta} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\ell'_x(\vartheta) = -\frac{n}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta^2} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (d) Geben Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x)$ für ϑ an.

1P

$$\hat{\vartheta}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

- (e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$ für Ihren in Teil (d) bestimmten Schätzer $\widehat{\vartheta}$. 1P

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)] = \boxed{\vartheta}$$

- (f) Berechnen Sie den mittleren quadratischen Fehler von $\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)$. 1P

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[|\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) - \vartheta|^2] = \boxed{\frac{\vartheta^2}{n}}$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\text{Var}(X) = \vartheta^2$ gilt.

Lösungshinweise:

- (a) Es gilt

$$\mathbb{P}_1(-1 \leq X \leq 1) = \int_{-1}^1 f_1(t) dt = \int_0^1 e^{-t} dt = 1 - \frac{1}{e}.$$

- (b) Es gilt zunächst

$$\text{Var}_1(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 \cdot f_1(t) dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot f_1(t) dt \right)^2.$$

Mit dem Hinweis folgt $\text{Var}_1(X^2) = 4! - (2!)^2 = 20$.

- (e) Es gilt

$$\mathbb{E}_{\vartheta}[\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)] = \mathbb{E}_{\vartheta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right] = \mathbb{E}[X_1] = \vartheta.$$

- (f) Mit der Varianz-Bias-Zerlegung und der Tatsache, dass hier ein erwartungstreuer Schätzer vorliegt, gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\vartheta}[|\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n) - \vartheta|^2] &= \text{Var}(\widehat{\vartheta}(X_1, \dots, X_n)) = \text{Var} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \text{Var} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) = \frac{1}{n} \text{Var}(X_1) = \frac{\vartheta^2}{n}. \end{aligned}$$

Um aus der Varianz der Summe die Summe der Varianzen zu bilden, verwenden wir die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen.