



Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Stochastik

Dr. Tamara Göll

Sebastian Höfer, M.Sc.

Nachname:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Klausur zur Vorlesung
Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
für Studierende der Informatik

Datum: 19. Februar 2025

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

- **Zugelassene Hilfsmittel:** Ein von Ihnen handbeschriebenes DIN A4 Blatt, Taschenrechner (nicht programmierbar, nicht kabellos vernetzbar), Wörterbuch.
- Bei dieser Klausur werden nur diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die **vorgesehenen Kästchen** eingetragen sind! Eine Begründung bzw. **Herleitung** der Ergebnisse ist **nicht erforderlich**, sofern nicht explizit gefordert.
- Vereinfachen Sie Ergebnisse so weit wie möglich. Geben Sie Ergebnisse so exakt wie möglich an, z.B. als Bruch. Runden Sie **Endergebnisse** bei Angabe als Dezimalzahl auf 4 **Nachkommastellen** genau, wenn nicht anders angegeben.
- Hinreichend zum Bestehen der Klausur sind 20 Punkte.

Viel Erfolg!

Aufgabe	1 (13 P)	2 (7 P)	3 (10 P)	4 (10 P)	5 (10 P)	Σ (50 P)
Punkte						
Korrektor						

Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ der Standard – Normalverteilung $N(0, 1)$

[illegible]

Aufgabe 1 (13 Punkte)

- a) Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es seien $A, B, C \in \mathcal{A}$ Ereignisse mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= 0.55, & \mathbb{P}(B) &= 0.35, & \mathbb{P}(C) &= 0.45, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= 0.15, & \mathbb{P}(A \cap C) &= 0.2, & \mathbb{P}(B \cap C) &= 0.15, & \mathbb{P}(A \cap B \cap C) &= 0.1.\end{aligned}$$

Bestimmen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}(A \setminus B) = \boxed{}$$

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \boxed{}$$

- b) Person A wirft eine faire Münze 5-mal hintereinander. Dabei zählt es für Person A als Treffer, wenn Zahl oben liegt. Person B wirft unabhängig davon einen fairen Würfel 6-mal und erachtet das Ergebnis als Treffer, falls eine 1 oder eine 2 gewürfelt wird. Die Zufallsvariable X bezeichne die Summe der Trefferanzahlen von Person A und B. Mit welcher Wahrscheinlichkeit landen beide Personen keinen einzigen Treffer?

$$\mathbb{P}(X = 0) = \boxed{}$$

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Gesamtanzahl der Treffer X .

$$\mathbb{E}[X] = \boxed{}$$

- c) Es seien $X \sim N(2, 4)$, $Y \sim N(-4, 9)$ und $Z \sim N(0, 1)$ unabhängige, normalverteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung der folgenden Zufallsvariablen:

$$U := X + Y \sim \boxed{}$$

$$V := 2X - Y \sim \boxed{}$$

Geben Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so an, dass $W := a \cdot X + b$ dieselbe Verteilung wie Z besitzt.

$$a = \boxed{} \quad b = \boxed{}$$

- d) Es sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Die Verteilungsfunktion von X ist also gegeben durch

$$F_X(x) = (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}\{x > 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $Y := 2 \cdot X$.

$$F_Y(y) = \boxed{}$$

- e) Sei $X_1, X_2, \dots$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, wobei $X_n \sim \text{Nb}(n, \frac{3}{4})$ gelte. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{X_n}{n} - \frac{1}{3} < \frac{1}{10} \right) = \boxed{}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\frac{3X_n - n}{2} \leq \sqrt{n} \right) = \boxed{}$$

- f) Kreuzen Sie für die folgenden Abbildungen diejenigen Funktionen an, bei denen es sich um eine Verteilungsfunktion handelt.

☐

Funktion 1

☐

Funktion 2

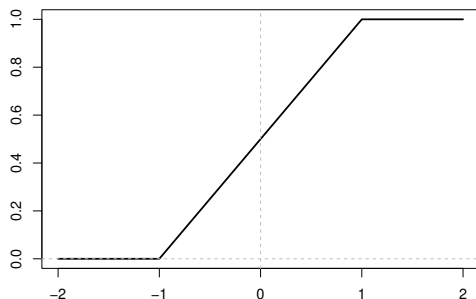
☐

Funktion 3

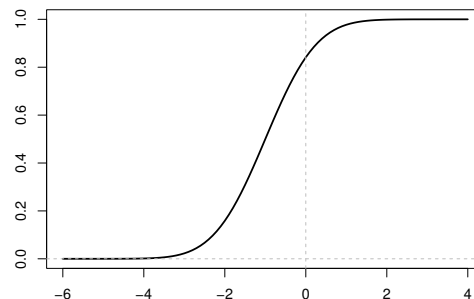
☐

Funktion 4

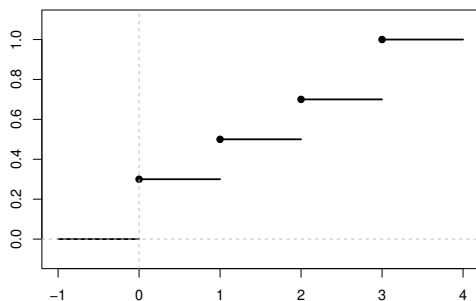
Funktion 1



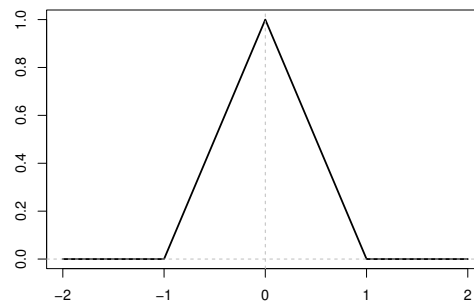
Funktion 2



Funktion 3

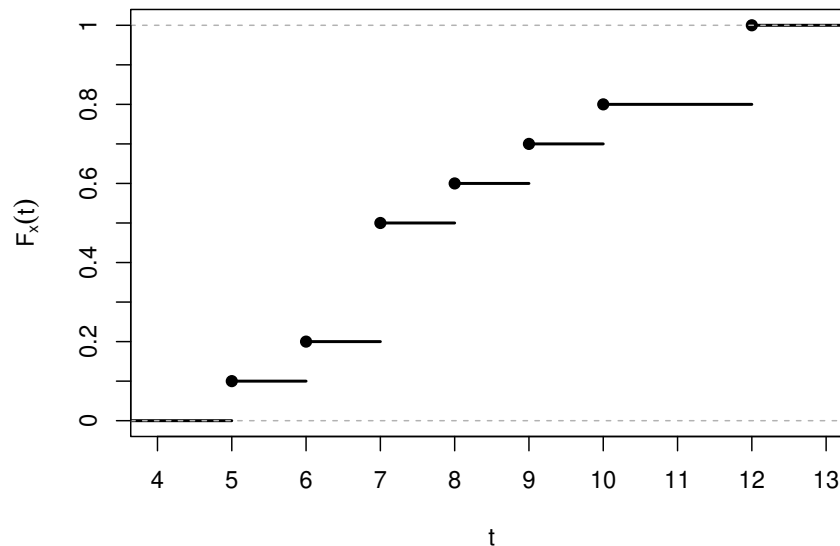


Funktion 4



Aufgabe 2 (7 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die empirische Verteilungsfunktion einer Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_{10})$ mit Werten in $\mathbb{N}$ vom Umfang $n = 10$.



a) Geben Sie die geordnete Stichprobe $x_{()} = (x_{(1)}, \dots, x_{(10)})$ an.

b) Bestimmen Sie folgende Größen der Stichprobe x :

i) Den Median $\tilde{x}$:

$$\tilde{x} = \text{[]}$$

ii) Das 0.1-getrimmte Mittel $\bar{x}_{0.1}$:

$$\bar{x}_{0.1} = \text{[]}$$

iii) Den Quartilsabstand $\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25}$:

$$\tilde{x}_{0.75} - \tilde{x}_{0.25} = \text{[]}$$

c) Angenommen, wir addieren den Wert 4 zu allen Einträgen der Stichprobe x , betrachten also die neue Stichprobe $y = (x_1 + 4, \dots, x_{10} + 4)$. Welcher der in b) bestimmten Werte bleibt bei dieser Translation unverändert?

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Für die Erstellung einer Klausur steht ein Aufgabenpool aus 20 Aufgaben zur Verfügung. Von diesen 20 Aufgaben wurden zwei Aufgaben von Larry Lurex erstellt. Aus dem Aufgabenpool werden für die Klausur sechs Aufgaben zufällig ausgewählt. Dabei darf keine Aufgabe mehrfach gestellt werden. Die Wahl einer Aufgabe erfolgt dabei stets gleichverteilt unter allen noch verfügbaren Aufgaben.

- a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Klausur zusammenzustellen, wenn die Reihenfolge der gewählten Aufgaben keine Rolle spielt?

- b) Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Aufgaben von Larry Lurex, welche für die Klausur ausgewählt werden. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse an.

$$\mathbb{P}(X = 0) = \text{$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \text{$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \text{$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \text{$$

- c) Was ist die erwartete Anzahl von Aufgaben in der Klausur, welche von Larry Lurex erstellt wurden?

$$\mathbb{E}[X] = \text{$$

Die Klausur findet nur statt, wenn sich von 30 Studierenden mindestens 27 für die Klausur anmelden, ansonsten wird mündlich geprüft. Die Studierenden melden sich dabei unabhängig jeweils mit Wahrscheinlichkeit 0.9 an.

- d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet die Klausur statt?

Nehmen Sie nun an, dass ein Student mit den Aufgaben von Larry Lurex schlecht zurechtkommt und dementsprechend die Durchfallwahrscheinlichkeit des Studenten höher ist, je mehr Aufgaben von Larry Lurex gestellt werden. Konkret sei die Situation des Studenten folgendermaßen:

- 0 Aufgaben von Larry Lurex: Durchfallwahrscheinlichkeit 10%
- 1 Aufgabe von Larry Lurex: Durchfallwahrscheinlichkeit 20%
- 2 Aufgaben von Larry Lurex: Durchfallwahrscheinlichkeit 30%

e) Es bezeichne B das Ereignis, dass der Student die Klausur besteht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit von B .

$$\mathbb{P}(B) = \boxed{}$$

Nach der Klausur stellt man fest, dass der Student die Klausur bestanden hat. Bestimmen Sie nun mit diesem zusätzlichen Wissen die Wahrscheinlichkeit, dass in der Klausur zwei Aufgaben von Larry Lurex gestellt wurden.

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X, Y , deren gemeinsame Dichte für geeignete $c > 0, a > 1$ gegeben ist durch

a) Angenommen, es gilt $c = \frac{5}{8}$. Bestimmen Sie $a > 1$ so, dass $f_{X,Y}$ eine Dichte ist.

$$a =$$

b) Bestimmen Sie die Dichte f_Y der Verteilung von Y .

$$f_Y(y) =$$

$$f_X(x) = \frac{2}{7}(2+x)\mathbb{1}\{x \in [1, 2]\}.$$
$$\mathbb{E}[X] =$$

$\mathbb{E}[X^2] =$

$$\mathbb{V}(X) =$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

e) Sind X und Y unabhängig?

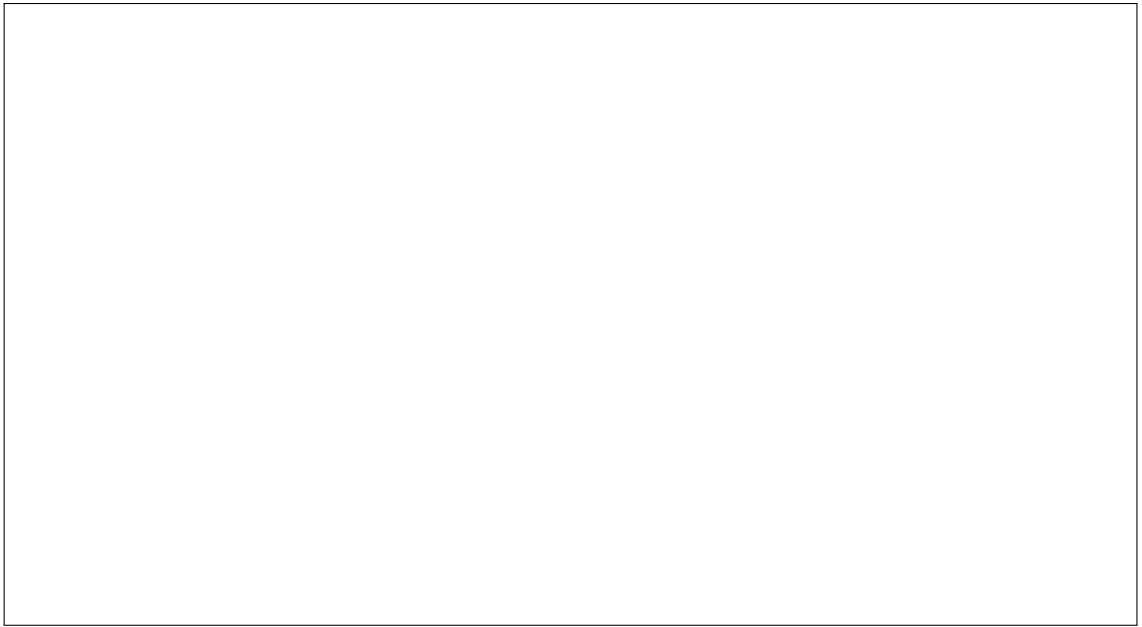
☐

Ja

☐

Nein

Begründen Sie Ihre Antwort.



Betrachten Sie die Dichte

$$t \mapsto f_{\vartheta}(t) = \begin{cases} \frac{2^{\vartheta} \cdot \vartheta}{t^{\vartheta+1}}, & t \geq 2, \\ 0, & t < 2, \end{cases}$$

a) Berechnen Sie für $\vartheta = 2$ die folgende Wahrscheinlichkeit:

$$\mathbb{P}_2(0 \leq Z \leq 3) =$$

$$\mathbb{E}_2 \left[\frac{1}{Z} \right] =$$

Bestimmen Sie die Likelihood-Funktion $L_x(\vartheta)$, berechnen Sie die Loglikelihood-Funktion $\ell_x(\vartheta)$ und deren Ableitung $\ell'_x(\vartheta)$. Vereinfachen Sie die Ausdrücke so weit wie möglich.

$$L_x(\vartheta) = \left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$$

$$\ell_x(\vartheta) =$$

$$\ell'_x(\vartheta) =$$

$$\hat{\vartheta} = \left[\begin{array}{c} \text{ } \end{array} \right]$$

e) Berechnen Sie den Erwartungswert von Z für ein allgemeines $\vartheta \in (1, \infty)$.

$$\mathbb{E}_\vartheta[Z] =$$

Bestimmen Sie den Momentenschätzer $\tilde{\vartheta}$ für ϑ .

$$\tilde{\mathcal{V}} =$$

f) Arzneimittelhersteller I behauptet, dass sein neues Medikament eine seltene Krankheit in mindestens 50% der Fälle heilt. Ein anderer Hersteller II glaubt, dass diese Angabe zu hoch ist. Dafür testet er $n = 100$ erkrankte Patienten. Sie können davon ausgehen, dass die Heilung der Patienten unabhängig voneinander mit einer (unbekannten) Wahrscheinlichkeit $\vartheta \in (0, 1)$ eintritt.

Wie muss Hersteller II Hypothese und Alternative für einen statistischen Test formulieren, um nachzuweisen, dass die Aussage des Arzneimittelherstellers I falsch ist?

Hypothese H_0 :

--

Alternative H_1 :

--

Geben Sie einen Hypothesentest an, der sich in dieser Situation eignen würde.

--	--