Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik
Prof. Dr. Mathias Trabs
Dr. Celeste Mayer

Nachname:
Vorname:
Matr.-Nr.:

Klausur zur Vorlesung
Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für die Fachrichtungen Informatik und Maschinenbau

Datum: 15. Februar 2022
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

- **Zugelassene Hilfsmittel:** Ein handbeschriebenes DinA4 Blatt, Taschenrechner (nicht vernetzbar über kabellose Verbindungen), Wörterbuch.
- Bei dieser Klausur werden nur diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die **vorgesehenen Kästchen** eingetragen sind! Eine Begründung bzw. **Herleitung** der Ergebnisse ist **nicht erforderlich, soweit nicht ausdrücklich verlangt (Aufgabe 3e).**
- Vereinfachen Sie Ergebnisse soweit wie möglich. Geben Sie Ergebnisse so exakt wie möglich an, z.B. als Bruch. Runden Sie **Endergebnisse** auf 4 **Nachkommastellen** genau, wenn nicht anders angegeben.
- Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1 (10 P)	2 (10 P)	3 (10 P)	4 (10 P)	5 (10 P)	$\sum$ (50 P)
Punkte						
Korrektor						

bestanden	nicht bestanden	Note

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7793	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Aufgabe 1 (10 Punkte)

a) Kreuzen Sie die jeweils zutreffende Aussage an. Dabei ist jeweils nur genau ein Kreuz pro Teilaufgabe zu setzen.

1. In einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ kann ...	
... nur $\emptyset$ und Ω eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.	
... nur allen Elementarereignissen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.	
... nur allen endlichen Teilmengen von Ω eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.	
... jeder Teilmenge von Ω eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden.	

2. Die Sensitivität eines Tests auf eine Hypothese ist die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass ...	
... der Test positiv ist und sein Ergebnis stimmt.	
... der Test negativ ist und sein Ergebnis stimmt nicht.	
... der Test positiv ist und sein Ergebnis stimmt nicht.	
... der Test negativ ist und sein Ergebnis stimmt.	

3. Es sei $X : \Omega \to S$ eine Zufallsvariable auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$. Dann gilt für alle $A \subseteq S$:	
$\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(A \in X)$	
$\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X \in A)$	
$\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(X(A))$	
$\mathbb{P}^X(A) = \mathbb{P}(A(X))$	

4. Eine Verteilungsfunktion ist **nicht** immer ...	
... nicht-negativ.	
... monoton wachsend.	
... stetig.	
... durch 1 beschränkt.	

5. Es seien X, Y zwei Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum. Dann sind X und Y ...	
... immer unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.	
... immer unkorreliert, wenn sie unabhängig sind.	
... nie unabhängig, wenn sie unkorreliert sind.	
... nie unkorreliert, wenn sie unabhängig sind.	

b) Füllen Sie folgende Lücken aus.

1. Die Anzahl der Möglichkeiten eine zufällige n-stellige Zahl aus den Ziffern 1 bis 9 zu bilden, beträgt für $n \in \mathbb{N}$:

2. Ist $p_n \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lim_{n\to\infty} np_n = \mu$ für ein $\mu > 0$, dann konvergiert $\mathrm{Bin}_{(n,p_n)}$ für $n \to \infty$ gegen die Verteilung:

3. Es sei X eine Zufallsvariable mit endlichem ersten und zweiten Moment. Dann folgt aus $\mathbb{P}(X = 5) = 1$, dass
$$\mathrm{Var}(X) = \boxed{}.$$

4. Es seien $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ reellwertige Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[X_i]$ und $\mathrm{Var}(X_i) = 1$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die stochastische Konvergenz von $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ gegen μ für $n \to \infty$ folgt, wenn:

5. Das Risiko eines erwartungstreuen Schätzers $\widehat{\vartheta}$ eines unbekannten Parameters $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Var}_\vartheta(\widehat{\vartheta}) = 1$ beträgt
$$\mathbb{E}_\vartheta\big[(\widehat{\vartheta} - \vartheta)^2\big] = \boxed{}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

a) In einer Datenbank finden Sie einen zwei-dimensionalen Datensatz mit dem Sie Ihre Datenanalyse-Techniken üben möchten. Sie haben:

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_j	1	2	4	4.7	6	7.5	8	11	13	13.5	14	14.3
y_j	0.8	1.5	3	3.4	2.7	6	2.8	4	4.5	4.8	5.2	6

Desweiteren können Sie ohne Überprüfung annehmen:

$$\overline{x} = 8.25, \quad s_x^2 = 23.2118, \quad r_{x,y} = 0.8229, \quad \frac{1}{11}\sum_{j=1}^{11} y_j = 3.5182, \quad s_y^2 = 2.7639.$$

1. Geben Sie das arithmetische Mittel $\bar{y}$, den empirischen Median $\tilde{y}_{1/2}$ und die Standardabweichung s_y von $(y_1, \ldots, y_{12})$ an:

$\bar{y} =$ ☐

$\tilde{y}_{1/2} =$ ☐

$s_y =$ ☐

2. Geben Sie das $\alpha = 0.05$-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.05}$ von $(y_1, \ldots, y_{12})$ an.

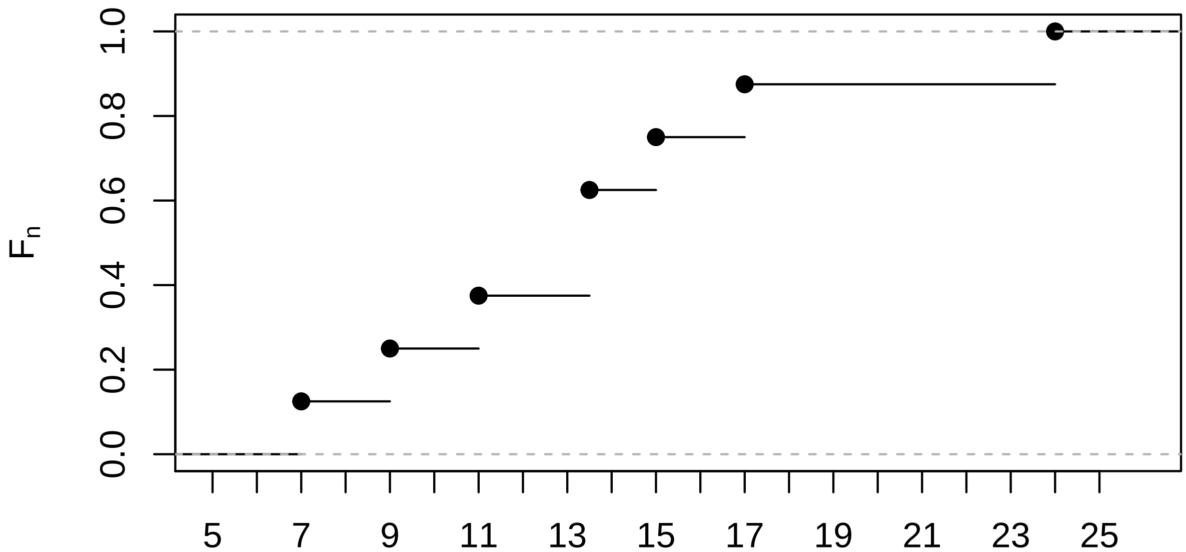
$\bar{y}_{0.05} =$ ☐

3. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Regressionsgeraden $f(x) = \hat{a} + \hat{b}x$ des Datensatzes.

$\hat{a} =$ ☐

$\hat{b} =$ ☐

b) An anderer Stelle finden Sie nun die empirische Verteilungsfunktion eines (anderen) eindimensionalen Datensatzes. Dabei ist bekannt, dass genau eine Beobachtung mit dem Wert 11 vorliegt.



1. Wie groß ist die Stichprobe, die hier betrachtet wurde?

$n =$ $\boxed{}$

2. Was ist die Spannweite der Stichprobe?

Spannweite = $\boxed{}$

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X, Y, deren gemeinsame Verteilung durch die unvollständige Tabelle

$j \backslash k$	-1	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
-1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$		0	$\frac{11}{48}$
0	$\frac{2}{16}$		$\frac{1}{16}$		
1					$\frac{7}{12}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	

festgelegt ist.

a) Vervollständigen Sie die Tabelle.

b) Um was für eine Verteilung handelt es sich bei der Verteilung von X?

$X \sim$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie:

$\mathbb{E}[Y] =$ $\boxed{}$

$\mathbb{P}(Y \in (0, 2)) =$ $\boxed{}$

d) Berechnen Sie:

$\mathbb{P}(X = -1 | Y = 1) =$ $\boxed{}$

$\mathbb{P}(X + Y = 1) =$ $\boxed{}$

e) Sind X und Y unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

f) Betrachten Sie nun unabhängige und identisch verteilte $X_1, \ldots, X_n$, wobei X_i dieselbe Verteilung wie X hat und $\mathrm{Var}(X) = \frac{5}{4}$. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{2}\right) \leq \frac{7}{8}\right) = \boxed{}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Betrachten Sie drei unabhängige normalverteilte Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{N}_{(0,1)}$, $Y \sim \mathrm{N}_{(-1,4)}$ und Z. Dabei habe Z einen Erwartungswert von 1 und eine Standardabweichung von 2.

a) Wie sind die Zufallsvariablen Z und $W := X - Y + Z$ verteilt?

$$Z \sim \mathrm{N}\Big(\boxed{}\Big), \quad W \sim \boxed{}$$

b) Berechnen Sie die Korrelation von Y und W.

$$\mathrm{Corr}(Y, W) = \boxed{}$$

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Maximum von X und Y größer als $1/2$ ist. Drücken Sie dafür zuerst $\mathbb{P}(\max\{X, Y\} > 1/2)$ mithilfe der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung aus:

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} > 1/2) = \boxed{}$$

Berechnen Sie nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit explizit:

$$\mathbb{P}(\max\{X, Y\} > 1/2) = \boxed{}$$

d) Geben Sie das 0.9861-Quantil $t_{X,0.9861}$ von X und das 0.6103-Quantil $t_{Y,0.6103}$ von Y an. Es genügt, wenn Sie die Ergebnisse auf 2 Nachkommastellen genau angeben.

$$t_{X,0.9861} = \boxed{}$$

$$t_{Y,0.6103} = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f_\vartheta(x) = \frac{c}{\vartheta}\big(e^{-x/\vartheta}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} + e^{2x/\vartheta}\mathbb{1}_{\{x<0\}}\big), \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit unbekanntem Parameter $\vartheta > 0$ und einer von ϑ unabhängigen Konstante $c > 0$.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Exponentialverteilung mit Parameter ϑ.

Erwartungswert = $\boxed{}$

Hinweis: Die Dichte einer Exponentialverteilung mit Parameter ϑ ist

$$p(x) = \frac{1}{\vartheta}e^{-x/\vartheta}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Bestimmen Sie c so, dass f_ϑ eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

$c =$ $\boxed{}$

Hinweis: Falls Sie c nicht berechnen können, dann verwenden Sie im Folgenden den (nicht korrekten) Wert $c = 1$.

c) Der unbekannte Parameter ϑ soll basierend auf einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden.

Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$, berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion $\ell_x(\vartheta)$ und deren Ableitung $\ell'_x(\vartheta)$.

$L_x(\vartheta) =$ $\boxed{}$

$\ell_x(\vartheta) =$ $\boxed{}$

$\ell'_x(\vartheta) =$ $\boxed{}$

Geben Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\widehat{\vartheta}(x)$ für ϑ an.

$\widehat{\vartheta}(x) =$ $\boxed{}$

d) Basierend auf der unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ soll nun der unbekannte Parameter ϑ mit Hilfe der Momentenmethode geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert $m_1(\vartheta)$ der durch f_ϑ definierten Verteilung.

$$m_1(\vartheta) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Momentenschätzer $\widetilde{\vartheta}(x)$ für ϑ.

$$\widetilde{\vartheta}(x) = \boxed{}$$

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\widetilde{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)$.

$$\mathbb{E}_\vartheta[\widetilde{\vartheta}(X_1, \ldots, X_n)] = \boxed{}$$